

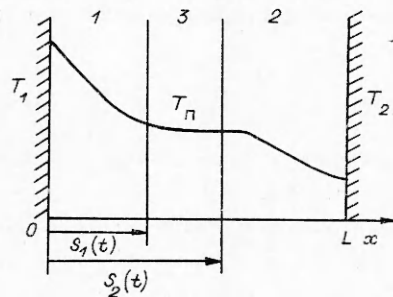
ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА К ИССЛЕДОВАНИЮ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛОБМЕНА

А. Л. Бурка, Н. А. Рубцов, Н. А. Саввинова

(Новосибирск)

Изучение влияния внутреннего теплового излучения на формирование температурного распределения в полупрозрачных материалах с помощью классической модели Стефана, предполагающей наличие плоской границы раздела между жидкой и твердой фазами, показало, что перед плоским фронтом нарушается монотонный характер температурного распределения. В [1, 2] этот факт объяснялся перегревом твердой фазы при плавлении и переохлаждением жидкой при затвердевании, вызванными переносом тепла за счет радиации. Перегрев и переохлаждение — метастабильные состояния вещества, но перегрев кристалла в области, граничащей с жидкой фазой, вообще не реализуется [3]. При появлении переохлажденной зоны перед фронтом кристаллизации обнаруживается дендритный рост. Кроме того, возможно независимое объемное зарождение кристаллов [4]. Таким образом, вместо перегрева и переохлаждения появляется двухфазная или переходная зона в полупрозрачной среде, в которой происходит частичное плавление или затвердевание, вызванное поглощением теплового излучения твердой фазой или за счет радиационного охлаждения. В [5] также утверждается реальность появления переходной зоны в полупрозрачной среде. На нарушение классического условия Стефана и появление переходной зоны указывалось и в [6, 7].

В данной работе при исследовании влияния теплового излучения на процессы фазового превращения в слое полупрозрачного материала используется обобщенная модель, предложенная в [5, 7], согласно которой рассматриваемый материал состоит из трех подслоев (рис. 1, 1 — жидкий, 2 — твердый, 3 — двухфазный). Начальная температура слоя ниже температуры плавления T_n , затем температура левой стенки приобретает



Р и с. 1

температуру $T_1 > T_n$ и в дальнейшем поддерживается постоянной. В начальный момент времени преобладает поверхностное плавление из-за большого градиента температуры. Через некоторое время появляется переходная зона за счет быстрого проникновения теплового излучения в твердую фазу. Считается, что теплофизические и оптические свойства во всех фазах постоянны, существует единственная температура плавления и двухфазная область находится в термодинамическом равновесии при этой температуре. Изменение плотности в процессе плавления предполагается незначительным, поэтому конвективным движением пренебрегается.

В обобщенной постановке задача Стефана сводится к определению температуры как непрерывной функции $\Theta(x, t)$, удовлетворяющей внутри области $\{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ уравнению энергии

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \nabla \Theta) + f(\Theta);$$

$$(2) \quad u(\Theta) = \int_0^\Theta c(\xi) d\xi - \alpha (\Theta - \Theta_n) \lambda, \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \Theta > \Theta_n, \\ [0, 1], & \Theta = \Theta_n, \\ 1, & \Theta < \Theta_n, \end{cases}$$

где $u(\Theta)$ — энтальпия, терпящая разрыв первого рода и неоднозначно определенная при $\Theta = \Theta_n$; λ — скрытая теплота плавления.

С учетом (1) и (2) получаем систему уравнений (с безразмерными параметрами)

$$(3) \quad \begin{aligned} C_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= NK_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial q_1}{\partial x}, \quad 0 < x < S_1(t), \\ C_2 \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= NK_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial q_2}{\partial x}, \quad S_2(t) < x < 1, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{1}{4\lambda} \frac{\partial q_3}{\partial x}, \quad \Theta = \Theta_0, \quad S_1(t) \leq x \leq S_2(t). \end{aligned}$$

Здесь $C_i = c_i/c_r$; $K_i = k_i/k_r$; $x = x/L$; $\Theta = T/T_r$; $\lambda = \lambda/c_r T_r$; $t = 4\sigma_0 T_r^3 t/c_r L$; $q_i = E_i/\sigma_0 T_r^4$; $S_i = S_i/L$; $N = k_r/4\sigma_0 L T_r^3$ — кондуктивно-радиационный параметр; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; r — индекс характерного параметра; $\alpha(x, t)$ определяет долю твердой фазы в переходной зоне.

Начальные условия

$$(4) \quad S_1(0) = S_2(0) = S_0, \quad \Theta(x, 0) = \Theta_0(x);$$

граничные условия

$$(5) \quad \Theta(0, t) = \Theta_1, \quad \Theta(1, t) = \Theta_2.$$

Условия на внутренних границах $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находятся из уравнений на сильном разрыве

$$(6) \quad \alpha|_{S_1^+} \lambda \frac{dS_1}{dt} = -NK_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{S_1^-};$$

$$(7) \quad (1 - \alpha|_{S_2^-}) \lambda \frac{dS_2}{dt} = NK_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{S_2^+}.$$

Так как $dS_2/dt \geq 0$, $\partial \Theta / \partial x|_{S_2^+} < 0$, то соотношение (7) выполняется при $\alpha|_{S_2^-} = 1$, $\partial \Theta / \partial x|_{S_2^+} = 0$.

Среда серая, поглощающая и излучающая, показатели преломления всех слоев $n_1 = n_2 = n_3 = 1,5$, вследствие чего рассеянием пренебрегается. Коэффициент поглощения переходной зоны $\kappa_3 = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$. Граничные поверхности образца черные ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$).

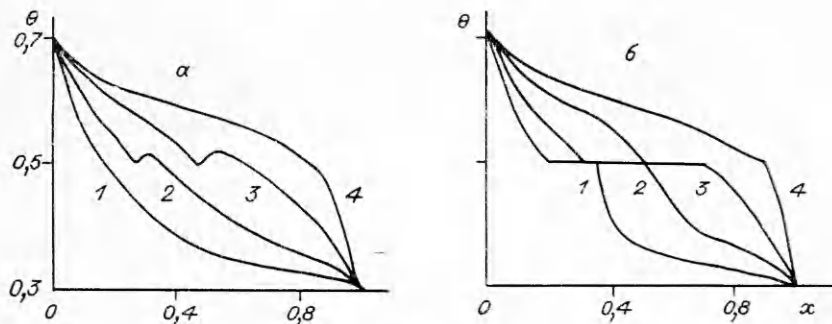
Результирующие радиационные потоки, которые входят в уравнения (3), находятся из формальных решений уравнения переноса излучения для каждого слоя:

$$(8) \quad \begin{aligned} q_1(x, t) &= 2\pi \left\{ \int_0^1 \left[I^+(0) \exp(-h_1 x / \mu_1) + \right. \right. \\ &+ \int_0^x h_1 n_1^2 \frac{B(x')}{\mu_1} \exp(-h_1(x-x')/\mu_1) dx' - \\ &- I^-(1) \exp(-h_2(1-S_2)/\mu_2 - h_3(S_2-S_1)/\mu_3 - h_1(S_1-x)/\mu_1) - \\ &- \int_{S_2}^1 h_2 n_2^2 \frac{B(x')}{\mu_2} \exp(-h_2(x'-S_2)/\mu_2 - \\ &- h_1(S_1-x)/\mu_1 - h_3(S_2-S_1)/\mu_3) dx' - \\ &- \left. \int_{S_1}^{S_2} h_3 n_3^2 \frac{B(x')}{\mu_3} \exp(-h_3(x'-S_1)/\mu_3 - \right. \end{aligned}$$

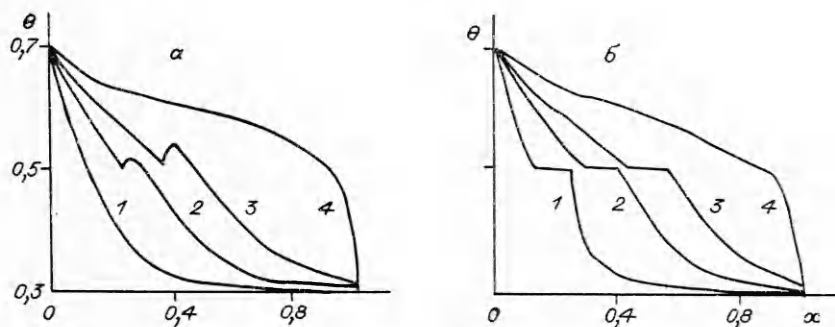
$$\begin{aligned}
& -h_1(S_1-x)/\mu_1) dx' - \int_x^1 h_1 n_1^2 \frac{B(x')}{\mu_1} \times \\
& \times \exp(-h_1(x'-x)/\mu_1) dx' \Big] \mu_1 d\mu_1 \Big\}, \quad 0 < x < S_1(t), \\
q_2(x, t) = & 2\pi \left\{ \int_0^1 \left[I^+(0) \exp(-h_1 S_1/\mu_1 - h_3(S_2-S_1)/\mu_3 - \right. \right. \\
& - h_2(x-S_2)/\mu_2) + \int_0^{S_1} h_1 n_1^2 \frac{B(x')}{\mu_1} \exp(-h_1(S_1-x')/\mu_1 - h_2(x-S_2)/\mu_2 - \\
& - h_3(S_2-S_1)/\mu_3) dx' + \int_{S_1}^{S_2} h_3 n_3^2 \frac{B(x')}{\mu_3} \exp(-h_3(S_2-x')/\mu_3 - \\
& - h_2(x-S_2)/\mu_2) dx' + \int_{S_2}^1 h_2 n_2^2 \frac{B(x')}{\mu_2} \exp(-h_2(x-x')/\mu_2) dx' - \\
& - I^-(1) \exp(-h_2(1-x)/\mu_2) - \int_x^1 h_2 n_2^2 \frac{B(x')}{\mu_2} \times \\
& \times \exp(-h_2(x'-x)/\mu_2) dx' \Big] \mu_2 d\mu_2 \Big\}, \quad S_2(t) < x < 1, \\
q_3(x, t) = & 2\pi \left\{ \int_0^1 \left[I^+(0) \exp(-h_1 S_1/\mu_1 - h_3(x-S_1)/\mu_3) + \right. \right. \\
& + \int_0^{S_1} h_1 n_1^2 \frac{B(x')}{\mu_1} \exp(-h_1(S_1-x')/\mu_1 - h_3(x-S_1)/\mu_3) dx' + \\
& + \int_{S_1}^x h_3 n_3^2 \frac{B(x')}{\mu_3} \exp(-h_3(x-x')/\mu_3) dx' - I^-(1) \exp(-h_2(1-S_2)/\mu_2 - \\
& - h_3(S_2-x)/\mu_3) - \int_{S_2}^1 h_2 n_2^2 \frac{B(x')}{\mu_2} \exp(-h_2(x'-S_2)/\mu_2 - h_3(S_2-x)/\mu_3) dx' - \\
& - \int_x^{S_2} h_3 n_3^2 \frac{B(x')}{\mu_3} \exp(-h_3(x'-x)/\mu_3) dx' \Big] \mu_3 d\mu_3 \Big\}, \quad S_1(t) \leq x \leq S_2(t).
\end{aligned}$$

Здесь $h_i = \kappa_i L$ — оптическая толщина слоев; $B(x')$ — интенсивность излучения абсолютного черного тела в вакууме; μ_i — косинус угла между направлением излучения и осью x ; $I^+(0) = \varepsilon_1 n_1^2 B(0)$, $I^-(1) = \varepsilon_2 n_2^2 B(1)$ — граничные интенсивности излучения.

Для численного решения краевой задачи (3)–(7) применяется интегроинтерполяционный метод [8], для которого при разностной аппроксимации уравнений теплопроводности выполняются интегральные законы сохранения, метод Ньютона для определения $S_1(t)$ и $S_2(t)$, dx/dt аппроксимируется конечно-разностным отношением. Интегралы вида $K_n(h) =$



Р и с. 2



Р и с. 3

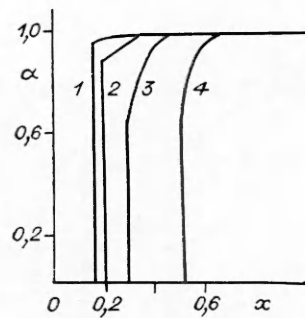
$$= \int_0^1 \mu^{n-2} \exp(-h/\mu) d\mu \text{ вычислялись по квадратурам Гаусса, а вида } I(x) = \int_0^x f(x') K_n(-\kappa(x-x')) dx' \text{ — по формулам трапеции.}$$

Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $C_1 = 0,75$, $C_2 = 1$, $K_1 = 2$, $K_2 = 1$, $\lambda = 0,1$, которые примерно соответствуют плавлению флюорита ($T_n = 1700$ К, $k_r = 9$ Вт/(м·К), $L = 10$ см) [1]. Граничные температуры $\Theta_1 = 0,7$, $\Theta_2 = \Theta_0 = 0,3$. Температура плавления $\Theta_n = 0,5$, $N = 0,01$. По классической модели фазового перехода расчеты велись до тех пор, пока сохранялся монотонный профиль температуры, затем они продолжались по обобщенной модели.

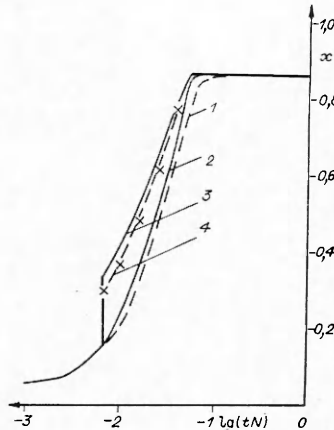
На рис. 2, а, б представлены температурные профили в образце, полученные при расчете по классической и обобщенной моделям. Оптические толщины слоев $h_1 = \kappa_1 L = 1$, $h_2 = \kappa_2 L = 2$, $h_3 = \kappa_3 L = (h_1 + h_2)/2$. С увеличением времени толщина двухфазного слоя уменьшается (кривая 1 — $\Delta s^{(1)} = S_2 - S_1 = 0,1794$, 2 — $\Delta s^{(2)} = 0,1754$, 3 — $\Delta s^{(3)} = 0,14$). При выходе на стационарный режим температуры двухфазный слой исчезает. Если принять $h_3 = 2$, то толщина переходной зоны становится меньше, чем при $h_3 = 1,5$ ($\Delta s^{(1)} = 0,1465$, $\Delta s^{(2)} = 0,1313$, $\Delta s^{(3)} = 0,106$), так как тепловое излучение от более горячей жидкой фазы сильнее поглощается близлежащим слоем к жидкой фазе.

На рис. 3, а, б приведены температурные распределения, рассчитанные по классической и обобщенной моделям при $h_1 = 1$, $h_2 = 5$, $h_3 = 3$. Как и следовало ожидать, размеры переходной зоны еще меньше, чем на рис. 2, б (кривая 1 — $\Delta s^{(1)} = 0,1126$, 2 — $\Delta s^{(2)} = 0,107$, 3 — $\Delta s^{(3)} = 0,101$).

На рис. 4 показано распределение доли твердой фазы $\alpha(x, t)$ в двухфазной области в различные моменты времени (кривая 1 — $t = 0,662$; 2 — 0,76; 3 — 1,27; 4 — 2,5), соответствующие температурным профилям, приведенным на рис. 2, б. Как видно, доля расплавленной фракции твер-



Р и с. 4



Р и с. 5

дого тела уменьшается с глубиной двухфазного слоя, так как слои, близлежащие к горячей жидкой фазе, поглощают больше энергии излучения, но, из-за того что количество поглощенной энергии не равно скрытой теплоте плавления твердого тела, расплавляется только часть твердого тела, образуя двухфазный слой. Очевидно, что за счет теплопроводности происходит поверхностное плавление, которое приводит к формированию чисто жидкого слоя ($\alpha = 0$), тогда как за счет теплового излучения идет внутреннее плавление, приводящее к ненулевым значениям α .

Движение границ переходной зоны иллюстрируется на рис. 5, где кривая 2 отвечает $S_1(t)$, 3 — $S_2(t)$ при $h_3 = 1,5$, 4 — при $h_3 = 2$, а кривая 1 — движение фронта, рассчитанное по классической модели фазового перехода. Видно, что выделение двухфазной промежуточной области ускоряет процесс плавления.

В расчетах по классической модели фазового перехода при $N \geq 0,05$ в температурных распределениях не наблюдается нарушения монотонности [9], которое означает, что при этих значениях вклад от теплового излучения в теплоперенос недостаточен для появления двухфазной области. В таких случаях вполне пригодна классическая модель фазового перехода, которая становится неприемлемой при появлении переходной зоны, учитываемой в обобщенной модели. Как только переходная зона исчезает, обобщенная модель вновь переходит в классическую.

Рассмотренная постановка задачи несколько идеализирована, так как оптические свойства переходной зоны ни теоретически, ни экспериментально не изучены и структура формирующейся при этом двухфазной области неизвестна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abrams M., Viskanta R. The effects of radiative heat transfer upon the melting and solidification of semitransparent crystals // J. Heat Transfer.— 1974.— V. 96, N 2.
2. Саввинова Н. А. Фазовые переходы в плоском слое с учетом излучения // Молекулярная физика неравновесных систем.— Новосибирск, 1984.
3. Уббелодде А. Р. Расплавленное состояние вещества.— М.: Металлургия, 1982.
4. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах.— М.: Наука, 1975.
5. Chan S. H., Cho D. H., Kocamustafaogullari G. Melting and solidification with internal radiative transfer — a generalized phase change model // Intern. J. Heat Mass Transfer.— 1983.— V. 26, N 4.
6. Мейрманов А. М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана // ДАН СССР.— 1981.— Т. 258, № 3.
7. Мейрманов А. М. Задача Стефана.— Новосибирск: Наука, 1986.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.
9. Бурка А. Л., Рубцов Н. А., Саввинова Н. А. Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом // ПМТФ.— 1987.— № 1.

Поступила 20/X 1986 г.