6. **Биченков Е. И., Войтенко А. Е. и др.** Схема расчета и включения на нагрузку плоских взрывомагнитных генераторов.— ПМТФ, 1973, № 2.
7. **Биченков Е. И., Лобанов В. А.** Предельные токи при сжатии магнитного потока между плоскими и коаксиальными проводниками.— ПМТФ, 1975, № 5.
8. **Герасимов Л. С.** Согласование взрывомагнитного генератора с индуктивной нагрузкой.— ЖТФ, 1974, т. 44, вып. 9.
9. **Pavlovskii A. I., Lyudaev R. Z., Pljashkevich L. N.** Transformer energy output magnetic cumulation generators.— In: Megagaus Physics and Technology/Ed. P. J. Turchi. N. Y.— L.: Plenum Press, 1980.
10. **Дивнов И. И., Зотов Н. И. и др.** Поведение цилиндрических оболочек при динамических нагрузках, создаваемых сильным магнитным полем. ВИНИТИ, 1977, деп. № 2414.
11. **Дивнов И. И., Зотов Н. И. и др.** Взрывомагнитный генератор с плазменной нагрузкой.— ПМТФ, 1979, № 6.
12. **Владимиров В. В., Дивнов И. И. и др.** Магнитоплазменный компрессор с взрывомагнитным генератором энергии.— ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 7.
13. **Khristoforov B. D., Divnov I. I., Zotov N. I.** Experimental research of explosive-driven magnetic generator performance with resistive-inductive load.— In: Megagaus Physics and Technology/Ed. P. J. Turchi. N. Y.— L.: Plenum Press, 1980.
14. **Савин И. В., Соколов В. А., Дивнов И. И., Зотов Н. И.** Цифровая обработка осциллограмм.— В сб.: Автоматизация экспериментальных исследований. Куйбышев, 1980.

УДК 532.516

О ВРАЩЕНИИ ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. И. Хасанов

(Новосибирск)

1. Введение. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство вне бесконечного цилиндра радиуса a. Рассмотрим установившееся вращательно-симметричное движение жидкости, вызванное вращением цилиндра вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Введем цилиндрические координаты с осью z, совпадающей с осью цилиндра. Известно, что уравнения Навье — Стокса в этих координатах допускают решения вида $u = f(r)$, $v = g(r)$, $w = -zh(r)$, $p = K\rho z^2/2 + \varphi(r)$, где u, v, w — компоненты скорости; p — давление; ρ — плотность жидкости; K — некоторая постоянная, а функции f, g, h, φ определяются из уравнений

$$\nu(f''' + 2f''/r - f'/r^2 + f/r^3) - ff'' + f'^2 + ff'/r + 2f^2/r^2 = K; \tag{1.1}$$

$$\nu(g'' + g'/r - g/r^2) - f(g' + g/r) = 0; \tag{1.2}$$

$$h - f' - f/r = 0; \tag{1.3}$$

$$\varphi' - \nu(f'' + f'/r - f/r^2) + ff' - g^2/r = 0. \tag{1.4}$$

Условия прилипания на цилиндре требуют, чтобы

$$f(a) = 0,\ g(a) = \omega a,\ h(a) = 0. \tag{1.5}$$

Равенства (1.3), (1.5) дают краевые условия для уравнения (1.1) в виде

$$f(a) = f'(a) = 0. \tag{1.6}$$

Если решение задачи (1.1), (1.6) известно, то функции φ, g, h находятся из (1.2) — (1.4) с помощью квадратур. Заметим, что уравнение (1.2) имеет решение $g = \omega a^2/r$, которому при $K = 0$ и $f = 0$ соответствует поле скоростей и давлений, согласованное с условиями прилипания

$$u = 0,\ v = \omega a^2/r,\ w = 0,\ p = -\rho\omega a^4/2r^2 + \text{const}. \tag{1.7}$$

Данная работа посвящена доказательству существования решений задачи (1.1) — (1.6), отличных от (1.7), и выяснению поведения этих решений при $\nu \to 0$.

2. Обсуждение условий на бесконечности. Так как рассмотрение ведется в бесконечной области, то для определения решений задачи (1.1), (1.6) необходимо поставить условия на бесконечности.

Положим в уравнении (1.1) $K = 0$ и потребуем, чтобы

$$fr \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{2.1}$$

Тогда краевая задача (1.1), (1.6), (2.1) имеет единственное решение $f \equiv 0$.

Покажем это. Если сделать замену $u = rf(r)$, то из (1.1), (1.6), (2.1) получается следующая краевая задача:

$$\nu(u''' + u'/r^2 - u''/r) - uu''/r + u'^2/r + uu'/r^2 = 0,$$
$$u(a) = u'(a) = 0, \; u \to 0, \; r \to \infty.$$

Можно заметить, что $(\nu(u'' - u'/r) - uu'/r)' = -2u'^2/r \leqslant 0$, откуда получается неравенство

$$\nu(u'' - u'/r) - uu'/r \leqslant \nu u''(a). \tag{2.2}$$

При $u''(a) \leqslant 0$ из (2.2) с учетом $u'(a) = 0$ получаем $u'(r) \leqslant 0$, откуда следует требуемое $u \equiv 0$. При $u''(a) > 0$ либо $u'(r) \geqslant 0$ для любого $r \geqslant a$, либо существует $r_0 > a$ такое, что $u'(r_0) = 0$, $u''(r_0) < 0$ и $u'(r) \geqslant 0$ для $a \leqslant r \leqslant r_0$. Во втором случае для $r \geqslant r_0$ выполняется неравенство

$$\nu(u'' - u'/r) - uu'/r \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Интегрирование (2.3) с учетом $u'(r_0) = 0$ дает $u'(r) \leqslant 0$ для $r \geqslant r_0$. С другой стороны, $u \to 0$ при $r \to \infty$, поэтому $u' \to 0$ при $r \to \infty$ и $u \geqslant 0$ при $r \geqslant r_0$. Из неравенства (2.3) следует $\nu u'' \leqslant uu' + \nu u'/r \leqslant 0$ на интервале (r_0, ∞), что означает $u'(r) \equiv 0$ на том же интервале в силу краевых условий для $u'(r)$. Это противоречит выбору точки r_0, откуда приходим к заключению о знакоопределенности $u'(r)$ на всем интервале (a, ∞), поэтому $u \equiv 0$, и случай $u''(a) > 0$ не реализуется.

Пусть в уравнении (1.1) $K > 0$. Тогда задача (1.1), (1.6), (2.1) не имеет решений. Действительно, в этом случае неравенство (2.2) остается в силе. Поэтому эта задача не может иметь никакого другого решения, кроме тривиального $f \equiv 0$. Но $f \equiv 0$ не является решением при $K \neq 0$.

В случае $K < 0$ покажем существование решений (1.1), (1.6), удовлетворяющих условию

$$f' \to -c \text{ при } r \to \infty, \tag{2.4}$$

где $c = \sqrt{K/4}$.

3. Теорема существования. Доказательство существования решения краевой задачи (1.1), (1.6), (2.4) опирается на лемму о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Дадим определение, необходимое для формулировки леммы.

Определение 1. Пусть y, G суть n-мерные векторы и функция $G(t, y)$ непрерывна в открытом множестве Ω евклидова пространства размерности $n + 1$. Пусть Ω_0 — открытое подмножество Ω. Обозначим через $\partial\Omega_0$ и $\overline{\Omega}_0$ соответственно границу и замыкание множества. Тогда $(t_0, y_0) \in \partial\Omega_0 \cap \Omega$ называется точкой выхода (или входа) для множества Ω_0 по отношению к системе

$$dy/dt = G(t, y), \tag{3.1}$$

если для каждого решения $y(t)$ этой системы, удовлетворяющей условию $y(t_0) = y_0$, существует $\delta > 0$ такое, что $(t, y(t)) \in \Omega_0$ для $t_0 - \delta < t < t_0$ $(t_0 < t < t_0 + \delta)$. Если, кроме того, $(t, y(t)) \notin \overline{\Omega}_0$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$ $(t_0 - \delta < t < t_0)$, то точка (t_0, y_0) называется точкой строгого выхода (входа).

Лемма 1. Пусть в условиях определения 1 функция $G(t, y)$ такова, что задача Коши для системы (3.1) имеет единственное решение, а множество Ω_0 таково, что все точки выхода являются точками строгого выхода и множество Ω_e точек выхода не связано. Обозначим через Ω_i множество точек входа для Ω_0, S — такое связное подмножество в $\Omega_0 \cup \Omega_e \cup \Omega_i$, что $S \cap (\Omega_0 \cup \Omega_i)$ содержит 2 точки (t_1, y_1) и (t_2, y_2), для которых решения системы (3.1), проходящие через (t_j, y_j) при $j = 1, 2$, покидают Ω_0 с ростом t в точках, принадлежащих различным связным компонентам множества Ω_0. Тогда найдется, по крайней мере, одна точка $(t_0, y_0) \in S \cap (\Omega_0 \cup \Omega_i)$ такая, что решение $y_0(t)$ системы (3.1), проходящее через (t_0, y_0), остается в Ω_e на своем правом максимальном интервале существования.

Переходим к доказательству разрешимости сформулированной задачи. Путем замены

$$t = r, \quad y_1 = -f, \quad y_2 = y_1' + r^{-1} y_1, \quad y_3 = y_2' \tag{3.2}$$

уравнение (1.1) сведем к системе уравнений первого порядка

$$dy_1/dt = y_2 - y_1/t, \quad dy_2/dt = y_3, \quad dy_3/dt = -y_3/t + y_2^2 - y_1 y_3 - 4c^2. \tag{3.3}$$

Краевые условия имеют вид

$$y_1(a) = y_2(a) = 0, \; y_2 \to 2c \text{ при } t \to \infty.$$

Положим

$$\Omega_0 = \{(t, y): t > a, \; y_1 \text{ произвольно}, \; 0 < y_2 < 2c, \; y_3 > 0\},$$
$$\Omega^1 = \{(t, y) : t > a, \; y_1 \text{ произвольно}, \; 0 < y_2 < 2c, \; y_3 = 0\},$$
$$\Omega^2 = \{(t, y) : t > a, \; y_1 \text{ произвольно}, \; y_2 = 2c, \; y_3 > 0\},$$
$$\Omega^3 = \{(t, y) : t > a, \; y_1 \text{ произвольно}, \; y_2 = 2c, \; y_3 = 0\},$$
$$\Omega_i = \{(t, y) : t > a, \; y_1 \text{ произвольно}, \; y_2 = 0, \; y_3 > 0\}.$$

Множество Ω_0 открыто, и точки входа в Ω_0 образуют множество Ω_i. Для применения сформулированной выше леммы воспользуемся тем, что система (3.3) имеет решение: $y_1 = cr + \alpha r^{-1}$, $y_2 = 2c$, $y_3 = 0$, где α произвольно. Это решение соответствует точкам из Ω^3, и поэтому они не являются ни точками входа, ни точками выхода. Множество точек выхода из Ω_0 совпадает с $\Omega^1 \cup \Omega^2$, так как на Ω^1 $y_3' < 0$, а на Ω^2 $y_2' = y_3 > 0$.

Множество $\Omega_e = \Omega^1 \cup \Omega^2$ оказывается несвязным. Обозначим через S связное подмножество $\Omega_0 \cup \Omega_i$, определяемое как $S = \{t = a, (0, 0, \gamma) = y\}$, где $\gamma > 0$.

Пусть $y_\gamma(t)$ — решение системы (3.3), проходящее через точку $(t, y) = (a, 0, 0, \gamma)$. Из третьего уравнения системы (3.3) следует, что $y_3'(a) < -4c^2$, поэтому $y_3'(t) < -2c^2$ для $a \leqslant t \leqslant a + \delta$, $\delta > 0$. Выбирая $\gamma < \min(2c^2\delta, 2c/\delta)$, получим $y_3(a + \delta) \leqslant \gamma - 2c^2\delta < 0$, в то время как $y_2(t) < \gamma(t - a) < \gamma\delta < 2c$, так как $y_2' = y_3 < \gamma$, а это означает, что при некотором $t_1 (a \leqslant t_1 \leqslant a + \delta)$ кривая $(t, y_\gamma(t))$ покидает Ω_0 в точке из Ω^1.

Третье уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\nu (t y_3)' = (-t y_1 y_2)' + 2t y_2^2 - 4c^2 t. \tag{3.4}$$

Так как $2ty_2^2 \geqslant 0$, оценивая снизу правую часть равенства (3.4), интегрируя вдоль кривой $(t, y_\gamma(t))$, получим $\nu t y_3 \geqslant \nu a \gamma + 2c^2a^2 - 2t^2c^2 - t y_1 y_2$. Зафиксировав $t = T$ и выбирая γ достаточно большим, можно добиться, чтобы $y_3 \geqslant a\gamma/2 > 0$ на интервале $a \leqslant t \leqslant T$ и чтобы $y_2(T) \geqslant a\gamma T/2 > 2c$. Итак, кривая $(t, y_\gamma(t))$ выходит из Ω_0 в точке, где $y_2 = 2c$.

По лемме 1 найдется $\gamma = \gamma_0 > 0$ такое, что решение $y_{\gamma_0}(t)$ остается в Ω_0 на своем правом максимальном интервале существования. Так как $0 \leqslant y_2 \leqslant 2c$, то этот интервал совпадает с полупрямой $t \geqslant a$. Покажем, что $y_2 \to 2c$ при $t \to \infty$.

Так как из $y_2 > 0$ при $t > a$ следует, что $y_1 > 0$ при $t > a$ (первое уравнение (3.3)), то $y_3 > 0$ и $y_2 < 2c$ дают $y_3' < 0$. Поэтому существует предел $y_3(t)$ при $t \to \infty$, равный нулю из-за ограниченности y_2. Значит, $y_2 \to 2c$ при $t \to \infty$ (в противном случае $y_3' < -\text{const} < 0$). Существование решения задачи доказано.

4. Анализ асимптотики решения. В новых переменных τ, $x = (x_1, x_2, x_3)$ таких, что

$$t = a + \sqrt{\nu/c}\,\tau, \; y_1 = \sqrt{\nu c}\, x_1, \; y_2 = c x_2, \; y_3 = c\sqrt{c/\nu}\, x_3, \tag{4.1}$$

задача (1.1), (1.6), (2.4) имеет вид

$$(4.2)\qquad dx_1/d\tau = x_2 - \varepsilon x_1/(1+\varepsilon\tau),\ dx_2/d\tau = x_3,$$

$$dx_3/d\tau = -\varepsilon x_3/(1+\varepsilon\tau) - x_1x_3 + x_2^2 - 4,\quad x_1(0) = x_2(0) = 0;\ x_2 \to 2,\ \tau\to\infty,$$

где $\varepsilon = R^{-1/2}$; $R = a^2c/\nu$ — параметр, играющий роль числа Рейнольдса.

Покажем, что при $\varepsilon \leqslant 1$ выполняются неравенства

$$(4.3)\qquad 1 < C_1 \leqslant x_3(0) \leqslant C_2.$$

В силу выбора множества Ω_0 при доказательстве теоремы существования и формул перехода (4.1) имеют место неравенства

$$(4.4)\qquad 0 < x_2 < 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 > 0.$$

Третье уравнение (4.2) в силу (4.4) дает $x_3' < 0$, откуда $x_3 \leqslant x_3(0) = \gamma_0$. Тогда второе уравнение (4.2) позволяет получить $x_2 < \gamma_0$ при $0 \leqslant \tau < 1$. Поэтому при тех же τ $x_3' < \gamma_0^2 - 4$, следовательно, $x_3 < \gamma_0 + \gamma_0^2 - 4$. Так как $x_3 > 0$, то $\gamma_0 + \gamma_0^2 - 4 > 0$. Из этого неравенства следует, что $\gamma_0 \geqslant C_1 > 1$.

Из первого уравнения (4.2) с использованием неравенств (4.4) можно получить ограничение снизу на $x_3(1) : x_3(1) \geqslant -8 - 2\varepsilon + \gamma_0/(1+\varepsilon)$. Поскольку $x_3(\tau) > x_3(1)$ при $0 \leqslant \tau < 1$, получается, что $x_2(\tau) > -8 - 2\varepsilon + \gamma_0/(1+\varepsilon)$, так как $x_2' = x_3$. Из (4.4) $x_2 < 2$, значит, $-8 - 2\varepsilon + \gamma_0/(1+\varepsilon) < 2$, откуда $\gamma_0 < (10+2\varepsilon)(1+\varepsilon) \leqslant 24$ при $\varepsilon \leqslant 1$. Неравенства (4.3) доказаны.

Теперь достаточно просто показать, что при τ, бо́льших некоторого τ_0, $x_2 > 1$. В силу $x_3 > 0$ верны неравенства $x_3' < x_2^2 - 4$ и $x_3 < \gamma_0 + (x_2^2 - 4)\tau$. Учитывая (4.3), получаем $x_3 < C_1 + (x_2^2 - 4)\tau$, тогда $C_1 + (x_2^2 - 4)\tau > 0$. Выбирая $\tau_0 = C_1/3$ и учитывая, что $x_2(\tau) > x_2(\tau_0)$ при $\tau > \tau_0$, приходим к нужному неравенству

$$(4.5)\qquad x_2 > 1 \text{ при } \tau \geqslant \tau_0 = C_1/3.$$

С учетом неравенств (4.4) третье уравнение (4.2) дает $dx_3/d\tau + x_1x_3 \leqslant 0$, т. е. $x_3(\tau) \leqslant \gamma_0 \exp\left(-\int\limits_0^\tau x_1(s)\,ds\right)$. Интегрируя последнее уравнение (4.2) с учетом (4.5), можно получить неравенство $x_1(\tau) > \tau/2$ при $\tau \geqslant \tau_0$, поэтому

$$(4.6)\qquad x_3(\tau) \leqslant C_3 \exp(-C_4\tau^2) \text{ при } \tau \geqslant \tau_0.$$

Интегрируя второе уравнение (4.2) с учетом (4.6) и краевого условия па бесконечности, получаем

$$(4.7)\qquad 0 \leqslant 2 - x_2 \leqslant C_5 \exp(-C_6\tau^2).$$

Возвращаясь по формулам (4.1) к старым переменным, вместо неравенств (4.7) получаем неравенство $0 \leqslant 2c - y_2 \leqslant C_5 c \exp(-C_6(t-a)^2/\varepsilon^2)$, которое верно для $t \geqslant a(1 + \tau_0/\sqrt{R})$.

По формуле (3.2) $y_2 = -f' - f/r$, поэтому

$$(4.8)\qquad 0 \leqslant 2c + f' + f/r \leqslant C_5 c \exp(-C_6(r-a)^2/\varepsilon^2).$$

Последнее неравенство определяет поведение функции $h(r) = f' + f/r$ при $r \to \infty$, $\nu \to 0$. Интегрирование (4.8) с учетом $f(a) = 0$ дает

$$(4.9)\qquad 0 \leqslant f + cr - ca^2/r \leqslant C_7\varepsilon \text{ при } r \geqslant a(1+\varepsilon\tau_0).$$

Теперь осталось описать поведение функции $g(r)$, которая в силу (1.2), (1.5) определяется неоднозначно. Однако решение задачи (1.2), (1.5) в классе функций, убывающих на бесконечности быстрее, чем const/r, единственно и имеет вид

$$g(r) = \frac{\omega a^2}{r} \int\limits_r^a \rho \exp\left(\int\limits_a^\rho \frac{f(s)}{\nu}\, ds\right) d\rho \Bigg/ \int\limits_a^\infty \rho \exp\left(\int\limits_a^\rho \frac{f(s)}{\nu}\, ds\right) d\rho,$$

откуда и из (4.9) получается $|g| \leqslant C_8 \exp(-C_9 r^2/\nu)$ при $r \geqslant a(1 + \tau_0/\sqrt{R})$.

Таким образом, при $R \to \infty$ вращательная компонента скорости локализована в пограничном слое толщиной порядка $1/\sqrt{R}$.

5. Асимптотическое разложение по малому параметру. Определим асимптотическое представление решения задачи (1.1), (1.6), (2.4) методом сращивания внешних и внутренних разложений. Пусть

$$f(r) = ca\Phi(y),\ y = r/a,\ \varepsilon = R^{-1/2}. \tag{5.1}$$

Тогда (1.1) перепишется в виде

$$\varepsilon^2(\Phi''' + 2\Phi''/y - \Phi'/y^2 + \Phi/y^3) - \tag{5.2}$$
$$- \Phi\Phi'' + \Phi'^2 + \Phi\Phi'/y + 2\Phi^2/y^2 - 4 = 0.$$

Определив внутренние переменные $\varepsilon F(\tau) = \Phi(y)$, $y = 1 + \varepsilon\tau$, из (5.2) получим уравнение

$$F''' + 2\varepsilon F''/(1 + \varepsilon\tau) - \varepsilon^2 F'/(1 + \varepsilon\tau)^2 + \varepsilon^3 F/(1 + \varepsilon\tau)^3 - FF'' + F'^2 +$$
$$+ \varepsilon FF'/(1 + \varepsilon\tau) + 2\varepsilon^2 F^2/(1 + \varepsilon\tau)^2 - 4 = 0.$$

Пусть имеют место асимптотические представления

$$\Phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n}\Phi_n(y), \quad F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(\tau).$$

При $n = 0$ $\Phi_0(y)$, $F_0(\tau)$ определяются как решения задач:

$$F_0''' - F_0F_0'' + F_0'^2 - 4 = 0, \quad F_0(0) = F_0'(0) = 0, \tag{5.3}$$
$$F_0'(\tau) \to \Phi_0'(1) \quad \text{при } \tau \to \infty$$

(условие сращивания внешних и внутренних разложений);

$$-\Phi_0\Phi_0'' + \Phi_0'^2 + \Phi_0\Phi_0'/y + 2\Phi_0^2/y^2 - 4 = 0, \tag{5.4}$$
$$\Phi_0(1) = 0, \quad \Phi_0(y) \to -1 \text{ при } y \to \infty.$$

Можно заметить, что последняя задача (5.4) имеет решение $\Phi_0(y) = -y + 1/y$, при этом задача (5.3) с условием $F_0'(\tau) \to -2$ при $\tau \to \infty$ имеет единственное решение [1]. Согласно формулам (5.1), определяется $f_0(r) = ca\Phi_0(y) = -cr + ca^2/r$. Тогда неравенство (4.9) показывает, что $|f(r) - f_0(r)| \leqslant C_7\varepsilon$ при $\varepsilon \leqslant 1$, $r \geqslant a(1 + \varepsilon\tau_0)$.

В заключение отметим, что хотя приведенное здесь решение и не описывает реального течения жидкости, оно может быть полезно при изучении течений жидкости, вызванных вращением цилиндра конечной, но большой (по сравнению с радиусом) длины l. Можно высказать гипотезу о том, что изученное решение представляет главный член «внутреннего разложения» точного решения вблизи цилиндра при $\nu \to 0$ и больших l/a, по крайней мере вдали от торцов цилиндра.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву, под руководством которого была проделана эта работа.

Поступила 20 I 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.