УДК 51:101.8
DOI:
10.15372/PS20180404

В.М. Резников*

К ВОПРОСУ О ФИЛОСОФСКИХ ПРЕДПОСЫЛКАХ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ БАТАЛИЯХ

На примере критики Колмогорова математиками, сторонниками субъективистской интерпретации теории вероятностей, показана роль философских предпосылок в научном исследовании. Критика была направлена на условие о близости вероятности и частот. По мнению оппонентов, оно является заключением теоремы Бернулли и поэтому избыточно. В действительности критика направлена на основания частотной интерпретации, так как она неприемлема для субъективистов, а Колмогоров в контексте приложений следовал Мизесу, создателю частотной интерпретации. Критика Колмогорова основана на теореме Бернулли. Показано, что в частотной интерпретации условие Колмогорова формализуется на основе устойчивости частот и для ее верификации теорема не нужна. Теорема подходит для введения требования Колмогорова в математику, однако она применима, если имеет место устойчивость частот. В любом случае, в контексте частотной интерпретации, критика субъективистов бьет мимо цели.

Ключевые слова: частотная интерпретация; субъективистская интерпретация; теорема Бернулли; близость вероятности и частот; устойчивость частот; принцип Курно; Колмогоров; Мизес.

V.M. Reznikov

TOWADS PHILOSOPHICAL PRECONDITIONS IN MATHEMATICAL BATTLES

By analyzing the critique of Kolmogorov by mathematicians, followers of the subjective interpretation of probability theory I show the importance of philosophical preconditions in scientific research. The critique was targeted at the condition of proximity of probability and frequencies, as according to opponents, the condition coincides with the conclusion of Bernoulli theorem, and therefore it was superfluous. In reality, the critique was directed at the foundations of frequency interpretation, because it was unacceptable for

* Публикуется в авторской редакции.

subjectivists, but in the context of applications, the views of Kolmogorov were closely related to those of Mises, the creator of frequency interpretation. The critique of Kolmogorov's condition was based on the Bernoulli theorem. I show that the condition is formalized on the basis of stability of frequencies, and doesn't require the theorem for its verification. The theorem is suitable for an introduction of the condition in the field of mathematics; however, it applies only when the stability of frequencies obtains. In any case, in the context of frequency interpretation, the critique misses the target.

Keywords: frequency interpretation, subjective interpretation, Bernoulli theorem, proximity of probability and frequencies, stability of frequencies, Cournot principle, Kolmogorov, Mises.

К настоящему времени не существует однозначных оценок о роли и значимости философских концепций в научных исследованиях. С одной стороны, современные исследователи в различных областях знания отмечают значение классических философских идей – от античной греческой философии до Канта, так как, по мнению ученых, философские концепции этого периода оказывают положительное влияние на создаваемые ими теории [5]. С другой стороны, в известных работах представителей науки не отмечается значимость исследований современных философов, и более того, в некоторых публикациях отрицается положительное влияние современных философских разработок на науку. Так, известный математик Шейфер высказывался о несомненном положительном воздействии истории и философии науки на развитие знания в математике, но при этом подчеркивал, что современные философы не оказывают какого-либо влияния на науку своего времени. Критика Шейфера связана с тем, что в области философии стохастической математики было написано несколько десятков монографий, однако во всех них, за исключением двух, исследовались проблемы классической теории вероятностей, но в большей степени анализировалось не само научное знание, а вопросы влияния культуры на развитие теории вероятностей. В других двух книгах рассматривались проблемы, относящиеся к началу современной теории вероятностей, однако не исследовались актуальные проблемы современной стохастической математики [4, 6]. Необходимо отметить, что, несмотря на справедливость критики Шейфера, в ней не учитывается интенсивное использование философских концепций в современной науке. Между прочим, Шейфер, критик философии науки, в своей работе, посвященной созданию обобщенной интерпретации теории вероятностей, использовал понятие причинного отношения [7]. И это неслучайно, так как в науке, и в частности, в медицине всегда были популярны идеи причинных связей и механизмов, а в биологии популярны классификации на основе причинных отношений, кроме того, причинные отношения используются при построении экспертных систем. Не только понятие причинного отношения используется в науке, так же в науке часто используется идея онтологии. Заметим, что трудно точно определить влияние философских идей на науку, так как они часто используются неявно. Например, философские концепции использовались неявно в известных математических баталиях, связанных с определением роли вероятностных интерпретаций в науке и в частности в математике. В математических дискуссиях, связанных с использованием математики, часто критикуются формальные и технические несовершенства в работах оппонентов, однако, при этом основания критики, напрямую не указываются. Такого рода критика имела место по отношению к условиям Колмогорова применения теории вероятностей. Прежде чем обратиться к анализу критических замечаний, предварительно остановимся на условиях Колмогорова. Эти требования были впервые описаны в его книге, ставшей знаменитой, посвященной аксиоматизации теории вероятностей [1]. Сформулируем кратко схему применения теории вероятностей по Колмогорову.

1) Определяются условия проведения экспериментов, называемые комплексом условий S, допускающим неограниченную реализуемость.

2) Описывается круг изучаемых событий, связанных, например, с бросанием монеты, и определяются элементарные исходы такого эксперимента, в данном случае герб и решка. Формулируются условия проведения реального эксперимента, состоящего для примера, в бросании двух монет одновременно, определяется изучаемое событие, состоящее в повторении исходов, и описываются элементарные исходы этого эксперимента – РР, РГ, ГР, ГГ.

3) Определяется связь изучаемых событий с элементарными событиями, реализация элементарного события означает реализацию события.

Последний пункт описываемой схемы является значимым для нашей статьи, поэтому при его изложении, мы в точности следуем Колмогорову:

«4) Предполагается, что при реализации условий S, могут наступить события *A*, которым поставлены в соответствие действительные числа *P(A),* которые обладают следующими свойствами:

A. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число n раз и если при этом через *m* обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение *m/n* будет мало отличаться от *P(A)*.

B. Если *P(A)* очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий S событие *A* не будет иметь место» [Там же, с. 12-13].

Свойства A и B, которыми по А.Н. Колмогорову должны обладать изучаемые вероятности событий, мы будем называть требованиями к вероятностям, в контексте применений теории вероятностей по Колмогорову. Первое требование является неформальным вариантом асимптотического определения вероятности у Мизеса [3]. Второе оказывается неформальным описанием принципа Курно [2]. Антуан Курно – это разносторонний исследователь, результаты которого получили признание во многих областях науки и философии. Так, он один из создателей математической экономики, кроме того, открыл геометрическую вероятность и предложил принцип, который осуществляет связь математики с миром опыта, так называемый принцип Курно. Известны две формы этого принципа. Принцип Курно в сильной форме и в слабой форме. Принцип Курно в слабой форме утверждает, что маловероятное событие при большом числе испытаний будет происходить редко. Принцип в слабой форме является корректным, однако в приложениях математической статистики используется принцип в сильной форме. Принцип Курно в сильной форме запрещает появление маловероятного события в первом испытании. Требования Колмогорова представляют интерес для теории вероятностей и математической статистики. Так, условие A значимо для частотной интерпретации теории вероятностей и различных подходов в математической статистике к оцениванию вероятностей на основе частот. Условие B является составной частью раздела проверки статистических гипотез.

Теперь перейдем к основаниям критики условий Колмогорова. Известно, что математики Гадамер, Борель, Фреше, Леви критиковали требование A, так как они считали, что оно является избыточным, совпадая с заключением теоремы Бернулли, а при учете требования B первое условие Колмогорова оказывается верным для выборки произвольного объема данных. Какова была реальная мотивация у оппонентов для критики требований Колмогорова? Несомненно, что Колмогорова критиковали по единственной причине, так как он отмечал, что: «В изложении необходимых предпосылок для приложимости теории вероятностей к миру действительных событий, автор в значительной степени, следует выводам Мизеса» [1, с. 12]. Критический аргумент был направлен на требование A, и он, по сути, состоял, в том, что это требование является избыточным, так как совпадает с заключением теоремы Бернулли. Если говорить более точно, то критики утверждали, что требование A получается на основе теоремы и требования B.

Так как требование A было задано неформально, то возникает вопрос, почему критики решили, что формальное описание требования оказывается заключением теоремы Бернулли? Прежде всего теорема обеспечивает теоретическое описание близости частот и вероятности, и тем самым условие Колмогорова оказывается в теоретическом поле. Однако существует и другая причина, специально значимая для субъективистов. Она состоит в том, что, по их мнению, на основе теоремы осуществляется объективизация субъективно назначенных вероятностей. Почему вызывает сомнение, что требование Колмогорова связано с теоремой Бернулли и является ее заключением? Сомнение возникает потому, что теорема Бернулли нужна субъективистам с целью объективации индивидуальных степеней уверенности. Но так ли эта теорема значима для требований Колмогорова? Предположим, что можно считать Колмогорова сторонником частотной интерпретации Мизеса. Тогда формальным воплощением требования Колмогорова является не сходимость по вероятности, в духе теоремы Бернулли, а другая сходимость, которая изучается в математическом анализе и была использована Мизесом в его определении вероятности. Эта обычная сходимость является более сильной, чем сходимость по вероятности, тогда в некотором смысле требование критиков оказывается избыточным, так как если имеет место обычная сходимость, то из нее следует сходимость по вероятности. Известно, что Колмогоров считал, для приложений адекватна финитная теория вероятностей, поэтому следующее формальное описание требования Колмогорова, представляется адекватным:

$$|P(A)\text{-}m/n| \le \varepsilon \ (1)$$

Здесь P(A) – вероятность события A, m/n – частота события A, ε – точность вычислений. Частотная интерпретация является эмпирической концепцией, а в эмпирических концепциях теоретические величины заранее неизвестны. По отношению к теореме Бернулли это означает, что неизвестно, существует ли теоретическая вероятность, о которой идет речь в теореме, и является ли она постоянной. Часто полагают, что для многих процессов, которые происходят с одной и той же вероятностью, имеет место устойчивость частот. Другими словами, условие (1) оказывается следствием устойчивости частот, а устойчивость частот – это первичная онтологическая характеристика изучаемых данных, которая не может быть получена на основе математики. Если близость вероятности и частот описывается с помощью первого условия, тогда для его верификации не нужна теорема Бернулли. Однако Колмогоров был прежде всего работающим математиком, а не представителем одной интерпретации, и вполне допустимо считать, что его условие A формализуется с помощью заключения теоремы. Отметим, что для теоремы Бернулли вполне естественной представляется именно частотная интерпретация, ведь в ней идет речь о вероятности события и о его частотных характеристиках. Поэтому применение теоремы в частотном подходе предполагает реальное определение частотных характеристик, а использование теоремы на основе субъективных оценок частот и принципа индифферентности, с точки зрения частотного подхода, не является корректным. Таким образом, либо теорема Бернулли не нужна для верификации первого требования, либо она должна быть применена в рамках частотного подхода. Известно, что Колмогоров не был в полной мере сторонником частотной интерпретации, однако вполне очевидно, что в той или иной степени знаменитый математик интересовался частотной интерпретацией, поэтому его требование представляется корректным в частотной интерпретации.

В отличие от нашего подхода, у Шейфера и Вовка всегда предполагается, что требование Колмогорова является заключением теоремы Бернулли, и ими предложены различные подходы, объясняющие использование «зависимого» требования Колмогоровым [8, 9]. В одном подходе использование «зависимого» условия объясняется тем, что Колмогоров не обратил внимания на эту зависимость. Такое объяснение «зависимого» требования основано на том основании, что Колмогоров никогда не отвечал на критику. По-нашему мнению, Колмогоров не ответил на критику по сугубо прагматическим соображениям. Во-первых, дискуссии оказываются плодотворными, когда у диспутантов близкие позиции, а у Колмогорова и его критиков были противоположные оценки об адекватности вероятностных интерпретаций в контексте приложений, поэтому спор не имел особого смысла. Во-вторых, Колмогоров был во Франции, у него сложились творческие отношения с Леви и другими французскими математиками, поэтому полемика с ними не являлась перспективной. Мы полагаем, что Колмогоров поступил мудро, не вступив в полемику. Об этом свидетельствуют два обстоятельства:

1) Как отмечают Шейфер и Вовк, известный математик Фреше, один из критиков Колмогорова, в приветственном слове – математическому коллоквиуму в Женеве, в 1938 году, первым отметил успешную аксиоматизацию теории вероятностей Колмогоровым [9, p. 70].

2) В сохранившемся письме Колмогорова, которое было написано Фреше, отмечается: «Вы также правы в приписывании мне мнения, что формальная аксиоматизация должна быть дополнена анализом ее реального смысла» [The same, p. 71]. Другое объяснение Шейфера и Вовка – использование зависимого условия основано на том, что это условие демонстрирует приверженность Колмогорова частотной интерпретации.

По-нашему мнению, это объяснение является сильным, так как частотная интерпретация интенсивно используется в науке. Критиками частотной интерпретации Мизеса оказываются чистые математики, философы, которые не являлись сторонниками частотной интерпретации теории вероятностей. Однако частотная интерпретация высоко оценивается специалистами в прикладной математике.

Другое объяснение основано на том, что условия применения теории вероятностей приведены сразу после аксиом, поэтому теорема еще не была выведена, и тогда условие не является зависимым. Очевидно, что такое объяснение не является удовлетворительным. Мы полагаем, что близость вероятности и частот в требовании A формализуется с помощью первого неравенства, которое не зависит от теоремы. Самое сильное объяснение Шейфера и Вовка основано на проверке независимости. Проверка независимости требует значительных вычислительных ресурсов. Там, где неприменима математика для верификации теоретической близости, значима эмпирическая близость, описываемая первым неравенством. Таким образом, по отношению к использованию теоремы Бернулли для верификации близости вероятности и частотных оценок можно сформулировать три ситуации. В первом случае теорема не нужна. Во втором она применяется в контексте требований, предъявляемых к частотным интерпретациям. В третьем варианте, когда много данных, ее применение ухудшает качество моделей, поэтому не имеет смысла ее использовать. В любом из этих случаев, в рамках частотного подхода, требование Колмогорова оказывается нефальсифицируемым. Более того, описание близости на основе первого неравенства оказывается корректным и в том случае, когда результаты испытаний не являются независимыми, и для их исследований неприменима теорема Бернулли.

В частотной и субъективистских интерпретациях оказываются различные требования к использованию математического аппарата, в частности различные требования к применению теоремы Бернулли, которая использовалась субъективистами для критики зависимого характера требования Колмогорова. Так как критика субъективистов не учитывает особенности частотной интерпретации, поэтому она не оказывается состоятельной в рамках частотного подхода. На первый взгляд, теорема Бернулли и принцип Курно, на основе которых субъективисты критиковали условия Колмогорова, имеют понятную частотную интерпретацию. Однако корректное применение теоремы в частотной традиции предполагает предварительное оценивание теоретической вероятности по частотным характеристикам, верификацию устойчивости частотных оценок, кроме того требуется проверка независимости данных. В свою очередь принцип Курно апеллирует к невозможности реализации в единственном эксперименте события с ничтожной вероятностью, однако для того чтобы определить вероятность такого события, необходимы многократные испытания. Трудности корректного применения теоремы Бернулли и принципа Курно в реальных испытаниях делают актуальными проведение исследования об адекватности теоремы Бернулли и принципа Курно реальным приложениям.

Литература

1. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

2. *Курно А.* Основы теории шансов и вероятностей. – М: Наука, 1970.

3. *Мизес Р*. Вероятность и статистика. М.- Л: Гостехиздат, 1930.

4. *Hacking I.* Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.

5. *Jorge J.* Can philosophy help to innovate and develop scientific theory? https://www.researchgate.net/post/Can_philosophy_help_to_innovate_and_develop_scientific_theory (date of access: 08.11.2018)

6. *Plato J.* Creating modern probability. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

7. *Shafer G.* The unity and diversity of probability // Statistical Science. – 1990. – Vol. 5, No. 4. P. 435-462.

8. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It’s Only a Game! – N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001.

9. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov’s Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, № 1. P. 70–98.

References

1. *Kolmogorov A.N.* (1974) Osnovnye ponjatija teorii verojatnostey [Foundations of the theory of probability]. – M.: Nauka. (In Russ.).

2. *Kurno A.* (1970) Osnovy teorii shansov i verojatnostey [Exposition of the theory of chances and probabilities]. – M.: Nauka. (In Russ.)

3. *Mises R*. (1930) Veroyanost i statistika [Probability and statistics]. – M-L: Gostekhizdat. (In Russ.).

4. *Hacking I.* (1965) Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press.

5. *Jorge J.* (2015) Can philosophy help to innovate and develop scientific theory? https://www.researchgate.net/post/Can_philosophy_help_to_innovate_and_develop_scientific_theory (date of access: 08.11.2018)

6. *Plato J.* (1994) Creating modern probability. Cambridge: Cambridge University Press.

7. *Shafer G.* (1990) The unity and diversity of probability // Statistical Science. Vol. 5, No. 4, 435-462.

8. *Shafer G., Vovk V.* (2001) Probability and Finance It’s Only a Game! – N.Y.: A Wiley- Interscience Publication.

9. *Shafer G., Vovk V.* (2006) The Sources of Kolmogorov’s Grundbegriffe // Statistical Science. Vol. 21, № 1, 70-98.

Информация об авторе

Резников Владимир Моисеевич – кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8); доцент кафедры логики и методологии науки Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, e-mail: mathphil1976@gmail.com).

Information about the author

Reznikov Vladimir Moiseevich – Candidate of Sciences (Philosophy), Associate Professor, Senior Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia); Associate Professor at the Department of Logic and Methodology of Science, Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: mathphil1976@gmail.com).

Дата поступления 15.11.218