$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65L60, 37N30, 37M05, 35C08, 41A15

Метод коллокации для уравнения КдФ–Кавахары на основе тригонометрического базиса B-сплайнов пятой степени

Б. Караагац[1], А. Эсен[2], К.М. Оволаби[3], Е. Пиндза[4,5]

[1]Department of Mathematics Education, Adiyaman University, Adiyaman, Turkey

[2]Department of Mathematics, Inonu University, Malatya, Turkey

[3]Department of Mathematical Sciences, Federal University of Technology Akure, PMB 704, Akure, Ondo State, Nigeri

[4]Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Pretoria, Pretoria 002, South Africa

[5]Department of Mathematics and Statistics, Tshwane University of Technology, Pretoria West, Pretoria 0183, South Africa

E-mails: bkaraagac@adiyaman.edu.tr (Караагац Б.), alaattin.esen@inonu.edu.tr (Эсен А.), kmowolabi@futa.edu.ng (Оволаби К.М.), pinzaedson@gmail.com (Пиндза Е.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 16, 2023.

Караагац Б., Эсен А., Оволаби К.М., Пиндза Е. Метод коллокации для уравнения КдФ–Кавахары на основе тригонометрического базиса B-сплайнов пятой степени // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 263–276.

В данной работе рассматривается эффективный численный метод — метод коллокации — для получения численных решений уравнения КдФ–Кавахары. Численный метод основан на конечно-элементной формулировке и сплайн-интерполяции на основе тригонометрического базиса B-сплайнов пятой степени. Сначала уравнение КдФ–Кавахары распадается на связанное уравнение с использованием вспомогательной переменной вида $v = u_{xxx}$. Затем метод коллокации применяется к связанному уравнению вместе с разностью вперед и формулой Кранка–Николсона. Благодаря этому мы получаем систему алгебраических уравнений в терминах переменных времени и на основе тригонометрического базиса B-сплайнов пятой степени. Для определения ошибки между численным и точным решениями вычисляются нормы ошибки L_2 и L_∞. Результаты иллюстрируются на двух численных примерах с их графическим представлением и сравнением с другими методами.

DOI: 10.15372/SJNM20230303

Ключевые слова: *уравнение КдФ–Кавахары, метод коллокации, тригонометрический базис B-сплайнов пятой степени, устойчивость.*

Karaagac B., Esen A., Owolabi K.M., Pindza E. A Collocation method for the KdV–Kawahara equation by trigonometric quintic B-spline basis // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 263–276.

In this paper, an efficient numerical method which is a collocation method is considered in order to obtain numerical solutions of the KdV–Kawahara equation. The numerical method is based on a finite element formulation and a spline interpolation by trigonometric quintic B-spline basis. Firstly, the KdV–Kawahara equation is split into a coupled equation via an auxiliary variable as $v = u_{xxx}$. Subsequently, a collocation method is applied to the coupled equation together with the forward difference and the Cranck–Nicolson formula. This application leads us to obtain an algebraic equation system in terms of time variables and trigonometric quintic B-spline basis. In order to measure the error between numerical solutions and exact ones, the error norms L_2 and L_∞ are calculated successfully. The results are illustrated by means of two numerical examples with their graphical representations and comparisons with other methods.

© Б. Караагац, А. Эсен, К.М. Оволаби, Е. Пиндза, 2023

Keywords: *KdV–Kawahara equation, collocation method, quintic trigonometric B-spline basis, stability.*

1. Введение

В задачах науки и техники встречаются две или более независимые переменные, такие как время, пространство, длина, гравитация, угол и так далее. В математическом моделировании эти задачи переводятся на язык математики с помощью дифференциальных уравнений. Решение уравнений в частных производных играет важную роль для понимания науки и реальной жизни, по крайней мере для описания Вселенной или наблюдения изменений во времени, происходящих в физических системах. За последнее столетие на пути к описанию реальности компьютеры стали мощными помощниками математиков и ученых. Благодаря быстрому развитию высокопроизводительных компьютеров, построение и анализ алгоритмов с использованием компьютерных математических моделей привели к моделированию и анализу научных и технических проблем. Тот, кто изучает компьютерную математику, нуждается в численных методах и алгоритмах. Метод конечных элементов — один из популярных и общих методов построения численных схем для решения дифференциальных уравнений в частных производных, который имеет множество областей применения в науке. Метод коллокации является одним из методов конечных элементов и имеет самую простую для реализации процедуру среди методов конечных элементов. Ключевая идея методов коллокации состоит в том, чтобы сделать невязку равной нулю, подставить приближенное решение в уравнение в частных производных и точно удовлетворить уравнение в определенных узлах коллокации. Метод коллокации описан и изучен в ряде работ (см. [1–10]). Другие методы (конечно-разностный, неявно-явный, с интегрирующим коэффициентом, спектральные и псевдоспектральные схемы Фурье), которые использовались для изучения ряда нелинейных дисперсионных нестационарных задач, можно найти в [11–16] и имеющихся там ссылках.

Уравнение Кортевега де Фриза–Кавахары (КдФ–Кавахары) имеет вид [17]

$$u_t + \gamma u u_x + \mu u_x + \beta u_{xxx} + \alpha u_{xxxxx} = 0 \tag{1.1}$$

с одним начальным и шестью граничными условиями:

$$\begin{aligned} &u\left(x,0\right) = f(x), && x \in \left[x_{\text{left}}, x_{\text{right}}\right], \\ &u\left(x_{\text{left}},t\right) = u\left(x_{\text{right}},t\right) = 0, && t \in \left[0,T\right], \\ &u_x\left(x_{\text{left}},t\right) = u_x\left(x_{\text{right}},t\right) = 0, && t \in \left[0,T\right], \\ &u_{xx}\left(x_{\text{left}},t\right) = u_{xx}\left(x_{\text{right}},t\right) = 0, && t \in \left[0,T\right], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где α, β, γ и μ — действительные параметры, индексы x и t — производные по пространству и времени соответственно, $f(x)$ — известная функция, которая означает физическое состояние волны в начальный момент времени. Уравнение КдФ–Кавахары описывает одномерную эволюцию длинных волн малой конечной амплитуды в различных задачах гидродинамики. Для уравнения КдФ-Кавахары были проведены различные исследования конечно-разностных схем. Колей [18] получил две полностью дискретные разностные схемы для уравнения: одна из них — полностью дискретная консервативная схема, а другая — диссипативная схема, а в [19] он рассматривал сходимость как полудискретной, так и полностью дискретной разностных схем для уравнения КдФ–Кавахары. Себальос с соавторами [17] рассматривали начально-краевую задачу для уравнения КдФ–Кавахары

и предложили простую конечно-разностную схему для этой задачи. Сепульведа с соавторами [20] рассмотрели уравнение КдФ–Кавахары с начально-краевыми условиями и получили конечно-разностную схему. Затем с помощью этой схемы была исследована задача взаимодействия для перенормированного уравнения КдФ–Кавахары.

В настоящей статье будет рассмотрен конечно-элементный метод коллокации для решения уравнения КдФ–Кавахары. В соответствии с основной идеей численного метода будет использоваться следующая процедура: сначала производная третьего порядка привязывается к вспомогательной переменной с помощью $v = u_{xxx}$, и уравнение в частных производных преобразуется в связанное УЧП; затем строятся приближенные решения для u и v. Благодаря использованию ключевой идеи метода, мы получим систему алгебраических уравнений, которую можно решить любыми итерационными методами.

2. Метод коллокации для уравнения КдФ–Кавахары

В этом пункте мы даем коллокационную конечно-элементную формулировку начальной задачи (1.1), (1.2). Как описано во введении, вначале, используя вспомогательную переменную $v(x,t)$, исходная система делится на две. Таким образом задача имеет вид множества подуравнений, где каждое подуравнение более простого типа и к каждому подуравнению можно применять общие численные методы. Перепишем уравнение (1.1) со вспомогательной переменной в виде связанных уравнений:

$$\begin{aligned}
&v(x,t) - u_{xxx}(x,t) = 0,\\
&u_t(x,t) + \gamma u u_x(x,t) + \mu u_x(x,t) + \beta v(x,t) + \alpha v_{xx}(x,t) = 0.
\end{aligned}$$

Далее, используя разностную аппроксимацию вперед для производной по времени, формулу Кранка–Николсона с усреднением неизвестных и известных временных шагов для производной по пространству:

$$\begin{aligned}
(u_t)_m &= \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \qquad u_m = \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2},\\
(v_t)_m &= \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t}, \qquad v_m = \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2},
\end{aligned}$$

и уравнение для линеаризации члена uu_x:

$$(uu_x)^{n+1} = u^n u_x^{n+1} + u^{n+1} u_x^n - (uu_x)^n,$$

мы получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&(u_{xxx})_m^{n+1} - v_m^{n+1} = -(u_{xxx})_m^n + v_m^n,\\
&u_m^{n+1} + \left(\gamma \frac{\Delta t}{2}(u_x)_m^n\right) u_m^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2}(\gamma u_m^n + \mu)\right)(u_x)_m^{n+1} + \beta \frac{\Delta t}{2} v_m^{n+1} + \alpha \frac{\Delta t}{2}(v_{xx})_m^{n+1}\\
&\qquad = u_m^n - \frac{\Delta t}{2}\mu (u_x)_m^n - \beta \frac{\Delta t}{2} v_m^n - \alpha \frac{\Delta t}{2}(v_{xx})_m^n.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для применения метода коллокации к начальной задаче (1.1), (1.2) разделим интервал $[x_{\text{left}}, x_{\text{right}}]$ на N подынтервалов $x_{\text{left}} = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = x_{\text{right}}$. Теперь найдем приближенное решение $u_{\text{apprx}}(x,t)$ для $u(x,t)$. Таким образом, нам необходимо приближенное решение $v_{\text{apprx}}(x,t)$ для $v(x,t)$ вида

$$u_{\text{apprx}}(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} TB_m(x)\,\delta_j(t), \qquad v_{\text{apprx}}(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} TB_m(x)\,\sigma_j(t). \tag{2.2}$$

Здесь $\delta_j(t)$ и $\sigma_j(t)$ — неизвестные коэффициенты, называемые элементарными функциями, а $TB_m(x)$ — тригонометрические базисные функции.

Прежде всего давайте кратко поговорим о тригонометрическом базисе B-сплайнов пятой степени $TB_m(x)$, который является многочленом пятой степени в каждом интервале. Каждый тригонометрический базис B-сплайнов пятой степени принимает ненулевые значения максимум в пяти последовательных интервалах, т. е. $TB_m(x)$ (где m — целое число) положительны для $m-3 < x < m+3$ и имеют нулевые значения в противном случае.

Значения тригонометрического базиса функций B-сплайнов пятой степени в узлах задаются формулой (см. [21])

$$TB_m(x) = \frac{1}{\rho}\begin{cases} \varphi^5(x_{m-3}), & [x_{m-3}, x_{m-2}], \\ \varphi^4(x_{m-3})\,\chi(x_{m-1}) + \dots + \chi(x_{m+3})\varphi^4(x_{m-2}), & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ \varphi^3(x_{m-3})\,\chi^2(x_m) + \dots + \chi^2(x_{m+3})\varphi^3(x_{m-1}), & [x_{m-1}, x_m], \\ \varphi^2(x_{m-3})\,\chi^3(x_{m+1}) + \dots + \chi^3(x_{m+3})\varphi^2(x_m), & [x_{m-1}, x_m], \\ \varphi(x_{m-1})\,\chi^2(x_{m+2}) + \dots + \chi^4(x_{m+3})\varphi(x_{m+1}), & [x_m, x_{m+1}], \\ \chi^5(x_{m+3}), & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0 & [x_{m+2}, x_{m+3}], \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\varphi(x_m) = \sin((x - x_m)/2), \qquad \chi(x_m) = \sin((x_m - x)/2),$$
$$\rho = \sin(h/2)\sin(h)\sin(3h/2)\sin(2h)\sin(5h/2),$$

а значения $TB(x)$ и их искомые первые три производные задаются в виде

$$\begin{aligned} u_m &= a_1\delta_{m-2} + a_2\delta_{m-1} + a_3\delta_m + a_2\delta_{m+1} + a_1\delta_{m+2}, \\ u'_m &= b_1\delta_{m-2} + b_2\delta_{m-1} - b_2\delta_{m+1} - b_1\delta_{m+2}, \\ u''_m &= c_1\delta_{m-2} + c_2\delta_{m-1} + c_3\delta_m + c_2\delta_{m+1} + c_1\delta_{m+2}, \\ u'''_m &= d_1\delta_{m-2} + d_2\delta_{m-1} - d_1\delta_{m+1} - d_2\delta_{m+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_m &= a_1\sigma_{m-2} + a_2\sigma_{m-1} + a_3\sigma_m + a_2\sigma_{m+1} + a_1\sigma_{m+2}, \\ v'_m &= b_1\sigma_{m-2} + b_2\sigma_{m-1} - b_2\sigma_{m+1} - b_1\sigma_{m+2}, \\ v''_m &= c_1\sigma_{m-2} + c_2\sigma_{m-1} + c_3\sigma_m + c_2\sigma_{m+1} + c_1\sigma_{m+2}, \\ v'''_m &= d_1\sigma_{m-2} + d_2\sigma_{m-1} - d_1\sigma_{m+1} - d_2\sigma_{m+2}, \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \sin^5(h/2)/\rho, \quad a_2 = \sin^4(h/2)\sin(h)(8\cos(h) + 5)/\rho,$$
$$a_3 = 2\sin^5(h/2)\,(6\cos(2h) + 16\cos(h) + 11)/\rho,$$
$$b_1 = 5\sin^3(h/2)\sin(h)/4\rho, \quad b_2 = 5\sin^4(h/2)\cos^2(h/2)(4\cos(h) + 1)/\rho,$$
$$c_1 = 5\sin^3(h/2)(5\cosh(h) + 3)/8\rho, \quad c_2 = 5\sin^3(h/2)\cos(h/2)(4\cos(2h) + \cos(h) + 3)/4\rho,$$
$$c_3 = -5\sin^5(h/2)\cos(h/2)(25\cos(h) - 1)/16\rho,$$
$$d_1 = 5\sin^2(h)\cos(h/2)(25\cos(h) - 1)/16\rho, \quad d_2 = -5\sin^2(h)\,(2\cos(2h) - 27\cos(h) + 1)\,/32\rho.$$

Используя приближенные решения, данные в уравнениях (2.2) и (2.3), мы можем получить приближенные значения в виде временных переменных $\delta(t)$, $\sigma(t)$ в узловых точках для $u(x,t)$ и $v(x,t)$, где $u_{\text{apprx}}(x_m,t)=u_m$ и $v_{\text{apprx}}(x_m,t)=v_m$ для $m=0,\ldots,N$. Следующая система алгебраических уравнений получается путем подстановки узловых значений в (2.3):

$$
\begin{aligned}
&\left(-d_1\delta_{m-2}^{n+1}-d_2\delta_{m-1}^{n+1}+d_1\delta_{m+1}^{n+1}+d_2\delta_{m+2}^{n+1}\right)+\\
&\qquad\qquad\left(a_1\sigma_{m-2}^{n+1}+a_2\sigma_{m-1}^{n+1}+a_3\sigma_{m}^{n+1}+a_1\sigma_{m+1}^{n+1}+a_1\sigma_{m+2}^{n+1}\right)\\
&=\left(d_1\delta_{m-2}^{n}+d_2\delta_{m-1}^{n}-d_1\delta_{m+1}^{n}-d_2\delta_{m+2}^{n+1}\right)-\\
&\qquad\qquad\left(a_1\sigma_{m-2}^{n}+a_2\sigma_{m-1}^{n}+a_3\sigma_{m}^{n}+a_1\sigma_{m+1}^{n}+a_1\sigma_{m+2}^{n}\right),\\
&\left(a_1+\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\Lambda_1+b_1\Lambda_2\right)\right)\delta_{m-2}^{n+1}+\left(a_2+\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\Lambda_1+b_2\Lambda_2\right)\right)\delta_{m-1}^{n+1}+\left(a_3+\frac{\Delta t}{2}a_3\Lambda_1\right)\delta_{m}^{n+1}+\\
&\qquad\left(a_2+\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\Lambda_1-b_2\Lambda_2\right)\right)\delta_{m+1}^{n+1}+\left(a_1+\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\Lambda_1-b_1\Lambda_2\right)\right)\delta_{m+2}^{n+1}+\\
&\qquad\left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta+c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m-2}^{n+1}+\left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta+c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m-1}^{n+1}+\\
&\qquad\left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_3\beta+c_3\alpha\right)\right)\sigma_{m}^{n+1}+\left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta+c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m+1}^{n+1}+\\
&\qquad\left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta+c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m+2}^{n+1}\\
&=\left(a_1-\frac{\Delta t}{2}b_1\mu\right)\delta_{m-2}^{n+1}+\left(a_2-\frac{\Delta t}{2}b_2\mu\right)\delta_{m-1}^{n+1}+\left(a_3\right)\delta_{m}^{n+1}+\\
&\qquad\left(a_2+\frac{\Delta t}{2}b_2\mu\right)\delta_{m+1}^{n}+\left(a_1+\frac{\Delta t}{2}b_1\mu\right)\delta_{m+2}^{n}+\\
&\qquad\left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta+c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m-2}^{n}+\left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta+c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m-1}^{n}+\\
&\qquad\left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_3\beta+c_3\alpha\right)\right)\sigma_{m}^{n}+\left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta+c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m+1}^{n}+\\
&\qquad\left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta+c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m+2}^{n},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1&=\gamma\left(b_1\delta_{m-2}+b_2\delta_{m-1}-b_2\delta_{m+1}-b_1\delta_{m+2}\right),\\
\Lambda_2&=\mu+\gamma\left(a_1\delta_{m-2}+a_2\delta_{m-1}+a_3\delta_{m}+a_2\delta_{m+1}+a_1\delta_{m+2}\right).
\end{aligned}
$$

2.1. Граничные условия

Вышеупомянутая система, приведенная в (2.4), включает $(2N+10)$ неизвестных временных параметров и $(2N+2)$ уравнений. Данная система уравнений неразрешима. Для получения разрешимой системы параметры δ_{-2}, δ_{-1}, σ_{-2}, σ_{-1} следует исключить, используя левое граничное условие с первой производной. Также следует исключить параметры δ_{N+2}, δ_{N+1}, σ_{N+2}, σ_{N+1}, используя правое граничное условие с первой произ-

водной. Всего из системы следует исключить восемь параметров с помощью следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_1\delta_{-2} + a_2\delta_{-1} + a_3\delta_0 + a_2\delta_1 + a_1\delta_2 = u(x_{\text{left}}, t),\\
&a_1\delta_{N-2} + a_2\delta_{N-1} + a_3\delta_N + a_2\delta_{N+1} + a_1\delta_{N+2} = u(x_{\text{right}}, t),\\
&b_1\delta_{-2} + b_2\delta_{-1} - b_2\delta_1 - b_1\delta_2 = u'(x_{\text{left}}, t),\\
&b_1\delta_{N-2} + b_2\delta_{N-1} - b_2\delta_{N+1} - b_1\delta_{N+2} = u'(x_{\text{right}}, t),\\
&a_1\sigma_{-2} + a_2\sigma_{-1} + a_3\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_1\sigma_2 = v(x_{\text{left}}, t),\\
&a_1\sigma_{N-2} + a_2\sigma_{N-1} + a_3\sigma_{N-1} + a_2\sigma_{N+1} + a_1\sigma_{N+2} = v(x_{\text{right}}, t),\\
&b_1\sigma_{-2} + b_2\sigma_{-1} - b_2\sigma_1 - b_1\sigma_2 = v'(x_{\text{left}}, t),\\
&b_1\sigma_{N-2} + b_2\sigma_{N-1} - b_2\sigma_{N+1} - b_1\sigma_{N+2} = v'(x_{\text{right}}, t).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned}
&\delta_{-2} = p_1\delta_0 + p_2\delta_1 + p_3\delta_2 + q_1 u(x_{\text{left}}, t) - q_2 u'(x_{\text{left}}, t),\\
&\delta_{-1} = p_4\delta_0 + p_5\delta_1 + p_6\delta_2 + q_3 u(x_{\text{left}}, t) - q_4 u'(x_{\text{left}}, t),\\
&\delta_{N+2} = p_3\delta_{N-2} + p_2\delta_{N-1} + p_1\delta_N + q_1 u(x_{\text{right}}, t) + q_2 u'(x_{\text{right}}, t),\\
&\delta_{N+1} = p_6\delta_0 + p_5\delta_1 + p_4\delta_2 + q_3 u(x_{\text{right}}, t) + q_4 u'(x_{\text{right}}, t)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\sigma_{-2} = p_1\sigma_0 + p_2\sigma_1 + p_3\sigma_2 + q_1 v(x_{\text{left}}, t) - q_2 v'(x_{\text{left}}, t),\\
&\sigma_{-1} = p_4\sigma_0 + p_5\sigma_1 + p_6\sigma_2 + q_3 v(x_{\text{left}}, t) - q_4 v'(x_{\text{left}}, t),\\
&\sigma_{N+2} = p_3\sigma_{N-2} + p_2\sigma_{N-1} + p_1\sigma_N + q_1 v(x_{\text{right}}, t) + q_2 v'(x_{\text{right}}, t),\\
&\sigma_{N+1} = p_6\sigma_0 + p_5\sigma_1 + p_4\sigma_2 + q_3 v(x_{\text{right}}, t) + q_4 v'(x_{\text{right}}, t).
\end{aligned}$$

Мы получили численную схему для обобщенного уравнения КдФ–Кавахары в виде квадратной линейной системы. Схема включает “следующие” или “неизвестные” значения δ^{n+1} и σ^{n+1} вместе с “известными” значениями δ^n и σ^n. Ее можно решить с помощью итерационных методов, которые могут использоваться для больших систем и не требуют дополнительной памяти. Существует несколько методов решения этой системы. В данном исследовании система решается несколько раз; при этом желаемый временной уровень достигается с использованием прямого метода решения.

2.2. Начальное состояние

В итерационном методе решение системы $Ax = B$ начинается с начального вектора. Данный пункт основан на генерации начального вектора для системы, задаваемой уравнением (2.1). Параметры начального вектора $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ определяются с использованием значений приближенных решений $u_{\text{apprx}}(x,t)$, $v_{\text{apprx}}(x,t)$ и начального условия задачи в узловых точках:

$$\begin{aligned}
&u(x_m, 0) = f(x_m) = a_1\delta^{(0)}_{m-2} + a_2\delta^{(0)}_{m-1} + a_3\delta^{(0)}_m + a_2\delta^{(0)}_{m+1} + a_1\delta^{(0)}_{m+2},\\
&v(x_m, 0) = u_{xxx}(x_m, 0) = f'''(x_m) = d_1\sigma^{(0)}_{m-2} + d_2\sigma^{(0)}_{m-1} + d_3\sigma^{(0)}_m + d_2\sigma^{(0)}_{m+1} + d_1\sigma^{(0)}_{m+2}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Система уравнений (2.6) дает $(2N+2)$ уравнений в $(2N+10)$ неизвестных для $m = 0, \ldots, N$. Если из системы исключить восемь неизвестных с использованием значений первой и второй производных $u_{\text{apprx}}(x,t)$, $v_{\text{apprx}}(x,t)$ в узловых точках, аналогично процедуре, описанной в п. 2.1, начальный вектор определяется в матричной форме. Решение этой системы уравнений дает нам начальное значение, и теперь можно начинать итерацию.

3. Анализ устойчивости

Перед реализацией новой численной схемы, полученной в предыдущих пунктах, важно знать, как метод влияет на устойчивость. Поэтому в данном пункте будет проведена проверка устойчивости конечно-элементной схемы коллокации применительно к уравнению КдФ–Кавахары с использованием критерия фон Неймана для анализа устойчивости. Анализ устойчивости ограничивается линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Поскольку метод Рубина–Грейвза является методом линеаризации, мы рассматриваем u как локальную постоянную $\hat{u}$ для линеаризации нелинейного члена uu_x уравнения КдФ–Кавахары. Рассмотрим линеаризацию численной схемы

$$
\begin{aligned}
&\left(-d_1\delta_{m-2}^{n+1} - d_2\delta_{m-1}^{n+1} + d_1\delta_{m+1}^{n+1} + d_2\delta_{m+2}^{n+1}\right) + \\
&\qquad\qquad \left(a_1\sigma_{m-2}^{n+1} + a_2\sigma_{m-1}^{n+1} + a_3\sigma_{m}^{n+1} + a_1\sigma_{m+1}^{n+1} + a_1\sigma_{m+2}^{n+1}\right) \\
&= \left(d_1\delta_{m-2}^{n} + d_2\delta_{m-1}^{n} - d_1\delta_{m+1}^{n} - d_2\delta_{m+2}^{n+1}\right) - \\
&\qquad\qquad \left(a_1\sigma_{m-2}^{n} + a_2\sigma_{m-1}^{n} + a_3\sigma_{m}^{n} + a_1\sigma_{m+1}^{n} + a_1\sigma_{m+2}^{n}\right), \\
&\left(a_1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_1\right)\delta_{m-2}^{n+1} + \left(a_2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_2\right)\delta_{m-1}^{n+1} + \left(a_3\right)\delta_{m}^{n+1} + \\
&\qquad \left(a_2 - \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_2\right)\delta_{m+1}^{n+1} + \left(a_1 - \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_1\right)\delta_{m+2}^{n+1} + \\
&\qquad \left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta + c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m-2}^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta + c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m-1}^{n+1} + \\
&\qquad \left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_3\beta + c_3\alpha\right)\right)\sigma_{m}^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta + c_2\alpha\right)\right)\sigma_{m+1}^{n+1} + \\
&\qquad \left(\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta + c_1\alpha\right)\right)\sigma_{m+2}^{n+1} \\
&= \left(a_1 - \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_1\right)\delta_{m-2}^{n+1} + \left(a_2 - \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_2\right)\delta_{m-1}^{n+1} + \left(a_3\right)\delta_{m}^{n+1} + \\
&\qquad \left(a_2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_2\right)\delta_{m+1}^{n} + \left(a_1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma\hat{u} + \mu\right) b_1\right)\delta_{m+2}^{n} + \\
&\qquad \left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta + b_1\alpha\right)\right)\sigma_{m-2}^{n} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta + b_2\alpha\right)\right)\sigma_{m-1}^{n} + \\
&\qquad \left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_3\beta + b_3\alpha\right)\right)\sigma_{m}^{n} + \left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_2\beta + b_2\alpha\right)\right)\sigma_{m+1}^{n} + \\
&\qquad \left(-\frac{\Delta t}{2}\left(a_1\beta + b_1\alpha\right)\right)\sigma_{m+2}^{n},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $\hat{u} = u_m^n$. Теперь, для дальнейшей работы со схемой, ключевой частью анализа устойчивости фон Неймана является предположение, что решения разностного уравнения имеют вид

$$u_m^n = \xi^n e^{imk\psi},$$

где $i^2 = -1$, k — волновое число, ψ — фазовый угол, ξ — коэффициент усиления. Устойчивость схемы зависит от поведения коэффициента усиления. Если $|\xi| > 1$, то ξ^n экспоненциально растет при $n \to \infty$, и, таким образом, дискретизация неустойчива. Следовательно, требование устойчивости состоит в том, что $|\xi| < 1$.

Численная схема (3.1) содержит два уравнения и две переменные. Поэтому будем считать, что решения системы имеют вид

$$\delta_m^n = P\xi^n e^{imk\psi}, \qquad \sigma_m^n = W\xi^n e^{imk\psi}, \tag{3.2}$$

где P и W — амплитуды гармоник. Сначала подставим решения (3.2) в (3.1), а затем разделим обе части на $\xi^n e^{imk\psi}$. В итоге, используя некоторые тригонометрические тождества, мы получим следующую систему:

$$\begin{gathered}
\Big[i\,(q{+}1)\,(2d_1\sin(2\psi) + 2d_2\sin(\psi))\Big]P + \Big[\,(q{+}1)\,(2a_1\cos(2\psi) + 2a_2\cos(\psi) + a_3)\Big]W = 0,\\
\Big[(q-1)\,(2a_1\cos(2\psi) + 2a_2\cos(\psi) + a_3) - \\
i\,(q+1)\,2\frac{\Delta t}{2}\,(\gamma\hat{u} + \mu)\,(b_1\sin(2\psi) + b_2\sin(\psi))\Big]P + \\
\Big[(q+1)\left(\Delta t\,(a_1\beta + c_1\alpha)\cos(2\psi) + \Delta t\,(a_2\beta + c_2\alpha)\cos(\psi) + \frac{\Delta t}{2}\,(a_3\beta + c_3\alpha)\right)\Big]W = 0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Когда мы перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\begin{gathered}
i\lambda_1\,(q+1)\,P + \lambda_2\,(q+1)\,W = 0,\\
\big[\lambda_2(q-1) - i\lambda_3\,(q+1)\,\big]P + \big[\lambda_4\,(q+1)\,\big]W = 0,
\end{gathered} \tag{3.4}$$

определитель этой матрицы примет вид

$$i\,(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)\,(q+1)^2 - \lambda_2\lambda_2\left(q^2 - 1\right) = 0, \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2d_1\sin(2\psi) + 2d_2\sin(\psi)\,,\\
\lambda_2 &= (2a_1\cos(2\psi) + 2a_2\cos(\psi) + a_3)\,,\\
\lambda_3 &= 2\frac{\Delta t}{2}\,(\gamma\hat{u} + \mu)\,\big(b_1\sin(2\psi) + b_2\sin(\psi)\,\big),\\
\lambda_4 &= \Delta t\,(a_1\beta + c_1\alpha)\cos(2\psi) + \Delta t\,(a_2\beta + c_2\alpha)\cos(\psi) + \frac{\Delta t}{2}\,(a_3\beta + c_3\alpha)\,.
\end{aligned}$$

После переименования $\omega_1 = i\,(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3)$ и $\omega_2 = (\lambda_2)^2$ система (3.5) дает

$$\begin{gathered}
(i\omega_1 - \omega_2)\,q^2 + 2i\omega_1 q + (i\omega_1 + \omega_2) = 0,\\
\Delta = -4\omega_1^2 + 4\omega_1^2 + 4\omega_2^2 = 4\omega_2^2.
\end{gathered}$$

Корни уравнения имеют вид

$$q_1 = \frac{-2i\omega_1 + 2\omega_2}{2\,(i\omega_1 - \omega_2)} = -1 \Rightarrow |q_1| = 1, \qquad q_2 = \frac{-2i\omega_1 - 2\omega_2}{2\,(i\omega_1 - \omega_2)} \Rightarrow |q_2| = 1.$$

4. Численные результаты

Теперь приведем новые численные результаты для уравнения КдФ–Кавахары. Для этого рассмотрим два численных примера для значений $\gamma = \mu = \beta = 1$ и $\alpha = -1$. Поскольку точные решения имеются в литературе, для первой задачи мы вычислим нормы ошибок L_2 и L_∞ для измерения расстояния между численными и точными результатами, а затем вычислим порядки скорости сходимости метода коллокации по следующим формулам:

$$L_2 = \|u - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^{N} \left| u_j - (U_N)_j \right|^2}, \quad L_\infty = \|u - U_N\|_\infty = \max_{0 \le j \le N} \left| u_j - (U_N)_j \right|. \quad (4.1)$$

Во-вторых, мы представим таблицы сравнений между недавно полученными и “литературными” результатами с графическим моделированием численных результатов, полученных с использованием метода коллокации с тригонометрическим базисом пятой степени.

4.1. Пример 1

Соотношение между точным решением для уединенной волны и начальными условиями для задачи имеет вид

$$u(x,t) = \frac{105}{169} \sec h^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(x - \frac{205}{169} t - x_0 \right) \right], \qquad f(x) = \frac{105}{169} \sec h^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} (x - x_0) \right],$$

где $x_0 = 0$. Важно отметить влияние разделения по пространству и времени на численные результаты. Поэтому сначала приведем три таблицы, включающие нормы ошибок L_2 и L_∞ для различных значений шагов по времени и пространству для конечного времени $T = 10$. В таблицах 1 и 2 число шагов по пространству и времени увеличивается. Из таблиц видно, что метод коллокаций дает приближенные решения, а увеличение числа как временных, так и пространственных разбиений оказывает положительное важное влияние на нормы ошибок L_2 и L_∞: нормы ошибок L_2 и L_∞ уменьшаются по мере увеличения временных и пространственных разбиений.

Таблица 1. Нормы ошибок L_2 и L_∞ для различных значений h и Δt при $T = 10$

h	$\Delta t = 0.1$		$\Delta t = 0.05$		$\Delta t = 0.0125$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.5	2.33666	0.813493	1.29595	0.4.47655	1.21330	0.416490
0.25	0.599720	0.216222	0.223118	0.0785530	0.121466	0.0419562
0.125	0.522335	0.195820	0.134196	0.0499309	0.0138550	0.00487631
0.0625	0.517935	0.194556	0.129718	0.0486732	0.00838700	0.00312064
0.03125	0.517660	0.194474	0.129445	0.0485941	0.00810815	0.00304235

Таблица 2. Нормы ошибок L_2 и L_∞ для различных значений h и Δt при $T = 10$.

h	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.00625$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.5	1.21139	0.415813	1.20933	0.415079
0.25	0.119479	0.0412241	0.117369	0.0404309
0.125	0.0112332	0.00394370	0.00860636	0.00299685
$0,0625$	0.00547821	0.00202725	0.00233722	0.000843045
0.03125	0.00519576	0.00194898	0.00204073	0.000764490

Во-вторых, в табл. 3, 4 приведены некоторые результаты сравнения с методом коллокаций из [18, 19]. В этих таблицах взяты нормы ошибок $\varepsilon^1_{\Delta x}$ и $\varepsilon^2_{\Delta x}$, которые представлены в [18] для $[-80, 80]$. Код прогоняется от $t = 0$ до $t = 10$ и числа разбиений $N = 512$, 1024, 2048, 4096, 8192. Кроме того, временной шаг Δt выбирается равным 0.00625.

Таблица 3. Сравнение норм ошибки $\varepsilon^1_{\Delta x}$ для различных значений h при $T = 10$

N	Наш метод		[18]			
	$\varepsilon^1_{\Delta x}$/FEM	L_∞	$\varepsilon^1_{\Delta x}$/JMO	$\varepsilon^1_{\Delta x}$/(10)	$\varepsilon^1_{\Delta x}$/(42)	$\varepsilon^1_{\Delta x}$/spectral
512	2.27415×10^{-5}	9.89539×10^{-5}	1.50×10^{-3}	3.40×10^{-3}	2.63×10^{-4}	3.47×10^{-8}
1024	1.49286×10^{-6}	6.52523×10^{-6}	7.56×10^{-4}	1.70×10^{-3}	2.40×10^{-4}	3.51×10^{-10}
2048	2.25578×10^{-7}	1.00470×10^{-6}	3.81×10^{-4}	8.32×10^{-4}	6.11×10^{-5}	1.66×10^{-11}
4096	1.63441×10^{-7}	7.72026×10^{-7}	1.19×10^{-4}	4.17×10^{-4}	1.97×10^{-5}	8.47×10^{-13}
8192	1.60000×10^{-7}	7.56173×10^{-7}	9.62×10^{-5}	2.09×10^{-4}	5.49×10^{-6}	5.89×10^{-14}

Таблица 4. Сравнение норм ошибки $\varepsilon^2_{\Delta x}$ для различных значений h при $T = 10$

N	Наш метод	[18]			
	$\varepsilon^2_{\Delta x}$	$\varepsilon^2_{\Delta x}$/JMO	$\varepsilon^2_{\Delta x}$/(10)	$\varepsilon^2_{\Delta x}$/(42)	$\varepsilon^2_{\Delta x}$/spectral
512	1.38521×10^{-6}	1.42	3.33	2.99×10^{-1}	8.32×10^{-5}
1024	5.96917×10^{-9}	7.25×10^{-1}	1.65	2.52×10^{-1}	6.64×10^{-7}
2048	1.36292×10^{-11}	3.70×10^{-1}	8.37×10^{-1}	6.46×10^{-2}	3.24×10^{-8}
4096	7.15483×10^{-11}	1.88×10^{-1}	4.22×10^{-1}	6.14×10^{-2}	1.59×10^{-9}
8192	6.85674×10^{-11}	9.54×10^{-2}	2.12×10^{-1}	1.54×10^{-2}	1.14×10^{-10}

Из сравнительных таблиц можно сделать вывод, что по норме ошибки $\varepsilon^1_{\Delta x}$ наше решение точнее, чем схемы JMO, (40) и (42) из [18], но не точнее спектрального метода, приведенного в [18]. Кроме того, норма ошибки $\varepsilon^2_{\Delta x}$ меньше, чем та, которая была получена методом коллокации с использованием тригонометрических B-сплайнов пятой степени с нормами ошибок $\varepsilon^2_{\Delta x}$, приведенными в [18] для JMO, (40), (42) и спектрального метода для всех размеров временных шагов.

Наконец, для численного моделирования мы возьмем $N = 8192$, $\Delta t = 0.0625$ и различные конечные моменты времени, показанные на рисунке 1. Из рис. 1 видно, что уединенная волна сохраняет свою форму во время движения.

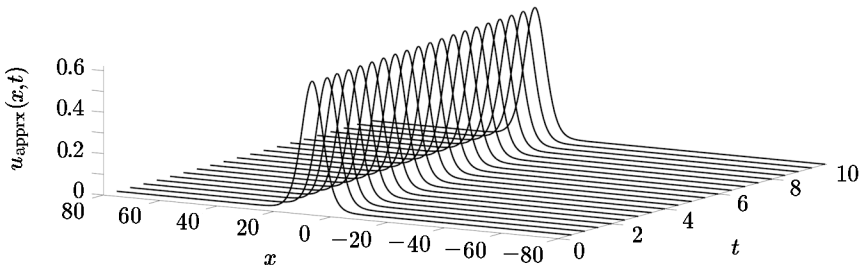

Рис. 1. Численное моделирование для $N = 8192$, $\Delta t = 0.0625$ в $[-80, 80]$ при $T = 0(0.5)10$

Моделирование волны показано по оси x для $T = 0, 5, 10$ на рис. 2. Первоначально, т. е. при $T = 0$, пик волны находится при $x_0 = 0$ с амплитудой 0.6213017751 на оси x; при $T = 5$ пик волны находится при $x_0 = 16,074219$ с амплитудой 0.6212997685.

Затем в конечный момент времени, $T = 10$, пик волны находится при $x_0 = 22.109375$ с амплитудой 0.6212995151. Таким образом, уединенная волна перемещается вправо от оси с небольшой потерей амплитуды.

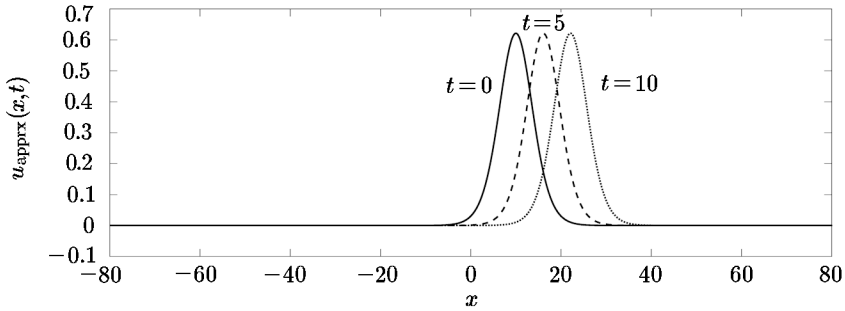

Рис. 2. Численное моделирование для $N = 8192$, $\Delta t = 0.0625$ в $[-80, 80]$ при $T = 0, 5, 10$

4.2. Пример 2

Во втором примере мы исследуем задачу взаимодействия для уравнения КдФ–Кавахары. Начальное условие задачи следующее:

$$u(x,0) = \frac{105}{169}\left\{\sec h^4\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-x_0)\right] + \frac{1}{4}\sec h^4\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_1)\right]\right\}.$$

Для этого примера возьмем $x_0 = 0$ и $x_1 = -4$ с интервалом $[-10, 10]$, и коды прогоняются от $t = 0$ до $t = 0.72$. Используя MATLAB, мы получили рис. 3 и 4. Рис. 3 показывает, что взаимодействие двух уединенных волн было успешным. При внимательном рассмотрении рис. 4 мы видим, что для этого уравнения вторичные волны хорошо видны. Кроме того, наши рисунки, показывающие задачу взаимодействия в 2D- и 3D-представлениях, согласуются с задачами взаимодействия, представленными в [17, 19, 22, 23], что подтверждает эффективность и пригодность предложенных нами численных методов.

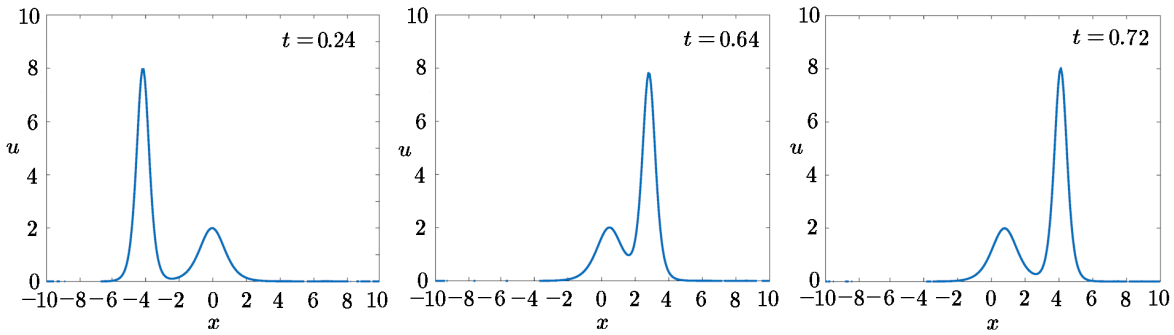

Рис. 3. Задача взаимодействия для уравнения КдФ–Кавахары. Представленные численные результаты показали эволюцию двухсолитонного теста от начального до конечного момента времени

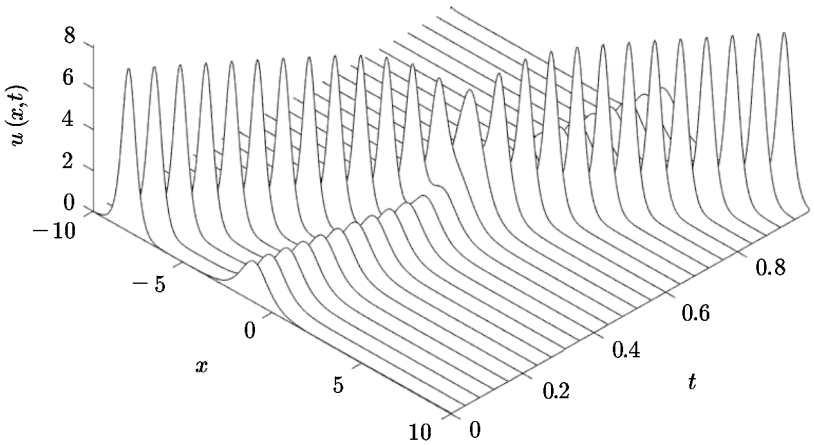

Рис. 4. Трехмерный график задачи взаимодействия, показывающий двухсолитонный тест для уравнения КдФ–Кавахары

До сих пор мы изучали взаимодействие одно- и двухсолитонных решений уравнения КдФ–Кавахары, используя конечно-элементный метод коллокации, который использует тригонометрические B-сплайны пятой степени в качестве базисной функции. С помощью нашего численного метода получаются решения, которые имеют такое же поведение, что и солитонные решения, т. е. эти численные решения остаются неизменными до и после пространственных взаимодействий. Как показано в приведенных выше таблицах, наш численный метод работает лучше, чем методы, представленные в [18, 19], которые использовались для решения одного и того же уравнения КдФ–Кавахары для одного и двух решений взаимодействия. Помимо точности настоящий метод вычисляет быстрее, чем существующие методы.

5. Выводы

Таким образом, целью данной статьи был поиск численных решений обобщенного уравнения КдФ–Кавахары. Во-первых, временная дискретизация для задачи была выполнена с использованием разности вперед и конечно-разностной формулы Кранка–Николсона. Во-вторых, приближенное решение задачи было получено с использованием тригонометрического базиса B-сплайна пятой степени и зависящих от времени параметров. В-третьих, получена численная схема для задачи с использованием ключевой идеи метода коллокации. Был выполнен анализ устойчивости фон Неймана. Учитывая теоретический аспект устойчивости, мы можем сделать вывод, что метод может использоваться для получения численного решения задачи. Для достижения поставленной цели были проведены два численных эксперимента с уравнением КдФ–Кавахары. Было выполнено сравнение численных результатов предложенных задач с точными результатами и другими результатами исследований, имеющихся в литературе. Из всех сравнений и таблиц норм ошибок и рисунков можно сделать вывод, что предлагаемый метод является эффективным и действенным.

Литература

1. **Ali A.H.A., Gardner G.A., and Gardner L.R.T.** A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1992. — Vol. 100, № 3. — P. 325–337.

2. **Kutluay S., Ucar Y., and Yagmurlu N.M.** Numerical solutions of the modified Burgers equation by a cubic B-spline collocation method // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. — 2016. — Vol. 39, № 4. — P. 1603–1614.

3. **Hepson O.E. and Dag I.** Finite element method for Schnakenberg model // Mathematical Methods in Engineering. — Cham: Springer, 2019. — P. 41–51.

4. **Mittal R.C. and Rohila R.** A fourth order cubic B-spline collocation method for the numerical study of the RLW and MRLW equations // Wave Motion. — 2018. — Vol. 80. — P. 47–68.

5. **Yagmurlu N.M., Karaagac B., and Kutluay S.** Numerical solutions of Rosenau-RLW equation using Galerkin cubic B-spline finite element method // American J. of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 7, № 1. — P. 1–10.

6. **Ali K., Raslan K.R., and Hadhoud A.R.** Numerical studies of non-local hyperbolic partial differential equations using collocation methods // Computational Methods for Differential Equations. — 2018. — Vol. 6, № 3. — P. 326–338.

7. **Dag I., Irk D., Kaçmaz O., Adar N.** Trigonometric B-spline collocation algorithm for solving the RLW equation // Applied and Computational Mathematics. — 2016. — Vol. 15, № 1. — P. 96–105.

8. **Ömer O., Esen A., and Bulut F.** A Haar wavelet collocation method for coupled nonlinear Schrödinger-KdV equations // Intern. J. of Modern Physics C. — 2016. — Vol. 27, № 09. — P. 1–16.

9. **Rohila R. and Mittal R.C.** Numerical study of reaction diffusion Fisher's equation by fourth order cubic B-spline collocation method // Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 12. — P. 79–89.

10. **Yağmurlu N.M., Taşbozan O., Uçar Y., Esen A.** Numerical solutions of the combined KdV-mKdV equation by a quintic B-spline collocation method // Appl. Math. Inf. Sci. Lett. — 2016. — Vol. 4, № 1. — P. 19–24.

11. **Owolabi K.M.** Robust IMEX schemes for solving two-dimensional reaction-diffusion models // Intern. J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. — 2015. — Vol. 16. — P. 271–284.

12. **Kassam A.K., Trefethen L.N.** Fourth-order time-stepping for stiff PDEs // SIAM J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 26. — P. 1214–1233.

13. **Owolabi K.M.** Second or fourth-order finite difference operators, which one is most effective? // Intern. J. of Applied Mathematics and Statistics. — 2014. — Vol. 1, № 3. — P. 044–054.

14. **Hochbruck M., Ostermann A.** Exponential multistep methods of Adams-type // BIT Numer. Math. — 2011. — Vol. 51. — P. 889–908.

15. **Owolabi K.M.** Mathematical study of two-variable systems with adaptive numerical methods // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9. — P. 218–230.

16. **Pindza E. and Owolabi K.M.** Fourier spectral method for higher order space fractional reaction-diffusion equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — Vol. 40. — P. 112–128.

17. **Ceballos J.C., Sepulveda M., and Villagran O.P.V.** The Korteweg-de Vries-Kawahara equation in a bounded domain and some numerical results // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — Vol. 190, № 1. — P. 912–936.

18. **Koley U.** Finite difference schemes for the Korteweg-de Vries-Kawahara equation // Intern. J. of Numerical Analysis and Modeling. — 2016. — Vol. 13, № 3. — P. 344–367.

19. **Koley U.** Convergence of numerical schemes for the Korteweg-de Vries–Kawahara equation. — 2011. — (arXiv; 1106.1781v1).

20. **Sepulveda M., Paulo O., and Villagran O.P.V.** Numerical methods for a transport equation perturbed by dispersive terms of 3rd and 5th order // Scientia. Series A. Mathematical Sciences. New Series. — 2006. — Vol. 13. — P. 13–21.

21. **Alam M.P., Kumar D., and Khan A.** Trigonometric quintic B-spline collocation method for singularly perturbed turning point boundary value problems // Intern. J. of Computer Mathematics. — 2021. — Vol. 98, № 5. — P. 1029–1048.

22. **Chertock A. and Levy D.** A particle method for the KdV equation // J. of Scientific Computing. — 2002. — Vol. 17. — P. 491–499.

23. **Owolabi K.M. and Patidar K.C.** Robust numerical simulation of nonlinear stiff higher-order PDEs // Transylvanian Review. — 2016. — Vol. 24, № 6. — P. 509–526.

Поступила в редакцию 04 ноября 2022 г.
После исправления 02 марта 2023 г.
Принята к печати 10 апреля 2023 г.