Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

УДК 539.32

Е. М. Любимцева, Е. А. Митюшов

Уральский политехнический институт, 620002 Екатеринбург

Все большее распространение в технике (наряду с изотропными и однородными материалами) получают гетерогенные материалы, которые представляют собой микронеоднородные среды с размерами неоднородностей, существенно меньшими тех, которые характерны для образца или изделия (см. [1, 2]). В силу малости элементов неоднородности и статистического характера их распределения в такой среде можно выделить так называемые представительные объемы, свойства которых одинаковы и соответствуют характеристикам всего материала, т. е. микронеоднородную среду можно считать макроскопически однородной и характеризовать набором эффективных коэффициентов (электропроводность, теплопроводность, упругость и т. д.).

Эффективные характеристики микронеоднородных сред во многом определяют эксплуатационные свойства материала. Возможность изменения в широких пределах объемного содержания различных компонентов, составляющих композиционный материал, позволяет создать вещества с необходимым набором служебных характеристик. Существуют разные методы расчета эффективных характеристик гетерогенных материалов по данным о свойствах фазовых составляющих и особенностям их структуры [3, 4]. Все они основываются на различных допущениях, облегчающих решение уравнений, учитывающих сложный характер взаимодействия между образующими их структурными элементами, и в основном касаются расчета эффективных характеристик двухфазных материалов [5–7].

Одним из перспективных методов для определения упругих характеристик гетерогенных материалов является метод обобщенного самосогласованного поля [6], суть которого заключается в уравнивании поля в частицах многофазной системы, помещаемых поочередно в однородную среду с характеристиками некоторого тела сравнения, со средним полем по частицам данной фазы в гетерогенной системе. Дадим распространение метода на случай систем с произвольным распределением упругих характеристик структурных элементов, а также рассмотрим решение задачи о конкурирующем влиянии дисперсных частиц на эффективные характеристики микронеоднородных материалов. Для этого вначале рассмотрим задачу Эшелби [8] о деформации упругого включения, помещенного в бесконечную однородную матрицу из материала с иными упругими характеристиками. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ — стесненная деформация включения большего размера из материала матрицы с упругими характеристиками $\mathbf{c}^m$. Приравняем напряжение в таком включении при заданной однородной деформации $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ напряжениям в инородном включении со свойствами $\mathbf{c}^f$ — при той же однородной деформации [7]:

$$\mathbf{c}^f : (\boldsymbol{\varepsilon}^c + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{c}^m : (\boldsymbol{\varepsilon}^c + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^T). \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ — тензор несовместности деформаций; знак (:) — бискалярное произведение двух тензоров ($\mathbf{c}^f : \boldsymbol{\varepsilon}^c = c_{ijkl}\varepsilon^c_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$); $\mathbf{e}_i$ — орты соответствующего базиса; по повторяющимся индексам выполняется суммирование от 1 до 3.

На основании решения Эшелби тензоры стесненной деформации и несовместности связаны между собой следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}^T \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^T = \mathbf{W} : \boldsymbol{\varepsilon}^c, \tag{2}$$

компоненты тензора Эшелби $\mathbf{N} = \mathbf{W}^{-1}$ описываются выражением

$$N_{ijkl} = \frac{1}{2} c^m_{pqkl} \int\limits_{v_0} \left[\frac{\partial^2 G_{pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x_i \partial x_q} + \frac{\partial^2 G_{pj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x_j \partial x_q}\right] dv,$$

где $G_{pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — тензор Грина однородной бесконечной среды; v_0 — область, занятая включением.

Учитывая, что деформация в инородном включении складывается из стесненной и однородной деформаций ($\boldsymbol{\varepsilon}^f = \boldsymbol{\varepsilon}^c + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$), из равенства (1) с учетом соотношения (2) имеем

$$\mathbf{c}^f : \boldsymbol{\varepsilon}^f = \mathbf{c}^m : [\boldsymbol{\varepsilon}^f - \mathbf{W} : (\boldsymbol{\varepsilon}^f - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})]. \tag{3}$$

Решая матричное уравнение (3), получим

$$[(\mathbf{c}^m)^{-1} : \mathbf{c}^f - \mathbf{I}] : \boldsymbol{\varepsilon}^f = \mathbf{W} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^f)$$

($\mathbf{I}$ — единичный тензор четвертого ранга). Тогда

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^f = \mathbf{N} : [(\mathbf{c}^m)^{-1} : \mathbf{c}^f - \mathbf{I}] : \boldsymbol{\varepsilon}^f.$$

В итоге для тензора деформации инородного включения находим

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f = \{\mathbf{I} + \mathbf{N} : [(\mathbf{c}^m)^{-1} : \mathbf{c}^f - \mathbf{I}]\}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{4}$$

В случае, когда материалы матрицы и включения изотропны, тензоры $(\mathbf{c}^m)^{-1}$, $\mathbf{c}^f$ и $\mathbf{N}$ можно представить в виде [7]

$$(\mathbf{c}^m)^{-1} = \frac{1}{3k^m}\mathbf{V} + \frac{1}{2\mu^m}\mathbf{D}, \quad \mathbf{c}^f = 3K^f\mathbf{V} + 2\mu^f\mathbf{D}, \quad \mathbf{N} = \frac{3K^m}{3K^m + 2\mu^m}\mathbf{V} + \frac{6(K^m + 2\mu^m)}{5(K^m + 4\mu^m)}\mathbf{D},$$

$K^{m(f)}$, $\mu^{m(f)}$ — объемный и сдвиговый модули матрицы и включения; $\mathbf{V}$ и $\mathbf{D}$ — объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $\mathbf{I}$.

С учетом этого разложения нетрудно получить из равенства (4) выражение для деформации сферического включения, помещенного в бесконечную среду и подвергнутого однородной деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f = \left[\frac{\mathbf{V}}{1 + a(K^f - K^m)} + \frac{\mathbf{D}}{1 + b(\mu^f - \mu^m)}\right] : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Здесь $a = 3/(3K^m + 4\mu^m)$; $b = 6(K^m + 2\mu^m)/[5\mu^m(3K^m + 4\mu^m)]$.

Воспользуемся этими формулами для определения эффективных характеристик полидисперсной системы, у которой сдвиговый и объемный модули принимают значения μ_i, K_i соответственно.

Рассматривая для этого однородное тело сравнения с упругими характеристиками μ_c, K_c и помещая в него поочередно одиночные сферические включения с упругими характеристиками μ_i, K_i, потребуем, чтобы при приложении внешнего поля $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$, равного среднему по объему полидисперсной системы, поле во включении совпадало со средним по соответствующей фазе $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Тогда, согласно (5), для средних значений тензоров деформации i-й фазы запишем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \left[\frac{\mathbf{V}}{1 + a_c(K_i - K_c)} + \frac{\mathbf{D}}{1 + b_c(\mu_i - \mu_c)}\right] : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \qquad (6)$$

где $a_c = 3/(3K_c + 4\mu_c)$; $b_c = 6(K_c + 2\mu_c)/[5\mu_c(3K_c + 4\mu_c)]$.

Подставляя эти значения в выражение для тензора средних напряжений в гетерогенной системе

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\sigma}_i$$

и учитывая обобщенный закон Гука для макро- и микрообъемов полидисперсной среды $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{c}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, $\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{c}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_i$, для эффективных упругих характеристик получим

$$K^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i K_i}{1 + a_c(K_i - K_c)}, \qquad \mu^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i \mu_i}{1 + b_c(\mu_i - \mu_c)}. \qquad (7)$$

Здесь c_i — относительное объемное содержание i-й фазовой составляющей.

Отметим, что из условия аддитивности для среднего значения тензора деформаций по объему полидисперсной системы

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

и выражений (6) для средних деформаций по объемам, занятым соответствующими фазовыми составляющими, имеют место следующие соотношения для характеристик тела сравнения:

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{n}(a_c^{-1} - K_c + K_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_c^{-1} - K_c + K_i)}{a_c^{-1} - K_c + K_j},\\ \prod_{i=1}^{n}(b_c^{-1} - \mu_c + \mu_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\prod_{i=1}^{n}(b_c^{-1} - \mu_c + \mu_i)}{b_c^{-1} - \mu_c + \mu_j}.\end{gathered} \qquad (8)$$

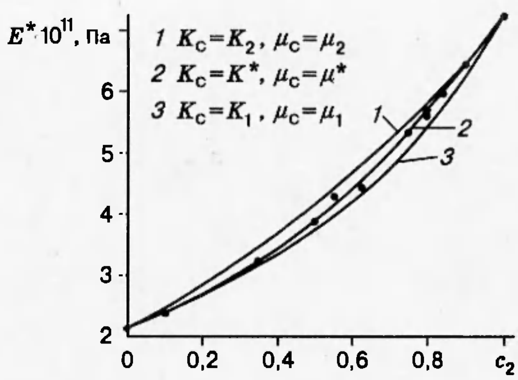
Выполняя в равенствах (7) тождественные преобразования, с учетом выражений (8) находим

$$K^* = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_c^{-1} - K_c + K_i}\right]^{-1} - (a_c^{-1} - K_c), \quad \mu^* = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{b_c^{-1} - \mu_c + \mu_i}\right]^{-1} - (b_c^{-1} - \mu_c). \qquad (9)$$

Для рассматриваемых микронеоднородных сред с учетом выполнения условия эргодичности [7] осреднение по объему в равенствах (9) можно заменить статистическим осреднением по ансамблю соответствующих тел. Тогда для объемного и сдвигового модулей полидисперсной системы запишем

$$K^* = \left\langle \left(\frac{4}{3}\mu_c + K\right)^{-1} \right\rangle^{-1} - \frac{4}{3}\mu_c, \quad \mu^* = \left\langle \left(\frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)} + \mu\right)^{-1} \right\rangle^{-1} - \frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}, \qquad (10)$$

где K, μ — случайные модули, принимающие значения K_i, μ_i с вероятностью c_i.



Предложенный метод расчета эффективных упругих характеристик полидисперсных и многофазных систем может быть использован для материалов с дискретным и непрерывным распределением свойств элементов структуры. Выражения (9), (10) содержат варьируемые параметры μ_c, K_c, что позволяет описывать эффективные упругие характеристики микронеоднородных материалов произвольного типа. Так, принимая в равенствах (9) $n = 2$, $\mu_c = \mu_1 = \mu^m$, $K_c = K_1 = K^m$, а также $\mu_2 = \mu^f$ и $K_2 = K^f$, определим эффективные характеристики двухфазной матричной системы. Если же положить в них $\mu_c = \mu^*$, $K_c = K^*$, то формулы (9) переходят в выражение для определения эффективных характеристик статистической системы равноправных фаз, соответствующее известному методу самосогласованного поля.

В качестве иллюстрации на рисунке приведены рассчитанные и экспериментально найденные значения модуля Юнга композита WC — Co, полученного по порошковой технологии ($E^* = 9K^*\mu^*/(3K^* + \mu^*)$). При этом использовались следующие значения упругих констант: для кобальта $K_1 = 1{,}87 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_1 = 0{,}81 \cdot 10^{11}$ Па, для карбида вольфрама $K_2 = 3{,}92 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_2 = 3{,}04 \cdot 10^{11}$ Па. Как видно из рисунка, экспериментальные значения модуля Юнга [9, 10], отмеченные точками, отвечают решению, полученному по согласованной модели. В области малых и больших концентраций, когда кобальт является матричной или дисперсной фазой, эти значения близки к соответствующим решениям для матричных систем.

Соотношения (10) могут быть использованы при решении задачи о взаимном компенсирующем влиянии мягких и жестких включений, случайным образом распределенных в однородной матрице. Моделируя такой материал трехфазной матричной системой и полагая в равенствах (7), что c_1 и c_2 — объемные концентрации мягких и жестких включений, а $\mu_3 = \mu^m = \mu_c$ и $K_3 = K^m = K_c$, приравняем эффективные упругие характеристики к таковым же для материала матрицы. В результате получим, что компенсирующее влияние дисперсных частиц на объемный модуль будет обеспечено, если их объемные концентрации находятся в отношении

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{(K_1 - K^m)(3K_2 + 4\mu^m)}{(K_2 - K^m)(3K_1 + 4\mu^m)}. \tag{11}$$

Если компенсирование пор осуществляется за счет добавления абсолютно жестких

Материал	μ^m	K^m	c_2/c_1 ($K^m = K^*$)	μ^*	c_2/c_1 ($\mu^m = \mu^*$)	K^*
Алмаз	47,22	41,70	0,662	41,704	1,085	48,941
Корунд	19,98	24,00	0,901	19,279	1,021	22,994
Свинец	0,70	0,99	1,061	0,715	0,979	0,861
Цинк	4,82	6,88	1,071	4,943	0,986	5,955
Медь	4,40	8,72	1,486	5,202	0,943	6,386
Алюминий	2,55	7,78	2,288	3,833	0,855	4,814
Золото	2,75	6,91	4,612	6,854	0,772	8,853

частиц, то при переходе в равенстве (11) к пределу при $K_1 \to 0$, $K_2 \to \infty$ имеем

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{3}{4}\frac{K^m}{\mu^m}. \tag{12}$$

Эффективный модуль сдвига в этом случае на основании соотношения (7) находится из равенства

$$\mu^* = \mu^m(1 - c_1 - c_2) + c_2\left[\frac{5\mu^m(3K^m + 4\mu^m)}{6(K^m + 2\mu^m)}\right].$$

Компенсирующее же влияние дисперсных частиц в трехфазной матричной системе на модуль сдвига произойдет при условии

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{(\mu^m - \mu_1)}{(\mu^m - \mu_2)}\frac{[\mu^m(9K^m + 8\mu^m) + 6\mu_2(K^m + 2\mu^m)]}{[\mu^m(9K^m + 8\mu^m) + 6\mu_1(K^m + 2\mu^m)]}.$$

В случае, когда $\mu_1 \to 0$, $\mu_2 \to \infty$, получим

$$c_2/c_1 = 6(K^m + 2\mu^m)/(9K^m + 8\mu^m). \tag{13}$$

При этом для эффективного объемного модуля из равенства (7) следует $K^* = K^m(1-c_1) + (4/3)\,\mu^m c_2$.

Из соотношений (12) и (13), в частности, вытекает, что полное компенсирующее влияние жестких включений на упругие характеристики пористого материала возможно лишь при соотношении упругих свойств матрицы

$$K^m = (4/3)\,\mu^m, \tag{14}$$

когда относительное объемное содержание пор и включений одинаково. Условие (14) соответствует значению коэффициента Пуассона $\nu = 1/3$, которое имеет место для многих чистых металлов.

В частности, это хорошо видно на примерах свинца или цинка из таблицы, в которой приведены компенсирующие отношения объемных концентраций для некоторых материалов [11]. Кроме того, из таблицы следует, что концентрационное отношение, обеспечивающее взаимную компенсацию пор и жестких включений, может меняться в достаточно широких пределах.

Оценку же относительных изменений концентрационных отношений с учетом податливости дисперсных частиц нетрудно выполнить с помощью выражения

$$\delta = \left|\frac{(c_2/c_1)^2 - 1}{(c_2/c_1)^2 + nc_2/c_1}\right| \cdot 100\,\%,$$

где $n = K^m/K_2 = K_1/K^m$ или $n = \mu^m/\mu_2 = \mu_1/\mu^m$; c_2/c_1 — отношение объемных концентраций без учета податливости дисперсных частиц. Если упругие характеристики дисперсных частиц отличаются на порядок от таковых характеристик матрицы, то изменение концентрационных отношений при компенсировании, например, объемного модуля свинца и золота будет составлять 1 и 30 % соответственно.

Таким образом, в рамках метода обобщенного самосогласованного поля получены выражения эффективных упругих характеристик полидисперсных систем с произвольным распределением локальных упругих характеристик, а также решена задача о конкурирующем влиянии дисперсных частиц на упругие характеристики матричных трехфазных систем. Установлены соотношения для объемных концентраций, которые обеспечивают полную или частичную взаимную компенсацию пор и жестких включений в подобных материалах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волков Г. М.** Композиционные материалы в массовом машиностроении // Металловедение и термическая обработка металлов. 1990. № 8. С. 2–6.
2. **Анциферов В. Н., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. и др.** Волокнистые композиционные материалы на основе титана. М.: Наука, 1990.
3. **Пантюхин В. А.** Эффективная проводимость анизотпропных сред с эллипсоидальными включениями // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 10. С. 1867–1868.
4. **Ramakrishman N., Arunachalam V. S.** Effektive elastic moduli of porous solids // J. Matter. Sci. 1990. V. 25, N 9. P. 3930–3937.
5. **Shyder K. A., Garboczi E. J., Day A. K.** The elastic moduli of simple two-dimensional isotropic composites: Computer simulation on effective medium theory // J. Appl. Phys. 1992. V. 72, N 12. P. 5948–5955.
6. **Гельд П. В., Митюшов Е. А.** Обобщенный метод самосогласованного поля для определения упругих свойств гетерогенных материалов // ПМТФ. 1990. № 1. С. 96–100.
7. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
8. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. **Doi H., Fujiwara Y., Miyake K., Oosawa Y.** A systematic investigation on elastic moduli of WC — Co alloys // Met. Trans. 1970. V. 1, N 5. P. 1417–1425.
10. **Nishimatsu G., Gurland J.** Experimental servey of the deformations of the ductile two-phase alloy system WC — Co // Trans. Amer. Soc. Metals. 1960. V. 52. P. 469–484.
11. **Францевич И. Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С. А.** Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наук. думка, 1982.

Поступила в редакцию 1/XII 1994 г.,
в окончательном варианте — 10/V 1995 г.