УДК 539.3 : 629.7.015.4 : 624.07

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ТРЕЩИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

В. Н. Максименко, А. В. Цендровский

(*Новосибирск*)

Применение аналитических методов к проблеме распространения и ветвления усталостных трещин затруднительно из-за недостатка сведений о распределении напряжений в окрестности вершин разрезов сложной конфигурации. Обсуждение последней проблемы и обзор работ в этом направлении можно найти, например, в [1].

Ниже развивается метод решения задачи о системе разрезов сложной формы в анизотропной полуплоскости. Предлагается эффективный алгоритм численного решения задачи. Исследуется влияние анизотропии материала, свободного края пластины, кривизны трещины на распределение напряжений и величину коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах разрезов.

1. Рассмотрим упругую пластину из однородного анизотропного материала, занимающую область $D = \{x > 0\}$. Пластина ослаблена гладкими криволинейными внутренними разрезами L_j ($j = 1, \ldots, k$), не пересекающимися между собой, и подвержена заданной системе внешних усилий. Будем предполагать, что берега разрезов свободны от нагрузок и не контактируют между собой.

Напряжения в пластине выражаются через две аналитические функции [2]:

$$(1.1)\quad (\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2} (\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1)\Phi_\nu(z_\nu)\right\},\quad z_\nu = x + \mu_\nu y \quad (\nu = 1, 2),$$

где μ_ν — корни характеристического уравнения.

Искомые функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ разыскиваем в виде

$$(1.2)\qquad \Phi_\nu(z_\nu) = \Phi_\nu^0(z_\nu) + \Phi_\nu^1(z_\nu),$$

$$\Phi_\nu^1(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\omega_\nu(\tau)\,d\tau_\nu}{\tau_\nu - z_\nu} - \frac{l_\nu s_\nu \overline{\omega_1(\tau)}\,d\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1 - s_\nu z_\nu} - \frac{n_\nu m_\nu \overline{\omega_2(\tau)}\,d\bar{\tau}_2}{\bar{\tau}_2 - m_\nu z_\nu}\right\}.$$

Здесь и ниже использованы обозначения [3]; $\Phi_\nu^0(z_\nu)$ — решение для полуплоскости без разрезов от заданной системы внешних усилий. Значения $\Phi_\nu^0(z_\nu)$ будем считать известными. В ином виде представления $\Phi_\nu^1(z_\nu)$ даны в [4].

Функции $\Phi_\nu(z_\nu)$, определяемые равенствами (1.2), удовлетворяют заданной системе внешних усилий, в том числе краевым условиям на крае пластины $x = 0$ и на бесконечности.

Подставляя предельные значения $\Phi_\nu(z_\nu)$ из (1.2) в краевые условия на L и параметризуя контуры $L_j = \{t = \tau^j(\xi);\ |\xi| < 1\}$, получим для определения неизвестных комплексных функций $\omega_\nu(t) = \{\omega_{\nu j}(t) | t \in L_j;\ j = 1, \ldots, k\}$ следующую систему сингулярных интегральных уравнений задачи [3]:

$$(1.3)\quad \int_{-1}^{1} \frac{F_j(\xi, \eta)\,\chi_j(\eta)\,d\eta}{\eta - \xi} + \sum_{s=1}^{k} \int_{-1}^{1} \{k_1^{js}(\xi, \eta)\,\chi_s(\eta) + k_2^{js}(\xi, \eta)\,\overline{\chi_s(\eta)}\}\,d\eta = f_j(\xi),$$

$$\omega_{1j}(t) = \chi_j(\xi),$$

$$\omega_{2j}(t) = -a(t)\,\omega_{1j}(t) - b(t)\,\overline{\omega_{1j}(t)},$$

$$k_1^{js}(\xi, \eta) = \frac{\dot{\tau}_1(\eta)}{2}\frac{d}{dt_1}\left\{\ln\frac{(\tau_1 - t_1)(\bar{\tau}_2 - m_1 t_1)(\tau_1 - \bar{s}_2\bar{t}_2)}{(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} - \right.$$

$$\left. - \left|\frac{a_0}{b_0}\right|^2 \ln\frac{(\tau_1 - \bar{s}_2\bar{t}_2)(\tau_2 - \bar{m}_1\bar{t}_1)}{(\tau_1 - \bar{s}_1\bar{t}_1)(\tau_2 - \bar{m}_2\bar{t}_2)} + \frac{1 - \delta_{js}}{\tau_1 - t_1}\,\dot{\tau}_1(\eta)\right\},$$

$$k_2^{js}(\xi, \eta) = \frac{\overline{a_0 \dot{\tau}_1(\eta)}}{2\bar{b}_0} \frac{d}{dt_1} \left\{ \ln \frac{(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)(\bar{\tau}_2 - m_1 t_1)(\tau_2 - \bar{m}_2 \bar{t}_2)}{(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)(\tau_2 - \bar{m}_1 \bar{t}_1)(\bar{\tau}_1 - s_1 t_1)} \right\},$$

$$f_j(\xi) = \frac{-\pi i}{\overline{b(t)}} \{\overline{a(t)}\, \overline{\Phi_1^0(t_1)} + b(t)\Phi_1^0(t_1) + \overline{\Phi_2^0(t_2)}\},$$

$$F_j(\xi, \eta) = \frac{(\eta - \xi)\, \dot{\tau}_1^j(\eta)}{\tau_1^j(\eta) - t_1},$$

$$a_0 = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}, \quad b_0 = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}{\mu_2 - \bar{\mu}_2}, \quad t = \tau^j(\xi) \in L_j, \quad \tau = \tau^s(\eta) \in L_s,$$

где δ_{js} — символ Кронекера; $\dot{\tau} = d\tau/d\eta$.

Уравнения (1.3) в совокупности с дополнительными условиями однозначности смещений при обходе L_j [3]

$$\int_{-1}^{1} \chi_j(\eta)\, \dot{\tau}_1^j(\eta)\, d\eta = 0 \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{1.4}$$

полностью определяют искомое решение задачи.

Пусть пластина ослаблена одним прямолинейным разрезом $L = \{t = \tau(\xi) = x_0 + le^{i\alpha}\xi;\ |\xi| < 1\}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$. Полагая $\chi(\xi) = i\varphi(\xi)/\varepsilon$ $(\varepsilon = \mu_1 - \mu_2)$ и осуществляя предельный переход к изотропной среде $(\varepsilon \to 0)$, имеем интегральное уравнение задачи о прямолинейном разрезе в изотропной полуплоскости

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\eta)\, d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^{1} \{k_1(\xi, \eta)\varphi(\eta) + k_2(\xi, \eta)\overline{\varphi(\eta)}\}\, d\eta = f(\xi), \tag{1.5}$$

$$k_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\ln(C^2 + T^2) - 2X(C + iT)^{-4}\{2iY(C + iT)\cos\psi +$$
$$+ (\eta - \xi)C\sin^2\psi + T^2\sin\psi + 2iT[(\eta + \xi)\sin\psi - Y]\sin\psi\},$$

$$k_2(\xi, \eta) = 4\frac{e^{-i\psi}CTX}{(C^2 + T^2)^2}, \quad C = \frac{2x_0}{l} - (\eta + \xi)\sin\psi,$$

$$T = (\eta - \xi)\sin\psi, \quad X = \frac{x_0}{l} - \eta\sin\psi, \quad Y = \frac{x_0}{l} - \xi\sin\psi, \quad \psi = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Этот результат совпадает с соотношениями, например, [1].

2. Так как внутренние гладкие разрезы L_j не пересекаются между собой, ядра $k_p^{js}(\xi, \eta)$ в уравнении (1.3) непрерывны. Индекс системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) равен $+1$. Решение системы при дополнительных ограничениях (1.4) в классе функций

$$\chi_j(\xi) = \chi_j^0(\xi)(1 - \xi^2)^{-1/2} \tag{2.1}$$

$(\chi_j^0(\xi)$ — ограниченные непрерывные по Гельдеру функции) существует и единственно [5].

Обычным образом сводим решение системы (1.3) совместно с дополнительными условиями (1.4) к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{F_j(x_p, t_n)}{t_n - x_p}\chi_{jn}^0 + \sum_{s=1}^{k}\left[k_{1,pn}^{js}\chi_{sn}^0 + k_{2,pn}^{js}\bar{\chi}_{sn}^0\right]\right\} = f_{jp}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N}\dot{\tau}_1^j(t_n)\chi_{jn}^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \quad p = 1, \ldots, N - 1,$$

$$k_{1,pn}^{js} = k_1^{js}(x_p, t_n), \quad k_{2,pn}^{js} = k_2^{js}(x_p, t_n), \quad x_p = \cos\frac{\pi}{N}p, \quad t_n = \cos\frac{2n - 1}{2N}\pi$$

относительно приближенных значений искомых функций в чебышевских узлах $\chi_{jn}^0 = \chi_j^0(t_n)$. Оценка сходимости решения системы (2.2) к решениям уравнений (1.3), (1.4) дана, например, в [6].

Определив из (2.2), (1.3) значения

$$\omega_{\nu j}^0(\pm 1) = \lim_{\xi\to\pm 1} \omega_{\nu j}[\tau^j(\xi)]\ (1-\xi^2)^{1/2}$$

и используя асимптотические формулы в окрестности $c = \tau^j(\pm 1)$ концов разреза L_j [3]

$$\Phi_\nu(z_\nu) \approx 2^{-3/2}\omega_{\nu j}^0(\pm 1)\{\mp \tau_1^j(\pm 1)/(z_\nu - c_\nu)\}^{1/2},$$

по формулам (1.1) находим асимптотическое распределение напряжений в вершинах трещин.

При выходе разреза L_p концом a_p на край пластины $x = 0$ или пересечении разрезов в точке a_p условие (1.4) при $j = p$ уже не выполняется и его следует отбросить. В соответствующих ядрах $k_{\nu}^{jp}(\xi, \eta)$ интегральных уравнений (1.3) появятся неподвижные особенности, а функция $\omega_{1p}(t)$ будет иметь в точке $t = a_p$ особенность, отличную от корневой. Характер ее определяется из интегральных уравнений задачи (1.3) способом [7]. Численный метод решения (2.2) в этом случае не годится.

Ниже для краевых и ветвящихся трещин применялась упрощенная процедура решения [1]. Искомые функции $\chi_p(\xi)$ по-прежнему ищем в виде (2.1), но вместо условия (1.4) при $j = p$ подчиним их условию $\chi_p^0(-1) = 0$ ($a_p = \tau^p(-1)$ — точка ветвления или выхода разреза L_p на край пластины). Этот упрощенный способ решения эффективен лишь тогда, когда не требуется определять распределение напряжений в окрестности угловой точки $a_p = \tau^p(-1)$. Если необходимо исследовать распределение напряжений вблизи вершины a_p, то решение надо искать в виде, верно отражающем особенность в угловой точке, и использовать более сложные квадратурные формулы.

3. Представления (1.2) и алгоритм численного решения интегральных уравнений (1.3) оказались эффективным инструментом определения напряжений в окрестности вершин разрезов сложной формы в анизотропных и изотропных пластинах.

Ниже для полуплоскости с трещиной по дуге окружности или ветвящейся трещины с прямолинейными звеньями приводятся результаты расчетов, имеющих значение в механике разрушения коэффициентов интенсивности напряжений отрыва и сдвига в вершинах трещин:

$$K_1 = \lim_{t\to c} \sigma_n \sqrt{\frac{r}{l}},\quad K_2 = \lim_{t\to c} \tau_n \sqrt{\frac{r}{l}}.$$

Здесь l — некоторый номинальный размер; $r = |t - c|$; c — вершина трещины; t — точка, лежащая на касательной к трещине, проведенной через вершину c.

Расчеты проводились для пластин из изотропного и ортотропных материалов с различной степенью анизотропии: а) $E = 27{,}61\cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0{,}25$; б) $E_1 = 5{,}384\cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1{,}795\cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0{,}863\cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0{,}25$; в) $E_1 = 27{,}61\cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2{,}761\cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 1{,}035\cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0{,}25$. Данные для изотропного материала получены путем предельного перехода в параметрах анизотропии в численном решении.

На рис. 1—4 приводятся результаты расчетов K_1, K_2 для равномерного растяжения полуплоскости усилиями $\sigma_y^\infty = 1$: кривые *1* — изотропный материал (случай «а»), *2*, *3* — ортотропный (случаи «б», «в»); изменение коэффициентов интенсивности напряжений представлено сплошными (штриховыми) линиями, если угол φ, образованный главным направлением анизотропии E_1 с осью x, равен 0 ($\pi/2$).

На рис. 1, 2 даны значения K_i ($i = 1, 2$) соответственно для левой и правой вершины трещины, проходящей по дуге полуокружности вблизи

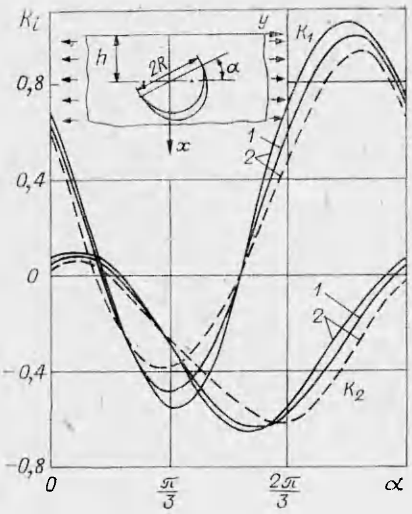

Рис. 1

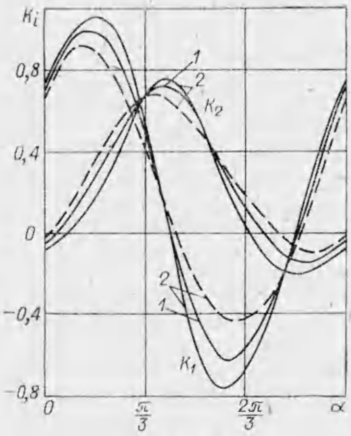

Рис. 2

края полуплоскости, при $R/h = 0{,}7$, $l = R/2$. Для изотропного материала полученные результаты совпадают с данными [8]. Линии *1* проходят между кривыми для ортотропного материала при $\varphi = 0$ и $\pi/2$. Влияние анизотропии материала на значения коэффициентов интенсивности напряжений может уменьшаться или увеличиваться в зависимости от положения трещины относительно края полуплоскости и оси нагружения. Анизотропия сказывается в большей мере при экстремальных значениях K_i.

На рис. 3 приведены результаты расчетов K_1 в зависимости от угла α для краевого надреза полуплоскости по дуге окружности. Здесь a — длина дуги, $l = a/2$. Результаты расчетов для изотропного материала совпадают с данными [9]. С увеличением степени анизотропии значения K_1 уменьшаются. При $\alpha \to 0$ получаем значения K_1 в вершине прямолинейного краевого надреза $L = \{0 \leqslant x \leqslant a;\ y = 0\}$, совпадающие с результатами [10]. Для изотропного материала при $\alpha \to 0$ $K_1 = 1{,}121$ уже для 20 точек коллокации на разрезе ($N = 20$), т. е. относительная ошибка решения не превышает 0,1% [1]. Как и для прямолинейных надрезов [10], значения $K_1(\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ при $\varphi = 0$ и $\pi/2$ совпадают между собой.

На рис. 4 представлена в зависимости от $\beta = h/l_1$ величина K_1 в вершинах A и B ветвящейся трещины (основной разрез длины $2l_1$ перпендикулярен краю пластины, а из его конца выходят под углом $\alpha = \pi/6$ два боковых надреза длины $2l_2$ каждый) вблизи края полуплоскости при $l_2/l_1 = 0{,}5$, $l = l_1/2$. При $\beta \to \infty$ (случай ветвящейся трещины в беско-

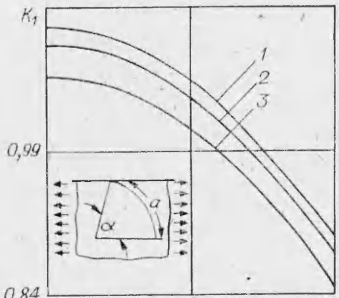

Рис. 3

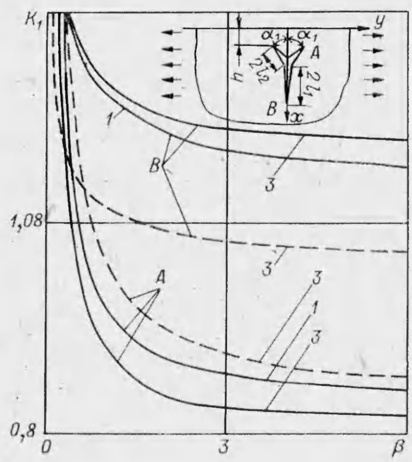

Рис. 4

ε	K_1					
	N					
	10	20	30	40	50	60
4	0,7493	0,7549	0,7549			
10	0,8213	0,8190	0,8188	0,8188		
16	0,8885	0,8782	0,8769	0,8768	0,8768	
28	0,9977	0,9828	0,9771	0,9765	0,9765	0,9765

нечной пластине) результаты расчетов для изотропного материала совпадают с известными [1]. С увеличением степени анизотропии расхождение в значениях K_1 при $\varphi = 0$ и $\pi/2$ растет, а значения K_1 для изотропного материала занимают промежуточное положение.

Результаты расчетов показали хорошую сходимость алгоритма. Для задачи, показанной на рис. 1, в таблице приводятся для сравнения K_1 при $\alpha = 0$ и различных значениях $\varepsilon = R/h$ и N (см. (2.2)). Сходимость численного решения ухудшается с приближением концов разреза к краю полуплоскости ($\varepsilon \to \infty$). Для задачи, изображенной на рис. 3, результаты расчетов K_1 при $N \geqslant 20$ не меняются в первых трех значащих цифрах.

Для крестообразной трещины $L = \bigcup\limits_{s=1}^{4} L_s$ (четыре разреза $L_s = \{t = \exp(i\pi s/2)l(\xi + 1);\ |\xi| < 1\}$ стыкуются вершинами под углом $\alpha = \pi/2$ друг к другу) в бесконечной изотропной пластине, подверженной нагрузке $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 1$, имеем $K_1 = 0{,}86414$. В [11, 12] для этой задачи получено соответственно $K_1 = 0{,}86283$ и $0{,}86356$. Все данные приводятся для десяти точек коллокации на каждом звене L_s ($s = 1, 4$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саврук М. П.** Двумерные задачи теории упругости для тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1981.
2. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1957.
3. **Максименко В. Н.** Расчет анизотропных пластин, ослабленных трещинами и подкрепленных ребрами жесткости при помощи сингулярных интегральных уравнений.— В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, 1982.
4. **Фильштинский Л. А.** Краевые задачи для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6.
5. **Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М.: Наука, 1970.
6. **Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985.
7. **Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.** Numerical solution of singular integral equations.— In: Mechan. fracture. I. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Int. Publ. Co., 1973.
8. **Дацышин А. П., Марченко Г. П.** Взаимодействие криволинейных трещин с границей упругой полуплоскости.— Физ.-хим. механика материалов, 1984, № 5.
9. **Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.** A system of curvilinear cracks in an isotropic elastic half-plane.— Intern. J. Fract., 1979, v. 15, N 4.
10. **Kaya A. C., Erdogan F.** Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip.— Intern. J. Fract., 1980, v. 16, N 2.
11. **Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.** Numerical integration methods for the solution of singular integral equations.— Quart. Appl. Math., 1977, v. 35, N 1.
12. **Бойко А. В., Карпенко Л. Н.** О некоторых численных методах решения плоской задачи упругости для тел с трещинами при помощи сингулярных интегральных уравнений.— ПМ, 1980, т. 16, № 8.

Поступила 8/X 1985 г.