

УДК 532.133

Влияние вязкой диссипации на температуру, вязкость и характеристики течения при заполнении канала*

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

Томский государственный университет

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Исследуется нестационарное, неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении плоского канала с учетом диссипации механической энергии, зависимости вязкости от температуры и наличия свободной границы. Приводятся результаты численных расчетов полей температуры, вязкости, динамических и кинематических характеристик потока в зависимости от значений определяющих безразмерных параметров.

Ключевые слова: заполнение, фонтанирующее течение, вязкая диссипация, свободная граница, результаты расчетов.

Введение

Заполнение емкостей жидкостью широко реализуется в отраслях промышленности, где используется метод литья для производства изделий. В частности, при переработке полимерных материалов заполнение емкостей является одним из основных этапов формования изделий методом литья. В основном на этой стадии возможно возникновение воздушных полостей внутри и на границах потока, линий смятия при смыкании складок на свободной поверхности и т.п., приводящих к дефектам формируемого изделия. В целях правильной организации технологии производства и прогнозирования качества изделий необходимо детальное исследование процессов физико-химической гидродинамики, реализуемых при переработке полимерных композиций.

В общем случае течение полимерной жидкости при заполнении емкости характеризуется нестационарностью, неизотермичностью, сложным реологическим поведением, химическими превращениями с различной кинетикой, наличием свободных поверхностей и разнообразием форм заполняемых емкостей [1]. Учет всех перечисленных факторов с использованием их современного физического представления в математической модели для количественного описания процесса чрезвычайно усложняет задачу не только с точки зрения получения решения, но и при формулировке критериальных зависимостей для основных технологических параметров и при их анализе. В этой связи для детального исследования эффектов того или иного фактора в рассматриваемом процессе представляется целесообразным в математической модели ограничиваться учетом выбранного фактора.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 14.В.37.21.0419) и РФФИ (проекты № 12-08-00313а).

За последние десятилетия были выполнены многочисленные исследования процессов физико-химической гидродинамики, реализуемых на стадии заполнения емкостей при формировании изделий из полимерных композиций методом литья. При этом используется как физическое, так и математическое моделирование.

Вначале рассматривались упрощенные математические модели без учета свободной поверхности, позволяющие получать приближенные решения в аналитической форме, либо реализуемые с помощью простых численных алгоритмов [2, 3]. Позднее многие авторы использовали метод конечных разностей и метод конечных элементов для исследования изотермического течения при заполнении емкостей в плоской и осесимметричной постановках; основные результаты представлены в работах [4–6]. Современный уровень исследования для изотермического случая обсуждается в работе [7].

Полимерные композиции являются термопластичными или терморезактивными материалами, реологические характеристики и фазовое состояние которых зависят от температуры. Неизотермичность процесса заполнения емкостей полимерной жидкостью обуславливается диссипацией энергии в потоке, химическими превращениями, условиями теплообмена на границах и начальными условиями. Вязкая диссипация, как механический источник тепла, изменяет температуру среды и, следовательно, ее реологические параметры и степень химического превращения, что, в свою очередь, влияет на кинематические и динамические характеристики течения. Одной из простых моделей, способствующих пониманию эффекта вязкой диссипации, является течение внутри канала. Результаты исследования неизотермических течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей в каналах без свободных границ достаточно полно представлены в обзорах [8–11]. Рассмотрению неньютоновского заполнения с учетом свободной поверхности посвящены работы [12–15].

Целью настоящего исследования является изучение влияния диссипативного разогрева на кинематические и динамические характеристики течения, поле температуры и вязкости при заполнении канала ньютоновской жидкостью с использованием оригинального численного метода, позволяющего аппроксимировать естественные граничные условия на явно выделенной свободной поверхности.

1. Постановка задачи

Рассматривается заполнение вертикального плоского канала несжимаемой жидкостью в поле силы тяжести с учетом диссипативного разогрева, зависимости вязкости от температуры и наличия свободной поверхности. Область решения схематически изображена на рис. 1. Течение описывается уравнениями движения, неразрывности и энергии, которые в безразмерных переменных принимают вид:

$$\text{Re} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2B\mathbf{E}) + \mathbf{W}, \quad (1)$$

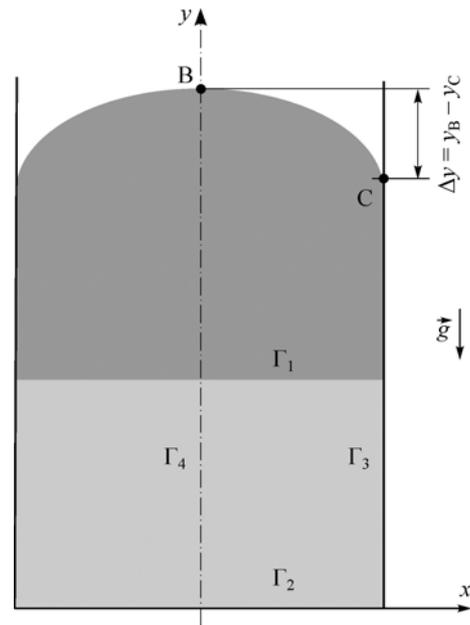
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\text{Pe} \frac{d\theta}{dt} = \Delta\theta + C_1 \cdot 2B \cdot I_2. \quad (3)$$

Зависимость вязкости от температуры определяется выражением, являющимся безразмерным аналогом уравнения Рейнольдса [16],

$$B = e^{-C_2\theta}. \quad (4)$$

Рис. 1. Область решения.



Здесь \mathbf{V} — вектор скорости, p — давление, t — время, $\mathbf{W} = \{0, W\}$, $\theta = (T - T_0) / T_0$ — температура, T, T_0 — размерные температуры жидкости в потоке и на твердой стенке соответственно, $I_2 = e_{ij}e_{ji}$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций \mathbf{E} , $Re = \rho UL / \mu$ — число Рейнольдса, $W = \rho g L^2 / \mu U$ — параметр, характеризующий отношение гравитационных и вязких сил, $Pe = c \rho UL / \lambda$ — число Пекле, $C_1 = \mu U^2 / \lambda T_0$ — параметр, характеризующий соотношение диссипативного разогрева и кондуктивного переноса тепла, $C_2 = \alpha T_0$ — безразмерный параметр экспоненциальной зависимости вязкости от температуры, ρ — плотность, μ — вязкость при температуре T_0 , g — ускорение силы тяжести, α — константа, c — теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности. В качестве масштабов обезразмеривания выбраны следующие величины: полуширина канала L , среднерасходная скорость во входном сечении U , давление $\mu U / L$, вязкость μ .

На свободной поверхности Γ_1 (рис. 1) в качестве граничных условий используются отсутствие касательного напряжения, равенство нормального давления внешнему, которое без ограничения общности можно считать равным нулю, и нулевой тепловой поток. Кроме того, свободная граница подчиняется кинематическому условию. На входной границе Γ_2 задаются распределения скорости и температуры в соответствии с используемой физической постановкой. На твердой стенке Γ_3 выполняется условие прилипания, а температура совпадает с температурой стенки. Используемые граничные условия на твердой стенке широко распространены при исследовании неизотермических течений жидкости, в том числе и при моделировании процессов литья для полимерных сред [10]. На линии симметрии Γ_4 выполняются условия симметрии. Силы поверхностного натяжения считаются пренебрежимо малыми по сравнению с вязкими и не учитываются [5, 7].

Таким образом, граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1: \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0, \quad p = 2B \frac{\partial v_n}{\partial n}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma_2: v_x = 0, \quad v_y = f(x), \quad \theta = \varphi(x), \quad (6)$$

$$\Gamma_3: v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad \theta = 0, \quad (7)$$

$$\Gamma_4: v_x = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где v_n, v_s — нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности соответственно, $f(x), \varphi(x)$ — заданные функции.

Условия (5) записаны в локальной декартовой системе координат, нормально связанной со свободной поверхностью. Движение свободной границы Γ_1 осуществляется в соответствии с кинематическим условием, которое в лагранжевом представлении записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y. \quad (9)$$

В начальный момент времени канал частично заполнен жидкостью и свободная поверхность расположена на достаточном удалении от входной границы Γ_2 , чтобы исключить ее влияние на характер течения в окрестности последней. Начальное поле скорости и температуры соответствуют физической постановке задачи.

2. Метод решения

Для численного решения сформулированной задачи применяется конечно-разностный метод [17], который базируется на использовании метода инвариантов для расчета характеристик течения на свободной поверхности [18] и алгоритма SIMPLE для расчета искомых переменных во внутренних узлах разнесенной сетки [19]. При этом значения скоростей вычисляются с применением экспоненциальной схемы, а для расчета температуры используется противопоточная аппроксимация конвективных слагаемых. Согласно [18], первое из условий (5) записывается совместно с уравнением неразрывности, что позволяет использовать схемы бегущего счета для вычисления составляющих скорости частиц — маркеров на свободной границе. Соответствующие значения давления и температуры вычисляются из разностных аналогов второго и третьего условий из (5) соответственно. Эволюция свободной поверхности определяется из разностных аналогов уравнений (9) с использованием схемы Эйлера. Тестирование методики расчета проводилось на задаче течения жидкости в плоском канале с заданным расходом с учетом диссипативного разогрева и экспоненциальной зависимости вязкости от температуры (4). На входе в канал задавались параболический профиль скорости и нулевая температура, а на выходе — мягкие граничные условия. На твердой стенке выполнялись условия (7). При этом длина канала выбирается достаточной для установления стационарного течения в выходном сечении. Результаты расчетов сравнивались с полуаналитическим решением эквивалентной одномерной задачи [20]. На рис. 2 представлено сравнение распределений скорости и температуры на выходе из канала, полученных численным методом

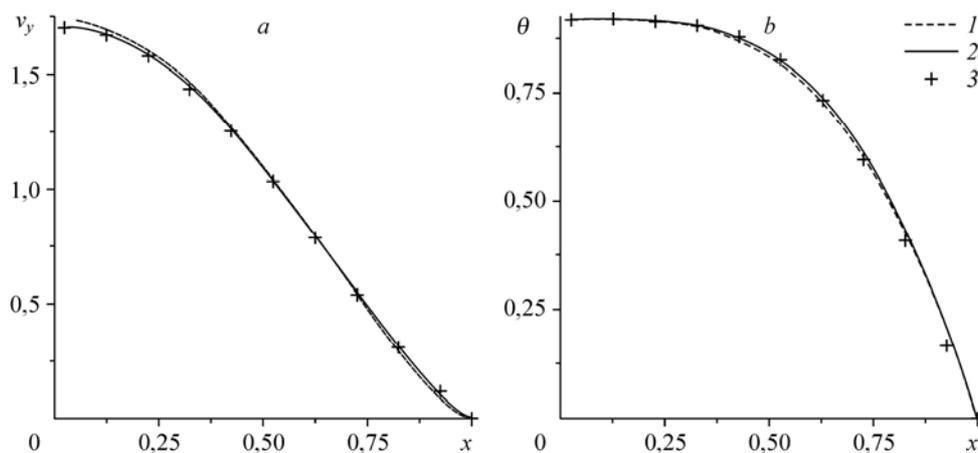
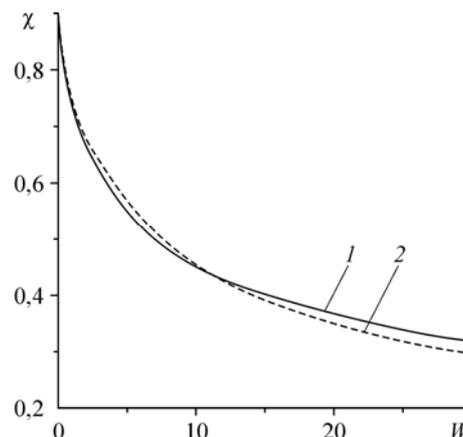


Рис. 2. Профили скорости (a) и температуры (b) в выходном сечении при $Re = 0,001$, $Pe = 1000$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,33$.

Шаг сетки 1/10 (1), 1/20 (2); аналитическое решение (3).

Рис. 3. Зависимость характеристики χ от W для изотермического течения при $Re = 0,01$.

1 — результаты расчетов, 2 — результаты работы [7].



с решением одномерной задачи. Хорошее согласование подтверждает достоверность методики. Кроме того, для тестирования алгоритма расчета задачи при наличии свободной границы проводились параметрические расчеты изотермического заполнения канала. Как известно из работ [5–7], при изотермическом заполнении с постоянным расходом форма свободной поверхности устанавливается и в качестве ее характеристики используется параметр $\chi = \Delta y / L$, показывающий местоположение точки B на линии симметрии относительно точки C на линии трехфазного контакта (рис. 1). Зависимость χ от W при малом числе Рейнольдса представлена на рис. 3. Полученные результаты (кривая 1) сравниваются с данными работы [7] (кривая 2), в которой для численного решения используется метод конечных элементов. Наблюдается хорошее согласование результатов. Проверка аппроксимационной сходимости на квадратных сетках позволяет во всех дальнейших расчетах использовать шаг сетки, равный $1/40$. Максимальное значение шага по времени ограничивается условием Куранта [21]. Ошибка в выполнении закона сохранения массы во всех расчетах не превышает 1 %.

3. Результаты расчетов

Для оценки влияния вязкой диссипации на температуру среды и характеристики течения рассматриваются две физические постановки задачи. Вначале исследуется случай, в котором жидкость поступает в канал с постоянным расходом и температурой, равной температуре стационарного неизотермического потока жидкости в бесконечном канале с учетом диссипации механической энергии и зависимости вязкости от температуры. Граничные условия для скорости на входе и начальное распределение скорости и температуры соответствуют такому течению. При этом значения определяющих параметров должны обеспечивать существование стационарного решения, исключаяющего явление гидродинамического теплового взрыва [22]. Типичное распределение продольной скорости и температуры для стационарного течения представлено на рис. 2.

Интенсивность вязкой диссипации в потоке определяется значением параметра C_1 . Рисунок 4 демонстрирует влияние этого параметра на характеристики течения при прочих равных условиях. Распределения температуры, вязкости, давления и скорости представлены в момент времени $t = 5$.

Исследования изотермического заполнения с постоянным расходом при малых числах Рейнольдса показывают, что формируется квазистационарный режим с установившейся формой свободной поверхности [4–7]. При этом в потоке можно выделить зону одномерного течения на достаточном удалении от свободной границы и область двумерного фонтанирующего течения в ее окрестности. Характер распределения изолиний на рис. 4 показывает, что и в этом случае поток можно разделить на две зоны течения аналогично изотермическому приближению. Размер области двумерного течения увеличивается с ростом параметра C_1 . Наблюдается незначительное увеличение температуры в окрестности свободной поверхности. С уменьшением вязкости интенсивность растекания жидкости к твердым стенкам в окрестности свободной границы растет,

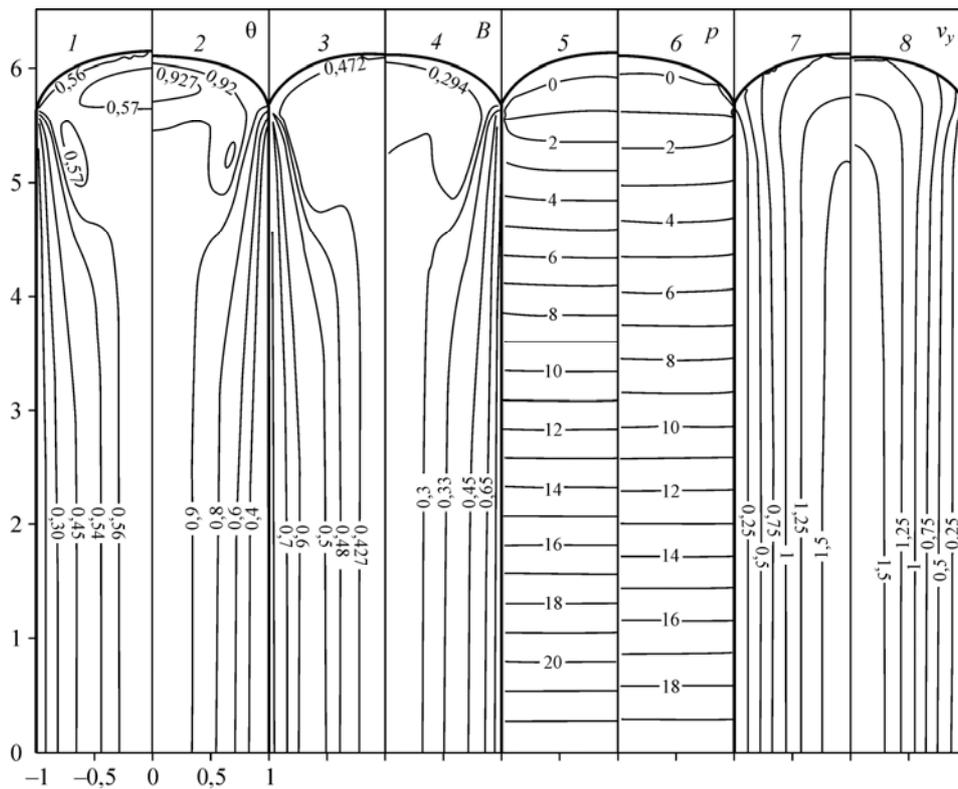


Рис. 4. Изолинии температуры, вязкости, давления и скорости при $Re = 0,01$, $W = 2$, $Pe = 100$, $C_2 = 1,33$.
 $C_1 = 1$ (1, 3, 5, 7), 2 (2, 4, 6, 8).

поэтому значение χ уменьшается с увеличением C_1 . Перепад давления в потоке также падает с ростом C_1 вследствие уменьшения вязкости.

Соотношение конвективного и кондуктивного теплопереноса в потоке характеризуется значением числа Пекле. На рис. 5 представлены распределения температуры, вязкости, давления и скорости при $Re = 1000$, а значения остальных параметров совпадают с таковыми для результатов, представленных на рис. 4. Сравнение данных на рис. 4, 5 показывает уменьшение зоны одномерного течения с ростом числа Пекле и качественное изменение распределения температуры и вязкости. Профили температуры и скорости в сечениях $y = \text{const}$ в момент времени $t = 6$ для разных значений Re представлены на рис. 6, 7 соответственно. Для обоих значений числа Пекле слой жидкости в окрестности линии симметрии имеет практически одинаковую температуру вдоль всего канала, что является следствием малых значений инварианта тензора скоростей деформаций в этой области и слабого вклада кондуктивного теплопереноса при больших значениях Re . Однако в части потока в окрестности твердой стенки с ростом числа Re происходит качественное изменение профиля температуры. Уменьшение зоны одномерного течения и повышение роли конвективного теплопереноса с увеличением значения числа Пекле приводит к усилению влияния свободной границы на распределение температуры и, как следствие, его отклонению от профиля, характерного для одномерного течения в бесконечном канале (рис. 2). С увеличением числа Пекле распределение изотерм в большей степени соответствует кинематике фонтанирующего течения [20]. Профили продольной скорости на рис. 7 демонстрируют совпадение качественного поведения кривых для обоих значений Re и незначительные количественные отличия.

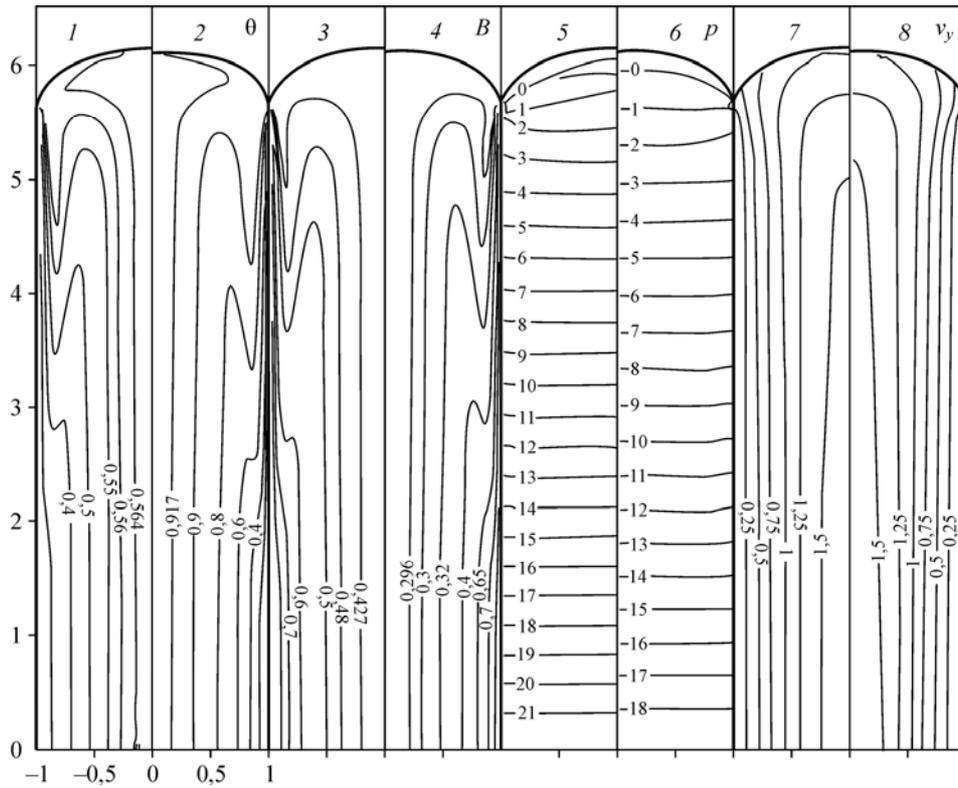


Рис. 5. Изолинии температуры, вязкости, давления и скорости.
 $Re = 0,01$, $W = 2$, $Pe = 1000$, $C_2 = 1,33$, $C_1 = 1$ (1, 3, 5, 7), 2 (2, 4, 6, 8).

Увеличение числа Re до 1 и параметра W до 10 не вносят изменений в качественное поведение характеристик течения, количественные изменения также незначительны.

Наряду с рассмотренной постановкой задачи реализуется математическая модель, в которой на входной границе задается параболический профиль продольной скорости, соответствующий одномерному изотермическому течению, а температура задается равной

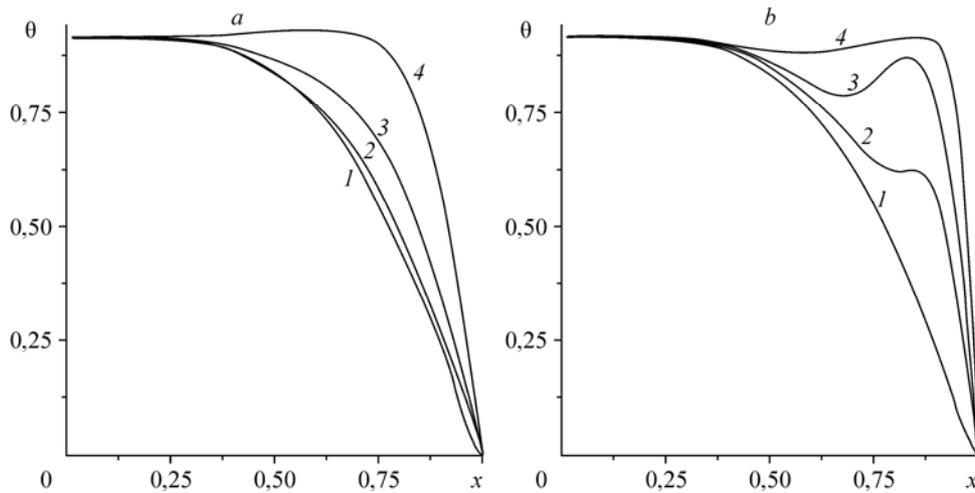


Рис. 6. Распределение температуры в сечениях $y = \text{const}$.
 $Re = 0,01$, $W = 2$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1,33$, $t = 6$; $Pe = 100$ (a), 1000 (b); $y = 0$ (1), 3 (2), 4,5 (3), 6 (4).

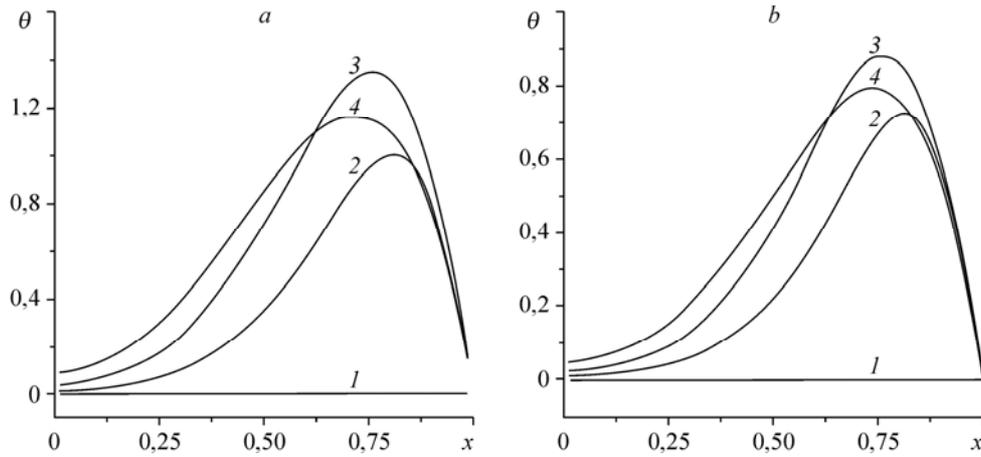


Рис. 9. Распределение температуры в сечениях $y = \text{const}$.

$Re = 0,01, W = 2, Pe = 100, C_2 = 1,33, t = 5; C_1 = 1$ (a), $C_1 = 10$ (b); $y = 0$ (1), 1,5 (2), 3 (3), 4,5 (4).

Соответствующее распределение вязкости приводит к формированию двумерного течения во всей области. При $C_1 = 10$ почти вдвое растет максимальное значение размерной температуры по сравнению с начальной с соответствующим уменьшением вязкости. Профили температуры и скорости в сечениях $y = \text{const}$ в момент времени $t = 5$ для разных значений C_1 , при прочих равных условиях, представлены на рис. 9, 10 соответственно. Для обоих значений C_1 наблюдаются согласования качественного поведения профилей температуры в различных сечениях канала, несмотря на сильное количественное отличие. При этом профили скорости в различных сечениях к данному моменту времени меняются незначительно. Влияние числа Пекле на характер распределения температуры и вязкости в потоке в момент времени $t = 5$ отображено на рис. 11. Усиление конвективной составляющей переноса также проявляется в изменении температуры и вязкости. Таким образом, в рамках данной постановки задачи для выбранных значений определяющих параметров картина течения отличается от таковой, полученной с использованием первой математической модели. Однако если в рамках второй постановки задачи при значениях

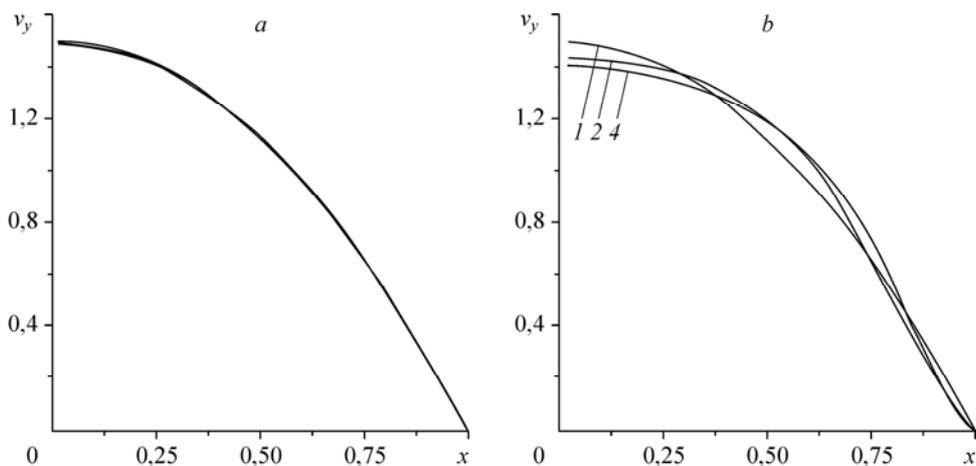


Рис. 10. Распределение продольной скорости в сечениях $y = \text{const}$.

$Re = 0,01, W = 2, Pe = 100, C_2 = 1,33, t = 5, C_1 = 1$ (a), 10 (b); $y = 0$ (1), 1,5 (2), 4,5 (4).

одномерного течения вдали от нее для неизотермического течения, когда начальные распределения скорости и температуры соответствуют стационарному течению в канале. Обсуждается зависимость рассматриваемых характеристик потока от интенсивности диссипации механической энергии, зависимости вязкости от температуры, чисел Рейнольдса и Пекле и числа, характеризующего отношение гравитационных и вязких сил. Показываются особенности формирования характеристик потока для разных начальных и граничных условий на входной границе.

В целом для рассматриваемого гидродинамического процесса демонстрируется сложное взаимодействие между падением вязкости за счет диссипативного разогрева и уменьшением вследствие этого интенсивности диссипации, контролирующим снижением вязкости.

Список литературы

1. Kamal M.R., Isayev A.I., Liu S.-J. Injection molding: technology and fundamentals. Munich: Carl Hanser Verlag, 2009. 950 p.
2. Горнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1977. 464 с.
3. Гадмор З., Горос К. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984. 632 с.
4. Coyle D.J., Blake J.W., Macosco C.W. The kinematics of fountain flow in mold filling // AICHE J. 1987. Vol. 33, No. 7. P. 1168–1177.
5. Mavridis H. Finite element studies in injection mold filling // Ph.D. Thesis, McMaster Univ., Hamilton, Ont, Canada. 1988. 182 p.
6. Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А. Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 229 с.
7. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: the effect of various fluid mechanics parameters // AICHE J. 2010. Vol. 56, No. 5. P. 1147–1162.
8. Столин А.М., Малкин А.Я., Мержанов А.Г. Неизотермические процессы и методы исследования в химии и механике полимеров // Успехи химии. 1979. Т. XLVIII, вып. 8. С. 1492–1517.
9. Баранов А.В. Неизотермическое течение реологически сложных сред в условиях химических превращений // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 384–399.
10. Hassan H., Regnier N., Pujos C., Defaye G. Effect of viscous dissipation on the temperature of the polymer during injection molding filling // Polym. Eng. Sci. 2008. Vol. 48, No. 6. P. 1199–1206.
11. PrimoBenitez-Rangel J., Dominguez-Gonzalez A., Herrera-Ruiz G., Delgado-Rosas M. Filling process in injection mold: a review // Polymer-Plastics Technology and Engng. 2007. Vol. 46, No. 7. P. 721–727.
12. Липанов А.М., Альес М.Ю., Константинов Ю.Н. Численное моделирование ползущих течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью // Мат. моделирование. 1993. Т. 5, № 7. С. 3–9.
13. Nguyen-Chung T., Mennig G. Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling // Rheol. Acta. 2001. Vol. 40, No. 1. P. 67–73.
14. Otmani R.E., Zinet M., Boutaous M., Benhadid H. Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in injection molding process: role of the mold-polymer interface // J. Appl. Polym. Sci. 2011. Vol. 121, No. 3. P. 1579–1592.
15. Wang W., Li X., Xianhong H. Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding // Polym. Eng. Sci. 2012. Vol. 52, No. 1. P. 42–51.
16. Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П., Глот И.О., Шакиров Н.В. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотичная динамика, 2008. 264 с.
17. Якутенок В.А., Борзенко Е.И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе метода SIMPLE // Мат. моделирование. 2007. Т. 19, № 3. С. 52–58.
18. Васенин И.М., Нефедов А.П., Шрагер Г.Р. Метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СОАН, 1985. Т. 16, № 6. С. 28–43.
19. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
20. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении плоского канала // Вестн. ТГУ. Математика и механика. 2012. Т. 18, № 2. С. 80–87.
21. Roache P.V. Fundamental of computational fluid dynamics. New Mexico: Hermosa Publ., 1998. 648 p.
22. Каганов С.А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // Прикладная механика и техническая физика. 1962. № 3. С. 96–99.

*Статья поступила в редакцию 13 марта 2013 г.,
после доработки — 14 мая 2013 г.*