3. Chisnell R. F. The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock wave.— J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, p. 286.
4. Комиссарук В. А., Мартынов В. П., Менде Н. П. Применение дифракционного интерферометра в баллистическом эксперименте.— ПТЭ, 1979, № 207.
5. Зейликович И. С., Комиссарук В. А. и др. О некоторых возможностях сдвиговых интерферометров при настройке на частые полосы.— ЖТФ, 1979, т. 49, вып. 3.

УДК 533.21

АСИМПТОТИКА ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПРИ ЕГО ИСТЕЧЕНИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

Ю. В. Житников, Я. М. Каждан
(Москва)

1. В работе [1] рассмотрено истечение газа в сферическую полость. В данной работе исследуется асимптотика газодинамических функций при истечении идеального газа в цилиндрическую полость.

В возникшей в результате истечения газа в цилиндрическую полость центрированной в плоскости (r, t) волне разрежения энтропия в главном члене постоянна. Поэтому в качестве уравнения состояния принимается

$$p = A\rho^{\varkappa}. \tag{1.1}$$

В результате применения инвариантного относительно уравнений газодинамики преобразования координат и функций можно считать, что постоянная $A = 1$ и что началу истечения соответствует радиус полости $r_0 = 1$, момент $t_0 = -1$, скорость свободной границы $u = -1$. Система уравнений газодинамики в этом случае имеет вид

$$(h-1)\left[\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial r}\right] + c\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uc}{r} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + (h-1)c\frac{\partial c}{\partial r} = 0, \quad h = (\varkappa+1)/(\varkappa-1)$$

(u — скорость газа, c — скорость звука).

2. Центрированная волна разрежения в окрестности вершины $A(r=1, t=-1)$ в главном члене будет плоской, поэтому асимптотика в окрестности представляется в виде разложения по степеням $(t+1)$ с коэффициентами, зависящими от величины $\xi = (r-1)/(t+1)$:

$$f = f_0(\xi) + f_1(\xi)(t+1) \qquad (f = u,\ c). \tag{2.1}$$

Линии $\xi = \mathrm{const}$ соответствуют в главном члене α-характеристикам пучка, при этом величина ξ меняется от значения $\xi = \xi_0 = -1$, соответствующего свободной границе, до значения $\xi = \xi_1 = u^0 + c^0$, соответствующего разделяющей характеристике (u^0, c^0 — значения невозмущенной скорости и скорости звука в точке $A(r=1, t=-1)$). В результате подстановки (2.1) в систему (1.2) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $t+1$ имеем

(2.2)

$$u = -1 + \frac{h-1}{h}(\xi+1) + \left[\frac{\xi+1}{h(2-h)} + \frac{3(\xi+1)^2}{h^2(3\varkappa-5)} + K(\xi+1)^{h/2}\right](t+1) + \ldots,$$

$$c = \frac{\xi+1}{h} + \left[\frac{\xi+1}{h(2-h)} - \frac{(\varkappa-5)(\xi+1)^2}{2h^2(3\varkappa-5)} - \frac{(\varkappa-5)(\varkappa-1)}{2(3\varkappa-1)}K(\xi+1)^{h/2}\right]\times$$
$$\times(t+1) + \ldots$$

При $\varkappa = 5/3$ и $\varkappa = 3(h = 4{,}2)$ появляются особенности. Значение постоянной определяется начальным распределением функций в невозмущенном газе в окрестности точки A. Если при $t = -1$ $u = u^0 + u'(r + 1)$, $c = c^0 + c'(r - 1)$, то

$$K = (hc^0)^{\frac{2-h}{2}}\left[\frac{h+2}{2h^2}u' - \frac{(h-1)(h+2)}{2h^2}c' - \frac{3(h-1)}{2h(h-4)}c^0 + \frac{u^0}{2h^2} - \frac{1}{(2-h)h}\right].$$

Важно заметить, что для начального состояния, соответствующего покою ($u^0 = u' = c' = 0$, и, следовательно, $c^0 = 1/(h-1)$), значение

$$K = -\frac{(\varkappa-1)^2(3\varkappa-1)}{(\varkappa-3)(3\varkappa-5)}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{h/2},$$

т. е. $K > 0$ при $5/3 < \varkappa < 3$ и $K < 0$ при $\varkappa > 3$.

Определение функций f_0, f_1 в разложении (2.2) исходило из предположения, что

$$f_1(\xi)(t+1)/f_0(\xi) \to 0 \text{ при } t \to -1.$$

При $\varkappa < 3$ это условие выполнено на всем диапазоне изменения ξ. При $\varkappa > 3(h < 2)$ и $\xi \to -1$

$$c_1(\xi)(t+1)/c_0(\xi) \sim (\xi+1)^{h/2-1}(t+1) \to \infty.$$

Следовательно, при $\varkappa > 3$ определение асимптотики в окрестности точки в области, примыкающей к свободной границе $\xi = -1$, требует дополнительного исследования, которое проведено ниже.

3. Асимптотические формулы (2.2), когда $1 < \varkappa < 3$, указывают на существование временного отрезка $-1 \leqslant t \leqslant t_1$, в течение которого скорость свободной границы постоянна. Величина ξ при этих временах на свободной границе постоянна, $\xi = -1$. Поэтому определение значения t_1 и асимптотики в окрестности свободной границы будет исходить из разложения газодинамических функций по степеням $\eta = \xi + 1$. Учитывая асимптотику, полученную в п. 2, искомое разложение представим в виде

(3.1)
$$u = -1 + u_1(t)\eta + u_2(t)\eta^\alpha + \ldots,\ c = c_1(t)\eta + c_2(t)\eta^\alpha + \ldots + (\varkappa \neq 5/3),$$

где $\alpha = 2$ при $1 < \varkappa < 5/3$; $\alpha = h/2$ при $5/3 < \varkappa < 3$.

Уравнения, определяющие $u_1(t)$ и $c_1(t)$, получены обычным способом и в предположении, что $\eta/t \ll 1$ на всем участке интегрирования, в частности при $t \to 0$, а начальные данные получены из асимптотик п. **1**:

(3.2)
$$c_1'(t+1) - c_1 + \frac{1}{2}(\varkappa+1)u_1c_1 + \frac{1}{2}(\varkappa-1)\frac{t+1}{t}c_1 = 0,$$
$$u_1'(t+1) - u_1 + u_1^2 + (h-1)c_1^2 = 0,\quad 1<\varkappa<3;$$

(3.3)
$$u_1(-1) = 2/(\varkappa+1),\ c_1(-1) = (\varkappa-1)/(\varkappa+1).$$

Уравнения для функций $u_2(t)$, $c_2(t)$:

(3.4)
$$(h-1)\left[c_2'(t+1) - 2c_2\right] + (2h-1)u_1c_2 + (h+1)c_1u_2 + \frac{(t+1)}{t}\left(c_2 - u_1c_2 + \frac{t+1}{t}c_1\right) = 0,$$
$$u_2'(t+1) - 2u_2 + 3u_1u_2 + 3(h-1)c_1c_2 = 0,\quad 1<\varkappa<5/3;$$

(3.5)
$$u_2 \simeq -\frac{3(\varkappa-1)^2}{(\varkappa+1)^2(3\varkappa-5)}(t+1),\quad c_2 \simeq \frac{(5-\varkappa)(\varkappa-1)^2}{2(\varkappa+1)^2(3\varkappa-5)}(t+1) \text{ при } t \to -1;$$

$$(3.6)\quad \frac{2}{\varkappa-1}c_2'(t+1)+\left[\left(\frac{(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)^2}+1\right)u_1-\frac{(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)^2}\right]c_2+\frac{5+\varkappa}{2(\varkappa-1)}c_1u_2+ \\ +\frac{t+1}{t}c_2=0,$$

$$u_2'(t+1)-\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}u_2+\frac{3\varkappa-1}{2(\varkappa-1)}u_1u_2+\frac{3\varkappa-1}{(\varkappa-1)^2}c_1c_2=0,\quad 5/3<\varkappa<3;$$

$$(3.7)\quad u_2\simeq K(t+1),\quad c_2=-\frac{(\varkappa-1)(\varkappa+5)}{2(3\varkappa-1)}K(t+1)\ \text{при}\ t\to-1.$$

Т е о р е м а. Если $1<\varkappa<2$, то функции $u_1(t)$ и $c_1(t)$ на интервале $-1<t<0$ конечны и отличны от нуля. Если $2<\varkappa<3$, то существует значение $t_1=t_1(\varkappa)$, $-1<t_1<0$, такое, что $u_1(t)$ и $c_1(t)$ стремятся к бесконечности при $t\to t_1$.

Пусть

$$(3.8)\quad c_1(t)=\frac{t+1}{t}M(t),\quad u_1(t)=\frac{1+t}{t}L(t),$$

тогда функции $M(t)$ и $L(t)$, согласно (3.2), (3.3), определяются системой

$$(3.9)\quad \frac{dM}{dL}=\frac{M[(\varkappa+1)L+(\varkappa-3)]}{2(L^2-L+(h-1)M^2)},\quad M=-\infty,\quad L=-\infty;$$

$$(3.10а)\quad t=-\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{M}\frac{2dM}{M[(\varkappa+1)L+(\varkappa-3)]}\right);$$

$$(3.10б)\quad t=-\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{L}\frac{dL}{L^2-L+(h-1)M^2}\right).$$

Так как $c>0$ и $\eta>0$, то $M<0$. Асимптотика искомой интегральной кривой (l) в окрестности узла ($M=-\infty$, $L=-\infty$) имеет вид

$$(3.11)\quad L=\frac{2}{\varkappa-1}M+\frac{\varkappa-1}{3-\varkappa}+\frac{2-\varkappa}{2}\left(\frac{\varkappa-1}{3-\varkappa}\right)^2\frac{1}{M}+ \\ +\frac{(\varkappa-1)^2(5-3\varkappa)(2-\varkappa)}{(5+\varkappa)(3-\varkappa)^3}\frac{1}{M^2}+\dots$$

Ось $M=0$ является интегралом уравнения (3.9). В полуплоскости $M\leqslant 0$ особыми точками уравнения (3.9) будут:

$$O(L=0,\ M=0),\quad A(L=1,\ M=0),\quad (L=\pm\infty,\ M=-\infty), \\ C\left(L=\frac{3-\varkappa}{\varkappa+1},\ M=-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\sqrt{3-\varkappa}\right).$$

Л е м м а. В полуплоскости $M<0$ интегральная кривая (l) при $1<\varkappa<2$ достигает точки O, нигде не пересекая изоклины нуля — прямой (g): $L=(3-\varkappa)/(\varkappa+1)$; при $\varkappa=2$ совпадает с прямой $L=2M+1$; при $2<\varkappa<3$ пересекает прямую (g) ниже точки C, нигде не пересекая изоклины бесконечности — эллипса (f):

$$L^2-L+(h-1)M^2=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. В области $L<0$, $M<0$ интегральная кривая (l) лежит над гиперболой (d): $L^2-L=(h-1)^2M^2$, если $1<\varkappa<5/3$, совпадает с ней при $\varkappa=5/3$ и расположена под ней, если $5/3<\varkappa<2$. Это следует из знака асимптотического значения разности между величинами L при одном и том же значении M кривых (l) и (d) в окрестности точки ($L=-\infty$, $M=-\infty$)

$$L(l)-L(d)\simeq(5-3\varkappa)/2(3-\varkappa)$$

и знака разности между значениями правой части уравнения (3.9) на кривой (d) и тангенса угла наклона касательной к кривой (d)

$$\frac{dM}{dL}-\left(\frac{dM}{dL}\right)_d=\frac{(3\varkappa-5)\,M}{4\,(L^2-L+(h-1)\,M^2)}.$$

Кривая (l) может попасть в точку O согласно одной из асимптотик

(3.12а) $\quad L\simeq C\,(M)^{2/(3-\varkappa)};\quad$ (3.12б) $\quad L\simeq\dfrac{2}{(\varkappa-2)(\varkappa-1)}M^2.$

Асимптотика кривой (d) в окрестности $O(0,\ 0)$ будет

(3.13) $$L\simeq-(h-1)M^2.$$

Разность между (3.12б) и (3.13) положительна при $1<\varkappa<5/3$ и отрицательна при $5/3<\varkappa<2$, поэтому при $1<\varkappa<5/3$ интегральная кривая (l) расположена между интегралом $M=0$ и гиперболой (d) (фиг. 1) и попадает в точку $O\,(0,\ 0)$ согласно асимптотике (3.12а) при некотором отрицательном значении постоянной C, зависящем от показателя $\varkappa$: при $5/3<\varkappa<2$ интегральная кривая не может попасть в точку $O\,(0,\ 0)$ со стороны $M<0$ и поэтому пересекает ось $L=0$ при значении $M<0$. Гипербола (h) : $L^2-L=(h-1)^2M^2+(h-1)(3\varkappa-5)M/(3-\varkappa)$ до пересечения с изоклиной нуля (g) или изоклиной бесконечности (f) расположена под интегральной кривой (l) при $5/3<\varkappa<2$ и над ней при $2<\varkappa<3$. Это следует из знака асимптотического значения разности между величинами L при одном и том же значении M в окрестности точки ($L=-\infty$, $M=-\infty$)

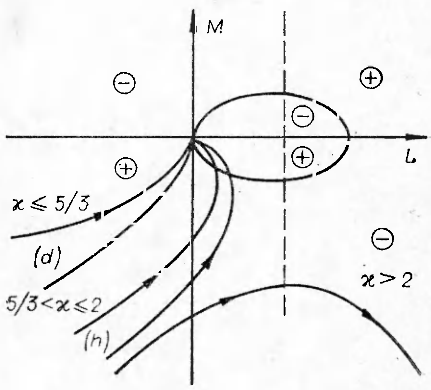
$$L\,(l)-L\,(h)\simeq\frac{(2-\varkappa)\,(\varkappa-1)^3\,(5-3\varkappa)}{8\,(3-\varkappa)^2\,(5+\varkappa)}\,\frac{1}{M^2}$$

и знака разности между значением правой части уравнения (3.9) на кривой (h) и тангенсом угла наклона касательной к кривой (h)

(3.14) $$\frac{dM}{dL}-\left(\frac{dM}{dL}\right)_h=\frac{(3\varkappa-5)\,M^2\,[(\varkappa-3)\,L+(\varkappa-1)+(h-1)\,(3-\varkappa)\,M]}{[4\,(h-1)\,(3-\varkappa)\,M^2+2\,(3\varkappa-5)\,M]\,(L^2-L+(h-1)\,M^2)}.$$

При $\varkappa>5/3$ знак разности (3.14) положителен и отрицателен при $\varkappa<2$. Действительно, знаменатель (3.14) положителен вне изоклины бесконечности (f), ибо он больше нуля при $M<M_0=[(5-3\varkappa)(\varkappa-1)]/[4(3-\varkappa)]$, а $M_0>M_1=(5-3\varkappa)/(3-\varkappa)h$ — координаты точки пересечения кривых (f) и (h). Числитель (3.14), приравненный к нулю, совпадает с уравнением асимптоты гиперболы (h), поэтому его знак, а следовательно, и знак разности (3.14) определяются в результате подстановки какой-либо точки, принадлежащей соответствующей ветви гиперболы (h), например ($L=0$, $M=[(3\varkappa-5)(\varkappa-1)]/2(3-\varkappa)$), и при $\varkappa>5/3$ совпадает со знаком дроби $(2-\varkappa)/(3-\varkappa)$. Далее, гипербола ($h$) пересекается с изоклиной (f) в точке (L_1, M_1), лежащей левее (правее) изоклины нуля (g), если $5/3<\varkappa<2$ (если $2<\varkappa<3$). Это следует из квадратного уравнения, определяющего величину $X=L_1-(3-\varkappa)/(\varkappa+1)$:

$$X^2+\frac{5-3\varkappa}{\varkappa+1}X+\frac{8\,(\varkappa-2)}{h^2\,(3-\varkappa)^2}=0.$$



Фиг. 1

Следовательно, при $5/3<\varkappa<2$ интегральная кривая (l) после пересечения оси $L = 0$ пересекает изоклину ∞ — (f) и, согласно схеме изоклин (см. фиг. 1), попадает в точку O (0, 0). Так как $L > 0$, то асимптотикой будет (3.12а). При $\varkappa = 2$ интегральная кривая (l) совпадает с прямой $L = 2M + 1$. При $2 < \varkappa < 3$ интегральная кривая (l) не пересекает изоклину бесконечности (f), а пересекает изоклину нуля (g), после чего уходит в точку ($L = \infty$, $M = -\infty$), ибо точка пересечения гиперболы (h) с прямой (g) лежит левее точки пересечения гиперболы (h) с эллипсом (f), а интегральная кривая (l) лежит под гиперболой (h) (схема изоклин на фиг. 1).

Доказательство теоремы. При $1 < \varkappa < 2$ кривая (l) при изменении M от $-\infty$ до 0 нигде не пересекает изоклины нуля (g). Согласно квадратуре (3.10а), вдоль кривой (l) величина t меняется монотонно от -1 до 0, причем при $M \to 0$ величина $t \sim M^{2/(3-\varkappa)}$ или $M \sim t^{(3-\varkappa)/2}$, в силу асимптотики (3.12а) величина $L \sim t$. Следовательно, согласно (3.8), функции $u_1(t)$ и $c_1(t)$ остаются конечными на интервале $-1 < t < 0$, причем при $t = 0$ функция $u_1(t)$ остается конечной, а $c_1(t)$ обращается в бесконечность

$$c_1(t) \sim t^{(1-\varkappa)/2}. \quad (3.15)$$

При $\varkappa = 2$ функции $u_1(t)$ и $c_1(t)$ выписываются явно:

$$u_1(t) = (1 + t)(2t - 1)/3t, \quad c_1(t) = (t + 1)^3/3t.$$

При $2 < \varkappa < 3$ кривая (l) нигде не пересекает изоклину бесконечности, поэтому интеграл, стоящий под знаком экспоненты в квадратуре (3.10б), все время растет, оставаясь конечным при изменении L от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, значение t монотонно растет от -1 до $t_1 < 0$. При $t \to t_1$ функции L и M стремятся к бесконечности согласно асимптотикам:

$$L \simeq -\frac{2}{\varkappa+1}\frac{t_1}{t_1 - t}, \quad M \simeq \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{t_1}{t_1 - t}.$$

Соответственно $u_1(t)$ и $c_1(t)$ стремятся к бесконечности согласно асимптотикам:

$$u_1(t) \simeq -\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1+t_1}{t_1 - t}, \quad c_1(t) \simeq \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{1+t_1}{t_1 - t}. \quad (3.16)$$

Замечание. Функция $u_1(t)$ монотонно убывает, а функция $c_1(t)$ монотонно растет на интервале $-1 < t < t_1$. Действительно, при $t = -1$ $u_1'(t) < 0$, а $c_1'(t) > 0$. Производная $c_1'(t)$ не может обратиться в нуль при $t = t_0$, если при $t < t_0$ $u'(t_0) < 0$, ибо при этом $c_1(t_0) > 0$ и $c_1''(t_0) = -\frac{1}{2}(\varkappa + 1)u_1'(t_0)c_1(t_0) + \frac{\varkappa-1}{2t_0^2}c_1(t_0) > 0$. Аналогично $u_1'(t)$ не может обратиться в нуль при $t = t_{00}$, если $c_1'(t) < 0$ при $t \leqslant t_{00}$, ибо при этом

$$u_1''(t_{00}) = -\frac{4}{\varkappa+1}c_1(t_{00})c_1'(t_{00}) < 0.$$

Исследование функций $u_2(t)$, $c_2(t)$. Функции $u_2(t)$, $c_2(t)$ являются решениями систем линейных уравнений, коэффициенты и правые части которых—непрерывные функции t, $u_1(t)$ и $c_1(t)$. Следовательно, $u_2(t)$ и $c_2(t)$ конечны на тех же интервалах, что и $u_1(t)$ и $c_1(t)$. Из системы (3.4) и асимптотики (3.15) следует, что при $1 < \varkappa < 5/3$ и $t \to 0$ $u_2(t) \sim t^{1-\varkappa}$, $c_2(t) \sim t^{-(1+\varkappa)/2}$. Из системы (3.6), (3.7) и асимптотики (3.15) следует, что при $5/3 < \varkappa < 2$ и $t \to 0$ $u_2(t)$ конечно, а $c_2(t) \sim t^{(1-\varkappa)/2}$. Система (3.5) инвариантна относительно преобразования $u_2 = KV_2$, $c_2 = KW_2$. При этом функции $V_2(t)$ и $W_2(t)$ не зависят от значения K. Используя монотонность функций $u_1(t)$ и $c_1(t)$, так же, как и в предыдущем замечании, можно доказать, что функция $V_2(t)$ монотонно возрастает, а $W_2(t)$ монотонно убывает на интервале $-1 < t < t_1$. Из системы (3.6), (3.7) и асимптотики 3.16) следует, что при $t \to t_1$

$$V_2 \simeq L(h-1)(t_1-t)^{-(h+2)/2}, \quad W_2 \simeq -L(t_1-t)^{-(h+2)/2},$$
$$L > 0$$

и в силу монотонности функций $V_2(t)$ и $W_2(t)$ постоянная $L > 0$. Следовательно, асимптотика функций $u_2(t)$ и $c_2(t)$ при $t \to t_1$ имеет вид

$$u_2 \simeq KL(t_1 - t)^{-(h+2)/2}, \quad c_2 \simeq -\frac{1}{(h-1)} KL(t_1-t)^{-(h+2)/2}, \quad L > 0.$$

Уравнения (3.2) получены в предположении малости величины η/t. Если еще учесть отношение последующих членов к предыдущим, то на временном интервале $-1 < t < t_1(\varkappa)$ полученными формулами (3.1) для асимптотики в окрестности свободной границы можно пользоваться лишь при условии малости величины η/t при $1 < \varkappa < 2$ и величины $\eta^{h-2}(t_1-t)^{-h}$ при $2 < \varkappa < 3$.

4. Для получения асимптотики при $1 < \varkappa < 2$ в полной окрестности точки $O(r=0,\ t=0)$ газодинамические функции представляются в виде

$$u = u(s), \quad c = r^{(3-\varkappa)/2} c(s), \quad \text{где } s = (r+t)/t. \tag{4.1}$$

Такое представление исходит из полученной асимптотики в окрестности свободной границы для этого диапазона $\varkappa$ при $r \to 0$, $t \to 0$

$$u \simeq -1, \quad c \simeq -D\left(\frac{r+t}{t}\right) r^{(3-\varkappa)/2}, \tag{4.2}$$

причем ее справедливость ограничена условием малости η/t, что при $r \to 0$ и $t \to 0$ эквивалентно малости s. Величина s меняется от $s = 0$ на свободной границе до $s = -\infty$ при $t \to -0$ и от $s = +\infty$ при $t \to +0$ до $s = 1 (r = 0,\ t > 0)$. При $r \to 0$ уравнения, определяющие функции $u(s)$ и $c(s)$, имеют вид

$$u' = 0, \quad c'[(s-1)^2 + (s-1)] = -c. \tag{4.3}$$

С учетом асимптотики при $s \to 0$ (она следует из (4.2)) решением (4.3) будет

$$u = -1, \quad c = Ds/(s-1). \tag{4.4}$$

Полученное решение справедливо не в полной окрестности точки O, так как на оси при $t > 0$, согласно (4.1), (4.4), $c \sim r^{(1-\varkappa)/2} \to \infty$. Возникает идущая от оси отраженная ударная волна. Так как перед фронтом $\rho \sim r^{(3-\varkappa)/(\varkappa-1)}$, $u \simeq -1$, то за фронтом решение ищется в виде

$$u = u(s), \quad \rho = r^{(3-\varkappa)/(\varkappa-1)} \rho(s), \quad p = r^{(3-\varkappa)/(\varkappa-1)} p(s) \to \tag{4.5}$$
$$\to c = c(s).$$

Можно видеть, что ударная волна будет бесконечной интенсивности и течение за фронтом не будет изэнтропичным. Энтропийная величина A представляется в виде

$$A = r^{\varkappa-3} A(s).$$

Функции $u(s)$, $c(s)$, $A(s)$ определяются системой уравнений:

$$(s-1)[u-(s-1)]A' = (3-\varkappa)uA, \tag{4.6}$$
$$2c'[u(s-1)-(s-1)^2] + (\varkappa-1)(s-1)cu' + (\varkappa-1)uc = 0,$$
$$\varkappa(u-s+1)[(\varkappa-1)(s-1)(u-s+1)u' + 2cc'] - (3-\varkappa)(s-1)c^2 = 0$$

и граничными условиями на фронте $s = s_b$ и на оси $s = 1$:

(4.7) $$u(s_b) = -1 + \frac{h-1}{h}s_b, \quad c(s_b) = \frac{\sqrt{h+1}}{h}s_b, \quad u(1) = 0, \quad c(1) = \text{const} \neq 0.$$

Система (4.6) имеет первый интеграл

$$A^{2/(3-\varkappa)}c^{2/(\varkappa-1)}\left(\frac{u}{s-1} - 1\right) = \text{const}.$$

Используя его, при помощи замены

(4.8) $$c^2 = L(s-1)^2, \quad u = (s-1)(K+1)$$

систему (4.6) сведем к уравнению и к квадратуре:

(4.9) $$\frac{dL}{dK} = \frac{L\left[(1-\varkappa)\varkappa(K^2+LK) - (3-\varkappa)L - \varkappa(\varkappa+1)K(K^2-L)\right](\varkappa-1)}{K\left[(K^2+LK)\varkappa(\varkappa-1) + (3-\varkappa)L - (\varkappa-1)\varkappa(2+K)(K^2-L)\right]},$$

(4.10) $$\frac{dK}{ds} = \frac{L\left[2\varkappa(\varkappa-1)(K+1) + (3-\varkappa)\right] - \varkappa(\varkappa-1)(K+1)K^2}{\varkappa(\varkappa-1)(K^2-L)(s-1)}.$$

Согласно (4.7), (4.8), $L(1) = \infty$, а из (4.10) следует, что $K(1) = -(1 + (h-2)/2\varkappa) = K_0$. Точка ($L = \infty$, $K = K_0$) — особая точка уравнения (4.9) типа седла, и искомая интегральная кривая совпадает с его сепаратрисой, выходящей из этой точки согласно направлению:

$$L = \frac{\varkappa K_0^3(K_0+1)}{\left[4\varkappa K_0 - (3-\varkappa)\right](K-K_0)}$$

до ее пересечения с параболой $L = (h+1)K^2$, на которой лежит точка, соответствующая ударной волне. Квадратура (4.10) дает соответствующее фронту волны значение $s = s_b$. На фронте ударной волны значения u и c будут конечными, а давление и плотность порядка $r^{(3-\varkappa)/(\varkappa-1)}$. На оси ($r = 0$, $t > 0$) $u = 0$, $p \sim t^{(3-\varkappa)/(\varkappa-1)}$, $A(s) = \infty$, $\rho = 0$.

5. При $2 < \varkappa < 3$ асимптотическое представление функций в окрестности точки свободной границы ($t = t_1$, $r = r(t_1)$) принимается в виде

(5.1) $$c = \frac{1+t_1}{h}(t_1 - t)^{2/(h-2)}z^{h/(h-2)}f_1(z), \quad u = -1 - \frac{h-1}{h}(1+t_1)\times \\ \times(t_1-t)^{2/(h-2)}f_2(z), \quad z = \eta^{(h-2)/h}/(t_1 - t).$$

Это представление исходит из полученной в п. 3 асимптотики в окрестности свободной границы и условия ее применимости. Уравнения, определяющие функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, имеют вид

(5.2) $$\frac{df_1}{df_2} = \frac{(h-2)f_1^2 + (h-1)^2(2-h)f_2^2 + h(2h^2-4h+4)f_2 - h^3}{(h-1)^2\left[(2-h)f_2^3 + 2hf_2^2\right] + (h-2)f_1^2f_2 + 2hf_1^2 - h^2f_2};$$

(5.3) $$z\frac{df_1}{dz} = -f_1\frac{h(h-2)f_1^2 + h(h-1)^2(2-h)f_2^2 + h^2(2h^2-4h+4)f_2 - h^4}{(h-2)^2f_1^2 - \left[h^2 + (h-1)(2-h)f_2\right]^2}.$$

При $t < t_1$ свободной границе соответствует значение $z = +0$, и, согласно полученной в п. 3 асимптотике, при $z \to +0$

(5.4) $$f_1(z) \simeq 1 - \frac{KLh}{1+t_1}z^{h/2}, \quad f_2(z) = 1 - \frac{KLh}{1+t_1}z^{h/2}.$$

Искомым решением будет интегральная кривая, имеющая при $z \to +0$ асимптотику (5.4) и удовлетворяющая при некотором значении $z > 0$

условиям на свободной границе. Выписанная система имеет точное решение с асимптотикой (5.4) при $z \to 0$

$$f_1 = f_2, \quad f_1(f_1 - 1) = \left(\frac{LKh}{1+t_1}\right)^{-2/h} \frac{1}{z},$$

совпадающее с искомым решением на некотором интервале значений z. Искомое решение определяется в результате исследования уравнения (5.2). Схема изоклин нанесена на фиг. 2. Для однозначности функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ интегральная кривая (l) уравнения (5.2) не должна пересекать прямых $L_{1,2}$ вне особых точек уравнения (5.3):

$$(L_{1,2})\, f_1 = \pm \frac{1}{2-h}\left[h^2 + (h-1)(2-h) f_2\right].$$

Изоклинами нуля уравнения (5.2) будут прямая $f_2 = 0$ и гипербола

$$f_1^2 = (h-1)^2 \left(f_2 - f_1^-\right)\left(f_2 - f_1^+\right), \quad f_1^{\pm} = -\frac{h\left(h^2 - 2h + 2 \pm \sqrt{3h^2 - 6h + 4}\right)}{(h-1)^2 (2-h)}.$$

Изоклиной бесконечности будет кривая

$$f_1^2 = \frac{(h-1)^2 (h-2)}{2h + (h-2) f_2} f_2 \left(f_2 - f_2^-\right)\left(f_2 - f_2^+\right), \quad f_2^- = \frac{h}{h-1}, \quad f_2^+ = \frac{h^2}{(h-2)(h-1)}.$$

Можно видеть, что

$$f_1^+ > f_1^-, \quad f_2^+ > f_2^-, \quad f_1^+ > f_2^+, \quad f_1^- < f_2^-.$$

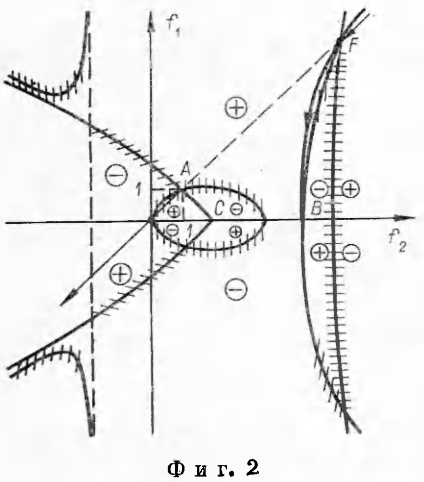
Особые точки уравнения (5.2):

$$A(f_1 = 1,\ f_2 = 1), \quad B\left(f_1 = 0,\ f_2 = f_2^+\right), \quad C\left(f_1 = 0,\ f_2 = f_2^-\right),$$

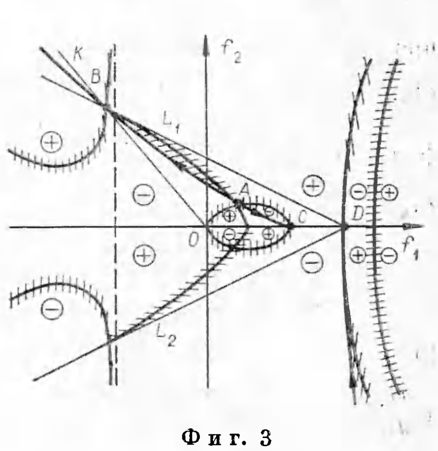
$$F\left(f_1 = \frac{h^2}{(2-h)^2},\ f_2 = \frac{h^2}{(2-h)^2}\right).$$

Дальнейшее исследование проводится в зависимости от знака K.

А. $K > 0$. Искомая интегральная кривая уравнения (5.2) соединяет точки A и F отдельным усом узла F — интегралом $f_1 = f_2 (-\infty \leqslant f_1 \leqslant 1$, $h^2/(h-2)^2 = f_{1F} \leqslant f_1 < \infty)$ — и точки F и B сепаратрисой седла B, отличной от интеграла $f_1 = 0$ (см. фиг. 2). Значению $f_1 = 0$ соответствует $z = \infty$, т. е. $t = t_1$. Возникающий при этом излом интегральной кривой в узле B допустим, ибо точке B соответствует характеристика исходной газодинамической системы. Уравнение свободной границы при $t_1 < t < t_1 + \varepsilon$ и достаточно малом ε в главном члене будет $z = z_B$, где



Фиг. 2



Фиг. 3

z_B — значение z, соответствующее точке B. Выполнение соответствующих условий на свободной границе следует из асимптотических формул при $z \to z_B$:

$$f_1^2 \approx -\frac{4h^4(z-z_B)}{(h-2)^3(h-1)z_B}, \quad f_2 \approx \frac{h^2}{(h-1)(h-2)} - \frac{2h^2(3h-2)}{(h^2-1)(h-2)^2}(z-z_B).$$

Асимптотика газодинамических функций в окрестности точки свободной границы ($r_1 = r(t_1)$, t_1) выглядит следующим образом:

$$u \approx -1 - \frac{h}{h-2}(1+t_1)|z_B|^{h/(h-2)}(t_1-t)^{2/(h-2)} + \frac{2h(3h-2)}{(h+1)(h-2)^2}(1+t_1)\times$$
$$\times |z_B|^{h/(h-2)}(t-t_1)^{2/(h-2)}\left(\frac{z}{z_B}-1\right),$$
$$c \approx \frac{2h}{h-2}(1+t_1)|z_B|^{(h+2)/2(h-2)}(t-t_1)^{2/(h-2)}\sqrt{\frac{z_B-z}{(h-2)(h-1)}}.$$

Таким образом, вдоль свободной границы $z = z_B$ при $t > t_1$ скорость начинает возрастать.

Б. $K < 0$. В этом случае, согласно асимптотике (5.4), движение по интегральной кривой происходит в сторону возрастания f_1. При достижении точки $F\left(f_1 = f_2 = \frac{h}{h-2}\right)$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ перестают быть однозначными, так как эта точка, не будучи особой для уравнения (5.3), лежит на ее изоклине бесконечности: прямой L_2. При этом β-характеристики пересекаются и имеют в плоскости r, t огибающую $z = z_F$, где z_F — значение z, соответствующее точке F. Следовательно, возникает ударная волна, выходящая на свободную границу в момент $t = t_1$ и придающая ей бесконечное ускорение.

6. При $\varkappa > 3$ полученная в п. 2 асимптотика (2.2) при $\xi \to -1$, $t \to -1$ справедлива лишь в той части, где достаточно велики значения $\eta = (\xi+1)(1+t)^{2/(h-2)}$, и при $\eta \to \infty$ в главных членах она имеет вид

$$(6.1)\quad u \simeq -1 + \frac{h-1}{h}(1+\xi)\left[1 + \frac{\varkappa+1}{2}K\eta^{(h-2)/2}\right], \quad c \simeq$$
$$\simeq \frac{1}{h}(\xi+1)\left[1 - \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+5)}{2(3\varkappa-1)}K\eta^{(h-2)/2}\right].$$

С учетом формулы (6.1) асимптотика в полной окрестности точки ($r = 1$, $t = -1$) представляется в виде

$$(6.2)\quad u \simeq -1 + \frac{h-1}{h}(\xi+1)f_1(\eta), \quad c \simeq \frac{1}{h}(\xi+1)f_2(\eta)$$

при $(\xi+1) \to 0$ и конечных значениях η. Согласно (6.1), при $\eta \to \infty$

$$(6.3)\quad f_1(\eta) \simeq 1 + \frac{\varkappa+1}{2}K\eta^{(h-2)/2}, \quad f_2(\eta) = 1 - \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+5)}{2(3\varkappa-1)}K\eta^{(h-2)/2},$$

функции $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$(6.4)\quad \frac{df_2}{df_1} =$$
$$= -f_2\frac{(4-h)h^2 - (2-h)f_2^2 - h(-2h^2+8h-4)f_1 + (2-h)(h-1)^2f_1^2}{2hf_2^2 + (2-h)f_1f_2^2 + 2h(h-1)(3-h)f_1^2 + (h-1)^2(h-2)f_1^3 - h^2(4-h)f_1};$$

(6.5)

$$\eta\frac{df_2}{d\eta} = -f_2\frac{(h-2)\left[(4-h)h^2 - (2-h)f_2^2 + h(2h^2-8h+4)f_1 + (2-h)(h-1)^2f_1^2\right]}{(2-h)^2f_2^2 - [(4-h)h + (h-2)(h-1)f_1]^2},$$

асимптотике (6.3) и при некотором значении $\eta = \eta_1$ условиям на свободной границе. Как и в п. 5, решение задачи сосредоточено в определении интегральной кривой уравнения (6.4) $f_2 = f_2(f_1)$, соединяющей точки $f_1 = f_2 = 1$ с точкой $f_1(\eta_1)$, $f_2(\eta_1)$, соответствующей свободной границе. На фиг. 3 нанесены схема изоклин нуля и бесконечности уравнения (6.4), особые точки этого уравнения, его интеграл — прямая $(K) : f_2 = -f_1$ — и изоклины бесконечности уравнения (6.5), прямые $L_{1,2} : f_2 = \pm \frac{1}{2-h}[(h - 2)(h-1)f_1 + (4-h)h]$. В силу единственности искомая интегральная кривая (l) может пересечь прямую (K) лишь в особых точках уравнения (6.4) и для однозначности решения — прямые $(L_{1,2})$ лишь в особых точках уравнения (6.5). Согласно определению (6.2), функция $f_2(\eta) \geqslant 0$ при $\eta \geqslant 0$. Изоклинами нуля будут интеграл $f_2 = 0$ и гипербола

$$f_2^2 = (h-1)^2 (f_1 - f_{10})(f_2 - f_{20}), \text{ где } f_{i0} = \frac{h\left(-h^2 + 4h - 2 + \sqrt{5-(h-3)^2}\right)}{(h-1)^2(2-h)} \quad (i = 1, 2),$$

изоклиной бесконечности будет кривая

$$f_2^2 = \frac{(f_1 - f_{1\infty})(f_2 - f_{2\infty}) f_1}{h(2-h) f_1 + 2} h(2-h), \text{ где } f_{1\infty} = \frac{h}{h-1}, \quad f_{2\infty} = \frac{h(4-h)}{(h-1)(2-h)},$$

причем $f_{10} < f_{1\infty} < f_{2\infty} < f_{20}$. Особые точки уравнения (6.4): $A(f_1 = f_2 = 1)$ — седло, $B\left(f_1 = \frac{-h(4-h)}{(2-h)^2}, \quad f_2 = \frac{h(4-h)}{(2-h)^2}\right)$ — узел, $C\left(f_1 = \frac{h}{h-1}, \quad f_2 = 0\right)$ — узел, $D\left(f_1 = \frac{4-h}{2-h}\frac{h}{h-1}, \quad f_2 = 0\right)$ — седло, $E(f_1 = \pm\infty, \quad f_2 = \mp\infty)$ — дикритические узлы, $O(f_1 = f_2 = 0)$ — узел.

Приведенное на фиг. 3 взаимное расположение точек и линий получается в результате несложных выкладок. Согласно асимптотике (6.3), интегральная кривая (l) выходит из седла A по его сепаратрисе по направлению

$$df_2/df_1 = -(\varkappa + 5)/(3\varkappa - 1),$$

причем при $K > 0$ в сторону возрастания, а при $K < 0$ — убывания величины f_1.

А. $K > 0$. Сепаратриса седла A, совпадающая с кривой (l), неминуемо достигает точки C, так как $f_2 = 0$ — интеграл уравнения (6.4). Согласно квадратуре (6.5), при изменении f_2 от 1 до 0 значение η меняется от ∞ до 0, причем при $\eta \to 0$ функция $f_2 \sim \eta^{-2/(h-1)(h-2)}$, а $f_1 \simeq h/(h-1)$. Линия $\eta = 0$ соответствует свободной границе. Это следует из представления (6.2) и приведенных асимптотик при $\eta \to 0$.

Б. $K < 0$. Искомая интегральная кривая уравнения (6.4) из седла А по его сепаратрисе, идущей в сторону убывания величины f, попадает в узел B. Из узла B через бесконечно удаленный дикритический узел E интегральная кривая по сепаратрисе седла D, отличной от интеграла $f_2 = 0$, попадает в точку D (см. фиг. 3). Возникающий при этом излом интегральной кривой в узле B допустим, ибо точка B соответствует характеристике исходной газодинамической системы. Уравнение свободной границы при $-1 < t < -1 + \varepsilon$ и достаточно малом ε в главном члене будет $\eta = \eta_D$, $\eta_D < 0$, где η_D — значение η, соответствующее точке D. Выполнение соответствующих условий на свободной границе следует из получающихся в окрестности точки D и значения η_D асимптотик:

$$f_2 \approx -\sqrt{\frac{(h+1)(4-h)}{2+h}\left(f_1 - \frac{(4-h)h}{(2-h)(h-1)}\right)}, \quad f_2^2 \approx \frac{-4(4-h)h^2}{(2-h)^2(h-1)\eta_D}(\eta - \eta_D).$$

Из асимптотики полученного уравнения свободной границы в плоскости rt

$$r \approx -t + \eta_D(1 + t)^{(4-\varkappa)/(2-\varkappa)}$$

следует, что движение свободной границы при $t > -1$ ускорено.

Основной результат исследования: скорость свободной границы остается постоянной на временном интервале (t_0, t_1), где момент t_0 соответствует началу истечения, а момент t_1 совпадает с моментом $t_ф$ прихода свободной границы на ось цилиндра, если показатель адиабаты $\varkappa \leqslant 2$, и $t_1 < t_ф$, если $\varkappa > 2$. В частности, при $\varkappa > 3$ момент t_1 совпадает с моментом t_0, если газ до начала истечения покоился.

Поступила 10 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каждан Я. М.** Асимптотика сходящейся волны разрежения.— В кн.: Труды секции по численным методам в газовой динамике II Междунар. коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Т. 3. М.: изд. ВЦ АН СССР, 1971.

УДК 533.601.1

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРА С УСТАНОВЛЕННЫМ ВПЕРЕДИ ДИСКОМ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

И. А. Белов, Е. Ф. Жигалко

(Ленинград)

Рассматривается осесимметричное обтекание сверхзвуковым потоком цилиндра диаметра D с установленным впереди на тонкой перемычке длиной l диском диаметра $d < D$. На диске происходит срыв потока, и вблизи поверхности тела появляется область циркуляционного течения, отделенная от внешнего потока зоной смешения, охватывающей некоторую «разделяющую поверхность тока», исходящую с кромки диска и попадающую на торец цилиндра.

Учитывая особенности исследуемого течения, решение поставленной задачи наиболее корректно строить в постановке на основе системы точных уравнений Навье — Стокса. Но при всей перспективности такого подхода даже для достаточно эффективных вычислительных алгоритмов решение уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости удается пока получить лишь при малых и средних числах Рейнольдса. Другой подход заключается в построении адекватной математической модели, которая по возможности учитывала бы основные характерные черты исследуемого течения.

В качестве такой приближенной модели выберем расчетную модель, в которой результат получается из применения численного метода «крупных частиц» [1, 2] к уравнениям, описывающим движение идеального газа — она воспроизводит срывное обтекание тела в процессе установления решения, соответствующего стационарному течению. Модель идеальной жидкости использована в ряде работ при исследовании отрывных течений, в том числе в передней части тела с иглой (см., например, [3, 4]). Среди мотивов, определяющих плодотворность применения расчетной модели, основным, по-видимому, является то, что такая модель надежно воспроизводит основные элементы течения вне циркуляционной зоны. Форма и размеры этой зоны определены в большой мере геометрией компоновки. Здесь размещается крупномасштабный единый вихрь, отделенный от стенок и внешнего потока сравнительно тонким вязким слоем, в котором поперечный градиент давления мал и который, по крайней мере начиная с некоторого значения числа Рейнольдса (по данным [5] с $\mathrm{Re} \geqslant 500$), не оказывает существенного влияния на распределение давления по поверхности обтекаемого тела. Можно ожидать, что для тела рассматриваемой компоновки при $d < D$, $l \sim D$ местное число Рейнольдса для течения в циркуляционной области будет доволь-