$\div 2{,}0)R_2$ в зависимости от радиуса R_1 на входе. При течении вязкоупругих жидкостей длиной L будет размер участка релаксации нормальных напряжений. Для жидкостей, описываемых моделью Де Витта, с увеличением We наблюдается рост L на 10—15 % по сравнению с потоками ньютоновских жидкостей.

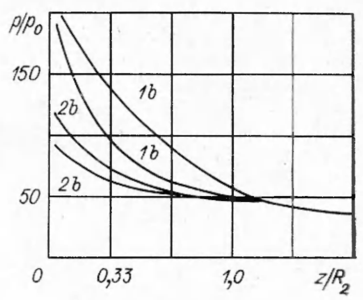

Рис. 3 (1b, 2b внизу следует читать 1a,2a).

Длину участка ГДС можно оценить и по распределению давления в двухслойном потоке. На рис. 3 представлены кривые изменения давления на границе раздела ньютоновских жидкостей по длине канала в зависимости от радиуса внутреннего канала R_1. Здесь $Q^a = 60 \cdot 10^{-9}$ м³/с, $Q^b = 30 \cdot 10^{-9}$ м³/с, $\mu^a = 4000$ Па·с, $\mu^b = 2000$ Па·с. Кривые 1a, 1b соответствуют давлениям $p^a(R_z(z), z)$ и $p^b(R_z(z), z)$ при $R_1 = 0{,}4R_2$, а кривые 2a, 2b — давлениям при $R_1 = 0{,}65R_2$. Как и следует из граничных условий (1.7), в общем случае поле давлений разрывно на поверхности раздела. Но в области установившегося течения, когда линия поверхности раздела слоев параллельна оси z и нормальные напряжения в ньютоновских жидкостях нулевые, давления p^a, p^b на границе раздела равны. Из рис. 3 видно, что во втором случае, когда координаты $R_z(z)$ практически не меняются по длине канала (для данных отношений вязкостей и отношений расходов в установившемся течении $R_z = 0{,}67R_2$), участок ГДС имеет меньшие размеры, чем в первом. При этом величина перепада давления во втором случае также меньше, что связано с меньшими затратами энергии на перестройку профиля скорости двухслойного потока.

Таким образом, условия на входе в зону совместного течения во многом определяют характер двухслойного течения на начальном участке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хан Ч. Д.** Реология в процессах переработки полимеров.— М.: Химия, 1979.
2. **Первадчук В. П., Лялькина Г. Б., Казаченко Т. А.** Стационарное двухслойное течение вязкоупругих расплавов полимеров в цилиндрическом канале // ИФЖ.— 1989.— Т. 56, № 1.
3. **Давыдов А. Р., Первадчук В. П., Труфанова Н. М., Янков В. И.** Исследование двухслойного течения расплавов полистирола и полиметилметакрилата в цилиндрическом канале при соэкструзии // Химические волокна.— 1989.— № 3.
4. **Панов А. К., Дорохов И. Н.** Многослойное течение расплавов полимеров в плоскощелевом канале // ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 4.
5. **Ануфриев В. А., Лукач Ю. Е., Петухов А. Д., Яхно Д. М.** Экспериментальное исследование начального участка при двухслойном течении вязких жидкостей // Гидравлика и гидротехника.— Киев: Техника, 1977.— Вып. 24.
6. **Подгаец Р. М.** Конечно-элементный анализ многослойного течения несмешивающихся жидкостей // Краевые задачи.— Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1985.
7. **Численные** методы исследования течения вязкой жидкости/А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел и др.— М.: Мир, 1972.
8. **Шкадов В. Я., Запрянов З. Д.** Течения вязкой жидкости.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
9. **Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.** Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВММФ.— 1965. — Т. 5, № 5.

г. Пермь, г. Тверь

Поступила 5/IV 1989 г.,
в окончательном варианте — 26/I 1990 г.

УДК 532.59

А. В. Марченко

О РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

В работе исследуются нелинейные взаимодействия волн в тяжелой жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает тонкая вязкоупругая пластина, моделирующая ледяной покров [1]. Источником возмущений в жидкости является переменное поле внешнего давления, перемещающееся по поверхности ледяного покрова.

Известно (см., например, [2, 3]), что в зависимости от скорости движения источника возбуждение волн с определенным волновым числом k_0 имеет резонансный характер. В связи с этим представляют интерес изучение резонансного возбуждения волн в жидкости полем внешнего давления, имеющим форму слабомодулированных волновых пакетов, спектр которых отличен от нуля в окрестности волновых чисел $k = mk_0$ ($m \in Z$), и исследование влияния нелинейности задачи на ограничение амплитуды волн при резонансе.

Резонансное взаимодействие гармоник капиллярных волн на поверхности идеальной жидкости рассмотрено в [4—9]. В [10, 11] изучался процесс резонансного возбуждения волн в тяжелой жидкости со свободной поверхностью периодическим полем внешнего давления.

1. Потенциальные движения тяжелой несжимаемой жидкости с потенциалом скоростей φ в безразмерном виде описываются уравнением Лапласа $\Delta\varphi + \partial_{zz}\varphi = 0$ ($\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$) с граничным условием непротекания на дне $\partial_z\varphi = 0$, $z = -H$ и динамическим и кинематическим условиями на неизвестной поверхности $z = \varepsilon\eta$ [12]:

$$\partial_t\eta + \varepsilon\nabla\varphi^s\nabla\eta - \varphi_z^s(1 + \varepsilon^2(\nabla\eta)^2) = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t\varphi^s + (1/2)\,\varepsilon\left[(\nabla\varphi^s)^2 - (\varphi_z^s)^2(1 + \varepsilon^2(\nabla\eta)^2)\right] + p/\rho = 0,$$

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y), \ \varepsilon = a/\lambda \ll 1.$$

Здесь φ^s, φ_z^s — значения φ и $\partial_z\varphi$ на поверхности $z = \varepsilon\eta$; p, ρ — давление и плотность жидкости; a, $2\pi\lambda$ — характерные амплитуда и длина волны. В качестве характерных значений потенциала φ, времени t, горизонтальных координат x, y и вертикальной координаты z взяты соответственно $a\sqrt{g\lambda}$, $\sqrt{\lambda/g}$, λ.

На поверхности жидкости плавает тонкая вязкоупругая пластина, моделирующая ледяной покров [1]. Давление в жидкости на подледной поверхности p связано с внешним давлением p_0 соотношением [1]

$$(p - p_0)/\rho = \left(\sum_{\alpha,\beta}(\sigma_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}\partial_t)\,\partial_{\alpha\beta} + D\Delta^2\right)\eta = \widehat{L}\eta, \tag{1.2}$$

$$(\alpha, \beta) = (x, y), \quad D = Eh^3/(12(1 - \nu^2)\rho g\lambda^4),$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = h\sigma'_{\alpha\beta}/(\rho g\lambda^2), \quad \mu_{\alpha\beta} = h\mu'_{\alpha\beta}/\left(\rho\lambda^2\sqrt{g\lambda}\right),$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины; $\mu'_{\alpha\beta}$ — коэффициенты вязкости пластины; $\sigma'_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений, создаваемых в ледяном покрове внешними нагрузками (например, воздействием ветра); h — толщина пластины.

Для изучения процессов резонансного возбуждения волн полем внешнего давления, имеющим вид слабомодулированных волновых пакетов, представим p_0 в виде

$$p_0/\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m(X, Y, t)\exp i\theta_m, \quad \theta_m = mk_0x, \quad p_m = p^*_{-m}, \ (X, Y) = (\varepsilon x, \varepsilon y)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение).

Выражая решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничному условию на дне, через интеграл Фурье и полагая в нем $z = 0$, находим

$$\left(\varphi^0, \varphi_z^0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}, t)(1, s)\exp i\theta d\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

Здесь $s = k\,\mathrm{th}\,kH$; $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$; $k = |\mathbf{k}|$; $\theta = (\mathbf{kx})$; φ^0, φ_z^0 — значения φ и $\partial_z\varphi$ при $z = 0$.

Решение (1.1) будем искать в виде слабомодулированных волновых пакетов, фурье-образы которых отличны от нуля в ε-окрестности точек $\mathbf{k}_m = (mk_0, 0)$. Отсюда следует, что φ^0, φ_z^0 могут быть представлены как

$$\left(\eta, \varphi^0, \varphi_z^0\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\eta_m, \varphi_m^0, \varphi_{z,m}^0\right)\exp i\theta_m,$$

$$\left(\eta_m, \varphi_m^0, \varphi_{z,m}^0\right) = \left(\eta^*_{-m}, \varphi^{0*}_{-m}, \varphi^{0*}_{z,-m}\right).$$

Функции η_m, φ_m^0, $\varphi_{z,m}^0$ зависят от X, Y, t. Из (1.3) имеем

(1.4)

$$\varphi_{z,m}^0 = \widehat{F}_m\varphi_m^0, \quad \widehat{F}_m = s_m - i\varepsilon s_{m,1} - (1/2)\,\varepsilon^2(s_{m,11}\partial_{xx} + s_{m,22}\partial_{yy}) + O(\varepsilon^3),$$

s_m, $s_{m,1}$, $s_{m,11}$, $s_{m,22}$ — значения s, $\partial s/\partial k_x$, $\partial^2 s/\partial k_x^2$, $\partial^2 s/\partial k_y^2$ при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_m$.

В уравнение (1.1) входят функции φ^s и φ_z^s, которые с использованием разложений φ и $\partial_z\varphi$ в ряды по степеням ε в окрестности $z = 0$ можно выразить через φ^0, φ_z^0, после чего из (1.3), (1.4) получаем

(1.5)
$$(\varphi^s, \varphi_z^s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\varphi_m, \varphi_{z,m}) \exp(i\theta_m),$$

$$\varphi_{z,m} = \widehat{\Phi}_m(\varphi), \ \widehat{\Phi}_m(\varphi) = \widehat{F}_m\varphi_m + \varepsilon \sum_{l=-\infty} (r_{ml}\eta_l\varphi_{m-l} +$$

$$+ i\varepsilon(d_{ml}\eta_l\partial_X\varphi_{m-l} + g_{ml}\varphi_{m-l}\partial_X\eta_l)) + \varepsilon^2 \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} f_{mln}\eta_l\eta_n\varphi_{m-l-n} + O(\varepsilon^3).$$

Коэффициенты r_{ml}, d_{ml}, g_{ml}, f_{mln} зависят от значений k_0, s_m, $s_{m,1}$.

Подставляя (1.5) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, имеем с точностью до $O(\varepsilon^2)$ бесконечномерную систему уравнений

(1.6)

$$\partial_t\eta_m - \widehat{F}_m\varphi_m - \varepsilon \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(r_{ml}^1\eta_l\varphi_{m-l} + i\varepsilon\left(d_{ml}^1\eta_l\partial_X\varphi_{m-l} + g_{ml}^1\varphi_{m-l}\partial_X\eta_l\right)\right) -$$

$$- \varepsilon^2 \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} f_{mln}^1\eta_l\eta_n\varphi_{m-l-n} = 0,$$

$$\partial_t\varphi_m + \left(\widehat{L}_m^0 + \varepsilon\widehat{L}_m^1 + \varepsilon^2\widehat{L}_m^2\right)\eta_m - \varepsilon \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(r_{ml}^2\varphi_l\varphi_{m-l} + i\varepsilon d_{ml}^2\varphi_l\partial_X\varphi_{m-l}\right) -$$

$$- \varepsilon^2 \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} f_{mln}^2\eta_n\varphi_l\varphi_{m-l-n} + p_m = 0.$$

Операторы $\widehat{L}_m^n$ определяются из соотношений

$$\left(\widehat{L} + 1\right)\eta = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n\left(\widehat{L}_m^n\eta_m\right)\exp i\theta_m.$$

Например,

$$\widehat{L}_m^0 = \widehat{L}(\mathbf{k}), \ \widehat{L}(\mathbf{k}) = 1 - \sum_{\alpha,\beta} (\sigma_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}\partial_t)\,k_\alpha k_\beta + D\left(k_x^2 + k_y^2\right)^2.$$

Коэффициенты f_{mln}^i, r_{ml}^i, d_{ml}^i, g_{ml}^i также выражаются через комплекс k_0, s_m, $s_{m,1}$.

Если в начальный момент времени жидкость покоилась, то решение (1.6) должно удовлетворять начальным условиям

(1.7)
$$\varphi_m = \eta_m = 0, \ t = 0.$$

2. Рассмотрим задачу о генерации волн периодическим полем внешнего давления, перемещающимся вдоль оси x со скоростью $c = \omega/k_0$. В этом случае $p_m = p_m' \exp(im\omega t)$, $p_m' = \text{const}$. Сделаем в (1.6) замену

$$\eta_m = \eta_m'(t)\exp(im\omega t), \quad \varphi_m = \varphi_m'(t)\exp(im\omega t)$$

и введем новые переменные

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{L_m}{\omega_m}}\,\eta_m' + i\sqrt{\frac{\omega_m}{L_m}}\,\varphi_m'\right), \quad L_m = \widehat{L}(\mathbf{k})\,e^{im\omega t}, \quad \omega_m^2 = L_m s_m.$$

При $\mu_{\alpha\beta} = 0$ система (1.6) с точностью до $O(\varepsilon)$ записывается в гамильтоновой форме

$$\partial_t u_m = -i\partial H/\partial u_m^*, \tag{2.1}$$

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\Delta_m u_m u_m^* + g_m\left(u_{-m} + u_m^*\right)\right) + \varepsilon \sum_{m,l=-\infty}^{\infty}\left[\alpha_{ml}\left(u_{-m}u_l u_{m-l} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + u_{-m}^* u_l^* u_{m-l}^*\right) + \beta_{ml}\left(u_m u_l^* u_{m-l}^* + u_m^* u_l u_{m-l}\right)\right],$$
$$\Delta_m = \omega_m - m\omega, \quad g_m = \sqrt{\omega_m/(2L_m)}\, p_m'.$$

Коэффициенты α_{ml}, β_{ml} определяются через комплекс k_0, s_m, $s_{m,1}$ и ω_m.

Отметим, что кубически нелинейные члены в уравнениях (1.6), имеющие порядок $O(\varepsilon^2)$, не могут быть представлены в виде частных производных по u_m^* и u_m от гамильтониана H. Поэтому запись уравнений (1.6) в канонической форме (2.1) верна с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$. Канонические переменные u_m при $h = 0$ совпадают с каноническими переменными уравнений движения жидкости со свободной поверхностью, найденными в [13].

В данной задаче возможны внутренние резонансы, условия наступления которых определяются соотношениями

$$\Delta_m = \Delta_n = 0, \ m \neq n. \tag{2.2}$$

При внутреннем резонансе возбуждение m-й гармоники происходит в результате нелинейного взаимодействия n-й и $(m - n)$-й гармоник. В жидкости со свободной границей условия (2.2) невыполнимы. Полагая $n = 1$ и разрешая (2.2) относительно k, находим

$$k_m = \frac{m\sigma_{xx} + \sqrt{m^2\sigma_{xx}^2 + 4mD\left(m^2 + m + 1\right)}}{2mD\left(m^2 + m + 1\right)}.$$

В нулевом порядке по ε решение (2.1), удовлетворяющее (1.7), запишем в виде

$$u_m = ig_m\left(e^{-i\Delta_m t} - 1\right)/\Delta_m. \tag{2.3}$$

В резонансном случае $\Delta_m = O(\varepsilon)$ решение (2.3) имеет смысл при $t \leqslant 1$. При больших временах эволюции становятся существенны нелинейные эффекты, ограничивающие рост амплитуды m-й гармоники, за счет ее самовоздействия и перекачки энергии в другие гармоники.

При $\Delta_1 = O(\varepsilon)$, $\Delta_m = O(\varepsilon)$ решение (2.1) ищем в форме

$$u_j = u_j'(T) + \varepsilon u_j''(t) \quad (j = 1, m), \quad u_k = u_k''(t) + \varepsilon u_k'(T) \quad (k > 0),$$
$$u_k = u_k(t) \quad (k < 0), \quad T = \varepsilon t,$$

где $u_k''(t)$ в нулевом порядке по ε определяются формулами (2.3) и являются быстроосциллирующими частями возмущения жидкости, а $u_k'(T)$ находятся из уравнений (далее штрихи опускаются)

$$\partial_t u_k = -i\partial\widetilde{H}/\partial u_k^*, \quad \widetilde{H} = H_{m,1} + H_{m,2}, \tag{2.4}$$

$$H_{m,1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Delta_k u_k u_k^* + \varepsilon\sum_{l=1}^{k-1}\beta_{kl}u_k^* u_l u_{k-l}\right) + \varepsilon\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{l=1}^{k-1}\beta_{kl}u_k u_l^* u_{k-l}^* +$$
$$+ \varepsilon\left(\gamma_1 u_1^* + \gamma_m u_m^* + \gamma_1^* u_1 + \gamma_m^* u_m\right), \quad H_{m,2} = \varepsilon\sum_{k=m+2}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\beta_{kl}u_k u_l^* u_{k-l}^*,$$
$$\gamma_k = g_k/\varepsilon.$$

Система (2.4) имеет интеграл $\widetilde{H} = \mathrm{const}$. Фазовые кривые, лежащие на различных поверхностях уровня $\widetilde{H}$, не могут пересекаться и переходить с одной поверхности на другую. Стационарным решениям (2.4) соответствуют экстремальные точки гамильтониана

(2.5) $$\partial \widetilde{H}/\partial u_k^* = 0, \quad k \in Z.$$

Состояние покоя при $\gamma_{1,\,m} \neq 0$ не является положением равновесия системы (2.4), и ему отвечает гиперповерхность $\widetilde{H} = 0$. Выход на стационарный режим из начального состояния покоя возможен только в том случае, если гамильтониан имеет экстремумы на гиперповерхности $\widetilde{H} = 0$.

Стационарные решения (2.4) находятся в виде ряда

(2.6) $$u_k = \lim_{l \to \infty} S_{l,k}, \quad S_{l,k} = u_k^0 + \delta_1 u_k + \ldots + \delta_l u_k.$$

Здесь u_k^0 — точное решение уравнений $\partial H_{m,1}/\partial u_k^* = 0$; $\delta_l u_k$ — решения линеаризованной относительно $\delta_l u_k$ системы (2.5), где значение $H_{m,1}$ берется в точке $u_k = S_{l-1,k} + \delta_l u_k$, а $H_{m,2}$ — в точке $u_k = S_{l-1,k}$. Критерием применимости данного метода является сходимость рядов (2.6).

Рассмотрим для примера случай $\Delta_1 = \varepsilon\Delta$, $\Delta = O(1)$, $\Delta_k = O(1)$. Из (2.5) следует, что u_1^0 — корень уравнения $\Delta u_1 + \beta_{21}^2 |u_1|^2 u_1/\Delta_2 + \gamma_1 = 0$. При $\Delta = 0$ находим $|u_1| = \gamma^{1/3}$, $\gamma = |\Delta_2 \gamma_1/\beta_{21}^2|$. При $\gamma \ll 1$ стационарное решение (2.4) получаем в виде ряда по степеням $\gamma^{1/3}$. Расчеты показывают, что $\widetilde{H} \neq 0$ для этого решения. Поэтому выход на построенный стационарный режим из начального состояния покоя невозможен.

При $\Delta_{1,m} = O(\varepsilon)$ решение (2.4) имеет следующую структуру:

(2.7) $$|u_k| = O\left(\varepsilon^{\nu_k}\right), \quad \nu_k = \min(k - m\,[k/m],$$
$$m([k/m] + 1) - k) \ (k > m), \ \nu_k = \min(k - 1, \ m - k) \ (1 < k < m, \ m > 0).$$

В частности, в отсутствие внутренних резонансов выполняется $|u_k| = O(\varepsilon^{k-1})$. При резонансе на 2-й гармонике ($m = 2$) имеем $|u_k| = O(\varepsilon^{k-2})$, $k \geqslant 2$.

Из (2.7) вытекает, что из (2.4) можно с точностью до $O(\varepsilon^2)$ исключить все члены, кроме резонансно взаимодействующих u_1 и u_m. При $m > 2$ в уравнениях взаимодействия u_1 и u_m будут присутствовать кубически нелинейные члены, имеющие порядок $O(\varepsilon^2)$. Отметим, что при выводе уравнений (2.1) из (2.4) кубические члены не учитывались.

3. Уравнения взаимодействия 1-й и m-й гармоник выводятся из (1.6) с использованием свойства (2.7). При $m > 2$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ получим

(3.1) $$\left(i\widehat{D}_{1,j} + \varepsilon\widehat{D}_{2,j} + \widetilde{\Delta}_j\right)\varphi_j = \varepsilon\left((\varkappa_{j1}|\varphi_1|^2 + \varkappa_{jm}|\varphi_m|^2 + \alpha_j \partial_T \varphi_0 + \beta_j \partial_X \varphi_0)\varphi_j + \right.$$
$$\left. + \delta_{3m}\nu_j F_j\right) + \widetilde{p}_j \quad (j = 1, m), \ F_1 = \varphi_1^{*2}\varphi_3, \ F_3 = \varphi_1^3,$$
$$(\partial_{TT} - H\Delta)\varphi_0 = \widehat{D}_{0,1}|\varphi_1|^2 + \widehat{D}_{0,m}|\varphi_m|^2,$$
$$\widehat{D}_{1,j} = (1 + i\mu_j)\,\partial_T + \mathbf{V}_j \cdot \nabla,$$
$$\widehat{D}_{2,j} = W_{j,XX}\partial_{XX} + 2W_{j,XY}\partial_{XY} + W_{j,YY}\partial_{YY} - \frac{1}{2j\omega}\partial_{TT} - i\,U_j \partial_{XT},$$
$$\widehat{D}_{0,j} = \left(j^2 k_0^2 - s_j^2\right)\partial_T - 2k_0\omega^{-1}s_j \partial_X, \quad \mathbf{V}_j = \frac{1}{2\omega}\nabla_k (Ls)\big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_j},$$
$$W_{j,\alpha\beta} = \frac{1}{4j\omega}\left.\frac{\partial^2 (Ls)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_j}, \quad U_j = -\mu_{xx}k_0(s_m + mk_0 s_{m,1})/\omega,$$
$$\widetilde{\Delta}_j = \left(j^2\omega^2 - \omega_j^2\right)/(2j\varepsilon\omega),$$
$$\widetilde{p}_j = (\varepsilon\partial_T p_j - ij\omega p_j)/(2j\varepsilon\omega).$$

Уравнения взаимодействия 1-й и 2-й гармоник с точностью до $O(\varepsilon)$ имеют вид

$$(\widehat{D}_{1,j} - i\widetilde{\Delta}_j)\varphi_j = T_j N_j - i\widetilde{p}_j \quad (j = 1, 2),$$
$$(\partial_{TT} - H\Delta)\varphi_0 = \widehat{D}_{0,1}|\varphi_1|^2 + \widehat{D}_{0,2}|\varphi_2|^2,$$
$$N_1 = \varphi_1^*\varphi_2, \quad N_2 = \varphi_1^2.$$

Выражения для коэффициентов $\varkappa_{ij}$, α_j, β_j, ν_j, T_j в силу их громоздкости не приводятся.

Если толщину пластины h устремить к нулю, то выполнение условий генерации высших гармоник невозможно. Уравнения (3.1) при этом переходят в систему уравнений Дэви — Стюартсона [8, 9]. При $\mu_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = 0$, $H \to \infty$ уравнения (3.1) вырождаются в нелинейное уравнение Шредингера

$$(3.2)\quad i(\partial_T + \omega'\partial_X)\varphi_1 + (\varepsilon/2)(\omega''\partial_{XX} + \omega' k_0^{-1}\partial_{YY})\varphi_1 + \tilde{\Delta}_1\varphi_1 = \varepsilon\varkappa|\varphi_1|^2\varphi_1 + \tilde{p}_1,$$
$$\varkappa = k_0^4(2 - 13Dk_0^4)/(\omega(1 - 14Dk_0^4)).$$

При $\tilde{p}_1 = \tilde{\Delta}_1 = 0$, $\varkappa\omega'' < 0$ периодическое решение (3.2) неустойчиво, что приводит к распаду огибающей волны на отдельные солитоны. Солитонные решения (3.2) в одномерном случае запишем как

$$\varphi_1 = \psi(\zeta)\exp[i(rX + sT)],\ \zeta = X - vT,$$
$$\psi = A\,\mathrm{ch}^{-1}(B\zeta),\ v = \omega' + \varepsilon r\omega'',$$
$$A = \sqrt{-2R/(\varepsilon\varkappa)},\ B = \sqrt{2R/(\varepsilon\omega'')},\ R = s + r\omega' + \varepsilon r^2\omega''/2.$$

В случае совпадения скорости солитона огибающей с фазовой скоростью ω/k_0 волны, бегущей под ним, волновой пакет $\varphi = \varphi_1 \times \exp[i(\theta_1 - \omega t)]$ является солитоном с осциллирующей структурой. В нулевом порядке по ε данное условие выполняется прп $\omega' = \omega/k_0$. Разрешая это соотношение относительно k_0, находим $k_0 = (3D)^{-1/4}$.

4. Исследуем влияние малой вязкости пластины на развитие колебаний в бесконечно глубокой жидкости, возбуждаемых периодическим внешним давлением на ее поверхности. Рассматривается случай отсутствия внутренних резонансов, т. е.

$$\Delta_1 = \varepsilon(\Delta + i\mu) = O(\varepsilon),\ \Delta_k = O(1),\ k \neq 1\quad (\mu = k_0^2\mu_x/(2\varepsilon),$$

Δ — частотная расстройка). Из (3.2) находим, что этот процесс описывается уравнением

$$(4.1)\qquad i\partial_T\varphi + (\Delta + i\mu)\varphi = \varepsilon\varkappa|\varphi|^2\varphi + p,\ p \equiv \tilde{p}_1 = \mathrm{const},\ \varphi \equiv \varphi_1,$$

которое при $\mu = 0$ имеет интеграл

$$H = -\Delta(\Phi^2 + \psi^2) + \varepsilon\varkappa(\Phi^2 + \psi^2)^2/2 + 2p\Phi,\ \varphi = \Phi + i\psi.$$

Введем обозначение $E = \Phi^2 + \psi^2$. Из (4.1) при $\mu = 0$ находим

$$\partial_T E = \sqrt{P_4(E)},\ P_4(E) = -H^2 + 2E(2p^2 - \Delta H) +$$
$$+ E^2(\varepsilon\varkappa H - \Delta^2) + \varepsilon\Delta\varkappa E^3 - \varepsilon^2\varkappa^2 E^4/4.$$

Решение полученного уравнения $E = E(T)$ выражается через эллиптические функции. Постоянная H выбирается из начальных условий при $t = 0$. Отметим, что $P_4(E) \geqslant 0$ при $t = 0$. При больших E выполняется $P_4(E) < 0$. Поэтому у уравнения $P_4(E) = 0$ всегда имеется положительный корень. Движение при любых начальных условиях происходит в ограниченной области на фазовой плоскости (Φ, ψ). У уравнения (4.1) при $\mu \ll 1$ есть особые точки на плоскости (Φ, ψ), которые находятся из

$$(4.2)\qquad \varepsilon\varkappa\Phi^3 - \Delta\Phi + p = O(\mu^2),\ \psi = \mu\Phi/(\varepsilon\varkappa\Phi^2 - \Delta).$$

При $D = 4\Delta^3/(27\varepsilon\varkappa) - p^2 > 0$ первое уравнение (4.2) имеет три действительных корня, которые записываются в виде

$$\Phi_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\Delta}{\varepsilon\varkappa}}\sin(\chi + 2(i-1)\pi/3),\quad \chi = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}\,p\sqrt{\varepsilon\varkappa}}{\Delta\sqrt{\Delta}}\right),\ i = 1 - 3.$$

Прп $D = 0$ есть два действительных корня, один из которых двукратный $\Phi_2 = \Phi_3 = \sqrt{\dfrac{\Delta}{3\varepsilon\varkappa}}$, $\Phi_1 = -2\sqrt{\dfrac{\Delta}{3\varepsilon\varkappa}}$, при $D < 0$ — только один действительный корень. Например, при точном резонансе $\Phi_1^0 = -(p/(\varepsilon\varkappa))^{1/3}$,

$\Delta = 0$. Каждой особой точке отвечает стационарное решение (4.1). Точка Φ_1^0 при $\Delta = 0$ соответствует стационарному резонансному решению, полученному в п. 2 в виде ряда по степеням $\gamma^{1/3}$.

Исследуем устойчивость стационарных решений. Линеаризуя уравнение (4.1) в окрестности особых точек, с точностью до $O(\mu)$ находим

$$x_t = X^i x,\ x = (x_1, x_2),\ \Phi = \Phi_i + x_1,\ \psi = \psi_i + x_2,$$

$$X_{jj}^i = \mu\left(\frac{2\varepsilon\varkappa\Phi_i^2(-1)^{i-1}}{2\varepsilon\varkappa\Phi_i^2 - \Delta} - 1\right),\quad X_{jk}^i = (-1)^k\left(\varepsilon\varkappa\left(2 + (-1)^j\right)\Phi_i^2 - \Delta\right)$$

$$(j, k = 1, 2).$$

Собственные числа матриц X^i равны

$$\lambda_i^{\mp} = -\mu \pm i\sqrt{\left(\varepsilon\varkappa\Phi_i^2 - \Delta\right)\left(3\varepsilon\varkappa\Phi_i^2 - \Delta\right)} + O(\mu^2). \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что при $D < 0$ особая точка является устойчивым фокусом и отвечающее ей решение асимптотически устойчиво. При $D = 0$ одна особая точка есть устойчивый фокус, а другая — устойчивый узел. Оба стационарных решения в этом случае асимптотически устойчивы. При $0 < D < D_1$, где D_1 определяется из условия $\lambda_2^+ = 0$, появляется еще одна особая точка — устойчивый узел. Соответствующее ей решение асимптотически устойчиво. При $D > D_1$ имеются три особые точки: устойчивый фокус, устойчивый узел и седло. Решения, отвечающие фокусу и узлу, асимптотически устойчивы, а решение, соответствующее седлу, неустойчиво. Отметим, что при $\mu = 0$ особые точки $\Phi_{1,3}$ являются центрами и отвечающие им решения устойчивы по Ляпунову.

Существует волновое число $k = (2/(13D))^{1/4}$, при котором $\varkappa = 0$, и решение (4.1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, примет вид $\varphi = \frac{p}{\Delta + i\mu}\left(e^{(i\Delta - \mu)t} - 1\right)$. При $t \to \infty$ данное решение выходит на стационарный режим $\varphi_s = -p/(\Delta + i\mu)$ и при малых Δ, μ имеет максимальную амплитуду.

5. В бесконечно глубокой жидкости под упругой пластиной взаимодействие 1-й и 2-й гармоник в одномерном случае при $\mu_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = p_{1,2} = \Delta_{1,2} = 0$ описывается уравнениями

$$\partial_T\varphi_1 + \omega_1'\partial_X\varphi_1 = k_2^2\overset{*}{\varphi}_1\varphi_2,$$
$$\partial_T\varphi_2 + \omega_2'\partial_X\varphi_2 = (1/2)k_2^2\varphi_1^2,\quad k_2 = (14D)^{-1/4}. \tag{5.1}$$

Уравнения (5.1) имеют интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\varphi_1|^2 + 2|\varphi_2|^2\right)dX = \mathrm{const},\quad \varphi_{1,2} \to 0,\ |X| \to \infty,$$

из которого следует, что если в начальный момент времени вся энергия волн сосредоточена в 1-й гармонике, то с течением времени энергии гармоник станут сравнимы по величине. Процесс перекачки энергии между гармониками периодического характера описывается эллиптическими функциями [14].

Уравнения взаимодействия 1-й и m-й гармоник в одномерном случае при $\mu_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = p_{1,m} = \Delta_{1,m} = 0$ выглядят следующим образом [15]:

$$i\left(\partial_T\varphi_j + \omega_j'\partial_X\varphi_j\right) + (1/2)\,\varepsilon\omega_j''\partial_{XX}\varphi_j = \varepsilon\widetilde{N}_j, \tag{5.2}$$

$$\widetilde{N}_j = \left(\varkappa_{j1}|\varphi_1|^2 + \varkappa_{jm}|\varphi_m|^2\right)\varphi_j + \delta_{m3}\nu_jF_j,$$

$$j = 1, m,\quad \nu_1 = -\frac{177}{390D},\quad \nu_3 = -\frac{27}{65D}.$$

Уравнения (5.2) при $m = 3$ имеют интеграл

$$(5.3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi_1|^2 + (\nu_1/\nu_3)|\varphi_3|^2)\, dX = \mathrm{const}, \quad \varphi_{1,3} \to 0, \quad |X| \to \infty.$$

При $m > 3$ из (5.2) вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j|^2\, dX = \mathrm{const}, \quad \varphi_j \to 0, \quad |X| \to \infty.$$

Из (5.3) следует, что взаимодействие 1-й и 3-й гармоник обладает свойством, похожим на взаимодействие 1-й и 2-й гармоник: если в начальный момент времени вся волновая энергия сосредоточена в 1-й гармонике, то с течением времени энергии 1-й и 3-й гармоник станут сравнимы по величине. Различие состоит в характерных временах процессов. При взаимодействии 1-й и 2-й гармоник характерное время перекачки энергии порядка $O(\varepsilon^{-1})$, при взаимодействии 1-й и 3-й гармоник — порядка $O(\varepsilon^{-2})$. В случае взаимодействия периодических волн (зависимость от X в (5.2) отсутствует) решение (5.2) выражается через эллиптические функции формулами

$$\varphi_j = \sqrt{-\nu_j z_j} \exp(if_j) \quad (j = 1, 3), \quad z_1^2 + z_3^2 = C^2 = \mathrm{const},$$

$$P_3(z_1) + \nu_1 \sqrt{\nu_1\nu_3 z_1^2 z_3} \cos\gamma = 0, \quad \gamma = f_3 - 3f_1,$$

$$P_3(z_1) = (2\varkappa_{13}\nu_3 - 2\varkappa_{11}\nu_1 + \varkappa_{31}\nu_1 - \varkappa_{33}\nu_3) z_1^3/3 + (\varkappa_{33}\nu_3 - 2\varkappa_{13}\nu_3) C^2 z_1 + \tilde{C},$$

$$\tilde{C} = \mathrm{const},$$

$$z_1' = \sqrt{P_6(z_1)}, \quad f_j' = (\varkappa_{j1}\nu_j z_1^2 + \varkappa_{j3}\nu_3 z_3^2) +$$

$$+ \nu_1 \sqrt{\nu_1\nu_3} \cos\gamma\, z_1^j z_3^{2-j}, \quad P_6(z_1) = \nu_1^3 \nu_3 z_1^4 z_3^2 + P_3^2(z_1).$$

Если $P_6(z_1)$ имеет двукратный корень $z_1 = 0$ и $\partial^2 P_6/\partial z_1^2 > 0$ при $z_1 = 0$, а $P_6(z) > 0$ при $0 < z < z_1(0)$, то $z_1 \to 0$ при $t \to \infty$. Иными словами, с течением времени происходит полная передача энергии 3-й гармонике.

При резонансе на m-й ($m > 3$) гармонике перекачка энергии в данном приближении не происходит. Если в начальный момент времени m-я гармоника мала по сравнению с 1-й, то такой она и останется при временах эволюции $t = O(\varepsilon^{-2})$.

При резонансе на m-й ($m \geqslant 2$) гармонике нелинейные члены уравнений (1.1) при подстановках (1.5), ответственные за обмен энергией между гармониками (амплитудное взаимодействие), имеют порядок $O(\varepsilon^m)$. Члены, ответственные за нелинейное фазовое взаимодействие и самовоздействие гармоник, имеют порядок $O(\varepsilon^3)$. Фазовое взаимодействие и самовоздействие приводят к нелинейному сдвигу частот взаимодействующих волн $\Delta\omega_j = \varepsilon^2(\varkappa_{j1}|\varphi_1|^2 + \varkappa_{jm}|\varphi_m|^2)$ и сохранению их энергии. При $m = 3$ за процессы амплитудного и фазового взаимодействия в уравнениях (5.2) отвечают члены одинакового порядка малости. При $m > 3$ фазовое взаимодействие и самовоздействие преобладают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е.** Морской лед.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. **Богородский В. В., Гаврило В. П., Недошивин О. А.** Разрушение льда: методы, технические средства.— Л.: Гидрометеоиздат, 1983.
3. **Schulkes R. M. S. M., Sneyd A. D.** Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 186.— P. 25.
4. **Mcgoldrick L. F.** On Wilton's ripples: a special case of resonant interactions // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 42, N 4.
5. **Mcgoldrick L. F.** An experiment on second-order cappilary gravity resonant wave interactions // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 40, N 2.
6. **Mcgoldrick L. F.** On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant interaction // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 52, N 4.
7. **Djordjevic V. D., Redekopp L. G.** On two-dimensional packets of capillary-gravity waves // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 79, N 4.

8. **Davey A., Stewartson K.** On three-dimensional packets of surface waves // Proc. Roy. Soc. London A.— 1974.— V. 338.— P. 101.
9. **Абловиц М., Сигур К.** Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.
10. **Нестеров С. В.** Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1986.— Т. 4, № 10.
11. **Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.** О резонансном возбуждении длинных волн в двухслойной жидкости переменным давлением на свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 2.
12. **Юэн Г., Лэйк Б.** Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде.— М.: Мир, 1987.
13. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ.— 1968.— № 2.
14. **Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.** О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1986.— № 4.
15. **Ильичев А. Т., Марченко А. В.** О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1989.— № 1.

г. Владивосток *Поступила 8/VIII 1989 г., в окончательном варианте — 25/I 1990 г.*

УДК 533.72 + 541.182

М. А. Гайдуков, В. А. Коструба, А. В. Терзян

ТЕРМОФОРЕТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ АНСАМБЛЯ УМЕРЕННО КРУПНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Знание закономерностей поведения ансамбля аэрозольных частиц в неизотермическом газе позволяет совершенствовать эффективность многих технологических процессов (производство порошков, улавливание ценных и вредных отходов, содержащихся в атмосфере, и т. д.), а также может быть полезным при разработке методов активного воздействия на облака, как естественные, так и искусственные. Последнее важно, например, при применении аэрозольных веществ в сельском хозяйстве.

Решение задачи о термофорезе состоит в расчете относительного движения неоднородно нагретого газа и взвешенных в нем аэрозольных частиц. Гидродинамический метод расчета, предложенный в [1], содержит в качестве основного предположение о большой удаленности частиц друг от друга, когда каждая из них может фактически рассматриваться как одиночная, находящаяся в неограниченной газовой среде. В [2, 3] на основе данного метода развивается подход, позволяющий исследовать термофоретическое движение произвольной совокупности твердых аэрозольных частиц, расположенных достаточно близко, чтобы взаимодействовать гидродинамически. Под последним понимается взаимодействие, обусловленное тем, что движущаяся частица генерирует в среде поле скорости, влияющее на движение других частиц. В силу сделанных при математической постановке задачи предположений результаты [2, 3] применимы только для ансамбля, состоящего из одинаковых крупных ($\mathrm{Kn} \leqslant 0{,}05$, $\mathrm{Kn} = \lambda/R$, λ — длина свободного пробега молекул газа, R — радиус частиц) и умеренно теплопроводных частиц.

В настоящей работе подход, предложенный в [2, 3], обобщается на случай умеренно крупных и высокотеплопроводных частиц. На основе полученных для установившихся скоростей каждой частицы выражений с помощью ЭВМ рассчитывается поведение линейных ансамблей. Исследуется влияние полидисперсности на процесс укрупнения частиц.

Принимается: газовая среда вдали от частиц покоится, а ее температура является линейной функцией точки; частицы твердые, сферические (необязательно одного размера) распределены в пространстве случайным образом и имеют в начальный момент времени установившиеся скорости $u^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Задача состоит из двух частей. Во-первых, нужно найти поправку к скорости термофореза одиночной умеренно крупной аэрозольной частицы, зависящую от параметров $h_{\alpha k} = R_\alpha / l_{\alpha k}$ (R_α — радиус частицы с номером α, $l_{\alpha k}$ — расстояние между центрами соответствующих частиц), и, во-вторых, рассчитать траекторию частиц.

Оценки показывают [4], что в диапазоне практически реализуемых значений градиентов температур поля скорости, давления и температуры газовой среды (v, p, T_e) определяются квазистационарными уравнениями