УДК 539.3

И.Ю. Цвелодуб

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Как известно [1], в произвольной системе координат $x_i (i = 1, 2, 3)$ закон Гука для анизотропного тела имеет вид

(1) $$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

или

(2) $$\sigma_{kl} = b_{klmn}\varepsilon_{mn} \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где ε_{kl}, σ_{kl}, a_{klmn}, b_{klmn} — компоненты тензоров деформаций, напряжений, упругих податливостей и упругих модулей соответственно. В (1) и (2) принято обычное правило суммирования по повторяющимся индексам.

В общем случае (тела триклинной системы) в силу известных условий симметрии тензоры a_{klmn} и b_{klmn} имеют 21 различную компоненту. В системе координат, связанной с главными осями анизотропии, это число равно 18, при наличии одной плоскости симметрии (тела моноклинной системы) оно уменьшается до 13, двух плоскостей (ортотропные тела) — до 9 и т.д. Однако если заранее неизвестны ориентация главных осей анизотропии и степень симметрии рассматриваемого тела, определение всех его упругих характеристик на базе обычных экспериментов на одноосное растяжение (сжатие) и кручение в направлениях координатных осей наталкивается на значительные трудности [2]. Это обусловлено тем, что в каждом таком эксперименте необходимо замерять все компоненты деформаций. Приведенные же в [1, с. 150—151] соображения о нахождении такого тензора напряжений, который соответствует шаровому тензору деформаций и определяет главные оси анизотропии, вряд ли могут быть реализованы практически.

В настоящее время в экспериментальной механике все более широкое применение находят методы голографической и лазерной спекл-интерферометрии [3], позволяющие с высокой степенью точности определять компоненты вектора перемещений поверхности деформируемых тел. Если, кроме того, известны и внешние нагрузки, то для нахождения a_{klmn} (или b_{klmn}) можно получить замкнутую систему уравнений. Построению последней посвящена данная работа.

Рассмотрим упругое однородное тело объема v с поверхностью S, к которой приложены внешние нагрузки p_k, вызывающие на S перемещения u_k $(k = 1, 2, 3)$, которые считаются известными в результате соответствующих измерений. По этой информации необходимо определить все компоненты тензора a_{klmn} (или b_{klmn}).

Введем в рассмотрение моменты нулевого и первого порядков для напряжений и деформаций:

(3) $$M^0_{kl} = \int_v \sigma_{kl}dv, \quad N^0_{kl} = \int_v \varepsilon_{kl}dv,$$

$$M^i_{kl} = \int_v \sigma_{kl}x_i dv, \quad N^i_{kl} = \int_v \varepsilon_{kl}x_i dv \quad (k, l, i = 1, 2, 3).$$

Из (1) и (3) следует

(4) $$N^i_{kl} = a_{klmn}M^i_{mn} \quad (k, l = 1, 2, 3, \ i = 0, 1, 2, 3).$$

Обозначим

(5) $$Q_k^{s_1 s_2 s_3} = \int_S x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} p_k dS, \quad U^0_{kl} = \int_S u_k n_l dS,$$

$$U^i_{kl} = \int_S u_k n_l x_i dS \quad (k,\, l,\, i = 1,\, 2,\, 3),$$

где s_1, s_2, s_3 — целые неотрицательные числа; n_k — компоненты единичного вектора внешней к S нормали.

Из уравнений равновесия (массовые силы отсутствуют) и формулы Остроградского—Гаусса получим равенства [4]

(6) $$\int_v x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl} dv = Q_k^{s_1 s_2 s_3} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

В частности, при $n \equiv s_1 + s_2 + s_3 = 0$ (т.е. $s_1 = s_2 = s_3 = 0$) из (6) имеем $Q_k^{000} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, что соответствует равенству нулю главного вектора внешних сил. При $n = 1$ из (6) следуют выражения для моментов напряжений нулевого порядка через внешние нагрузки:

(7) $$M^0_{k1} = Q_k^{100},\ M^0_{k2} = Q_k^{010},\ M^0_{k3} = Q_k^{001} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

В силу симметрии компонент тензора напряжений из (7) вытекают условия равенства нулю главного момента внешних сил: $Q_3^{010} - Q_2^{001} = 0$, $Q_1^{001} - Q_3^{100} = 0$, $Q_2^{100} - Q_1^{010} = 0$.

При $n = 2$ из (6) получим систему из 18 уравнений для нахождения всех 18 моментов напряжений первого порядка [4], из которой имеем

(8) $$M^1_{11} = \frac{1}{2} Q_1^{200},\ M^2_{11} = Q_1^{110} - \frac{1}{2} Q_2^{200},\ M^3_{11} = Q_1^{101} - \frac{1}{2} Q_3^{200},$$

$$M^1_{22} = Q_2^{110} - \frac{1}{2} Q_1^{020},\ M^2_{22} = \frac{1}{2} Q_2^{020},\ M^3_{22} = Q_2^{011} - \frac{1}{2} Q_3^{020},$$

$$M^1_{33} = Q_3^{101} - \frac{1}{2} Q_1^{002},\ M^2_{33} = Q_3^{011} - \frac{1}{2} Q_2^{002},\ M^3_{33} = \frac{1}{2} Q_3^{002},$$

$$M^1_{12} = \frac{1}{2} Q_2^{200},\ M^2_{12} = \frac{1}{2} Q_1^{020},\ M^3_{12} = \frac{1}{2} (Q_1^{011} + Q_2^{101} - Q_3^{110}),$$

$$M^1_{13} = \frac{1}{2} Q_3^{200},\ M^2_{13} = \frac{1}{2} (Q_1^{011} + Q_3^{110} - Q_2^{101}),\ M^3_{13} = \frac{1}{2} Q_1^{002},$$

$$M^1_{23} = \frac{1}{2}(Q_2^{101} + Q_3^{110} - Q_1^{011}),\ M^2_{23} = \frac{1}{2} Q_3^{020},\ M^3_{23} = \frac{1}{2} Q_2^{002}.$$

Необходимо заметить, что при $n \geqslant 3$ число уравнений (6) меньше числа неизвестных, поэтому получить выражения для всех моментов напряжений второго и более высоких порядков через внешние нагрузки нельзя [4].

Рассмотрим теперь моменты деформаций. Из соотношений Коши, связывающих ε_{kl} и u_k, и формулы Остроградского—Гаусса вытекает

$$\int_v \varepsilon_{kl} dv = \frac{1}{2} \int_v (u_{k,l} + u_{l,k}) dv = \frac{1}{2} \int_S (u_k n_l + u_l n_k) dS \quad (k,\, l = 1,\, 2,\, 3),$$

где индекс после запятой означает частную производную по соответствующей координате. Таким образом,

(9) $$N^0_{kl} = \frac{1}{2} (U^0_{kl} + U^0_{lk}) \quad (k,\, l = 1,\, 2,\, 3)$$

(величины U^0_{kl} определены в (5)). Аналогично при $k \neq i \neq l$ имеем

$$\int_v \varepsilon_{kl} x_i dv = \frac{1}{2} \int_S (u_k n_l + u_l n_k) x_i dS,$$

т.е.

(10) $$N^i_{kl} = \frac{1}{2}(U^i_{kl} + U^i_{lk}) \quad (k, l = 1, 2, 3,\ k \neq i \neq l);$$

при $i = k \neq l$ (суммирования по k нет)

$$\int\limits_v \varepsilon_{kl} x_k dv = \frac{1}{2}\int\limits_v (u_{k,l} + u_{l,k})x_k dv = \frac{1}{2}\int\limits_v [(u_k x_k)_{,l} + (u_l x_k)_{,k} -$$

$$- u_l]dv = \frac{1}{2}\int\limits_S (u_k n_l + u_l n_k)x_k dS - \frac{1}{2}\int\limits_v u_l dv;$$

при $i = k = l$ (суммирования по l нет)

$$\int\limits_v \varepsilon_{ll} x_l dv = \int\limits_v u_{l,l} x_l dv = \int\limits_S u_l n_l x_l dS - \int\limits_v u_l dv.$$

Исключая из этих равенств $\int\limits_v u_l dv$ и используя обозначения (3) и (5), получим (по k и l суммирования нет)

(11) $$2N^k_{kl} - N^l_{ll} = U^k_{kl} + U^k_{lk} - U^l_{ll} \quad (k, l = 1, 2, 3,\ k \neq l).$$

Таким образом, формулы (9)—(11) дают 21 соотношение (по 6 из (9), (11) и 9 из (10)), выражающие моменты деформаций и их комбинации через компоненты вектора перемещений точек поверхности S. Эти соотношения с учетом равенств (4) образуют замкнутую систему для определения a_{klmn} по известным моментам напряжений.

Выпишем эту систему в явном виде. Введем для неизвестных величин следующие обозначения:

$$\alpha_1 = a_{1111},\ \alpha_2 = a_{1122},\ \alpha_3 = a_{1133},\ \alpha_4 = 2a_{1112},$$

$$\alpha_5 = 2a_{1113},\ \alpha_6 = 2a_{1123},\ \alpha_7 = a_{2222},\ \alpha_8 = a_{2233},\ \alpha_9 = 2a_{2212},\ \alpha_{10} =$$

$$= 2a_{2213},\ \alpha_{11} = 2a_{2223},\ \alpha_{12} = a_{3333},\ \alpha_{13} = 2a_{3312},\ \alpha_{14} = 2a_{3313},\ \alpha_{15} =$$

$$= 2a_{3323},\ \alpha_{16} = 4a_{1212},\ \alpha_{17} = 4a_{1213},\ \alpha_{18} = 4a_{1223},\ \alpha_{19} = 4a_{1313},$$

$$\alpha_{20} = 4a_{1323},\ \alpha_{21} = 4a_{2323}.$$

Тогда из (4), (9)—(11) находим

(12) $$A_{pq}\alpha_q = b_p \ (p = 1, 2, \ldots, 21),$$

$$b_1 = U^0_{11},\ b_2 = U^0_{22},\ b_3 = U^0_{33},\ b_4 = U^0_{12} + U^0_{21},\ b_5 = U^0_{13} + U^0_{31},$$

$$b_6 = U^0_{23} + U^0_{32},\ b_7 = U^2_{11},\ b_8 = U^3_{11},\ b_9 = U^1_{22},\ b_{10} = U^3_{22},\ b_{11} = U^1_{33},\ b_{12} = U^2_{33},$$

$$b_{13} = U^3_{12} + U^3_{21},\ b_{14} = U^2_{13} + U^2_{31},\ b_{15} = U^1_{23} + U^1_{32},\ b_{16} = U^2_{12} + U^2_{21} - U^1_{11},$$

$$b_{17} = U^3_{13} + U^3_{31} - U^1_{11},\ b_{18} = U^1_{12} + U^1_{21} - U^2_{22},\ b_{19} = U^3_{23} + U^3_{32} - U^2_{22},$$

$$b_{20} = U^1_{13} + U^1_{31} - U^3_{33},\ b_{21} = U^2_{23} + U^2_{32} - U^3_{33},$$

где суммирование по q проводится от 1 до 21, а ненулевые элементы матрицы $\| A_{pq} \|$ имеют вид

$$A_{1.1} = A_{2.2} = A_{3.3} = A_{4.4} = A_{5.5} = A_{6.6} = M^0_{11},$$

$$A_{1.2} = A_{2.7} = A_{3.8} = A_{4.9} = A_{5.10} = A_{6.11} = M^0_{22},\ A_{1.3} = A_{2.8} = A_{3.12} = A_{4.13} =$$

$$= A_{5.14} = A_{6.15} = M^0_{33},\ A_{1.4} = A_{2.9} = A_{3.13} = A_{4.16} = A_{5.17} = A_{6.18} = M^0_{12},$$

$$A_{1.5} = A_{2.10} = A_{3.14} = A_{4.17} = A_{5.19} = A_{6.20} = M^0_{13},$$

$$A_{1.6} = A_{2.11} = A_{3.15} = A_{4.18} = A_{5.20} = A_{6.21} = M^0_{23},$$
$$A_{7.1} = A_{12.3} = A_{14.5} = -A_{18.2} = -A_{19.2} = A_{21.6} = M^2_{11},$$
$$A_{7.2} = A_{12.8} = A_{14.10} = A_{16.9} = -A_{18.7} = -A_{19.7} = A_{21.11} = M^2_{22},$$
$$A_{7.3} = A_{12.12} = A_{14.14} = A_{16.13} = -A_{18.8} = -A_{19.8} = M^2_{33},$$
$$A_{7.4} = A_{12.13} = A_{14.17} = A_{16.16} = -A_{19.9} = A_{21.18} = M^2_{12},$$
$$A_{7.5} = A_{12.14} = A_{14.19} = A_{16.17} = -A_{18.10} = -A_{19.10} = A_{21.20} = M^2_{13},$$
$$A_{7.6} = A_{12.15} = A_{14.20} = A_{16.18} = -A_{18.11} = A_{21.21} = M^2_{23},$$
$$A_{8.1} = A_{10.2} = A_{13.4} = A_{19.6} = -A_{20.3} = -A_{21.3} = M^3_{11},$$
$$A_{8.2} = A_{10.7} = A_{13.9} = A_{17.10} = -A_{20.8} = -A_{21.8} = M^3_{22},$$
$$A_{8.3} = A_{10.8} = A_{13.13} = A_{17.14} = A_{19.15} = -A_{20.12} = -A_{21.12} = M^3_{33},$$
$$A_{8.4} = A_{10.9} = A_{13.16} = A_{17.17} = A_{19.18} = -A_{20.13} = -A_{21.13} = M^3_{12},$$
$$A_{8.5} = A_{10.10} = A_{13.17} = A_{17.19} = A_{19.20} = -A_{21.14} = M^3_{13},$$
$$A_{8.6} = A_{10.11} = A_{13.18} = A_{17.20} = A_{19.21} = -A_{20.15} = M^3_{23},$$
$$A_{9.2} = A_{11.3} = A_{15.6} = -A_{16.1} = -A_{17.1} = A_{18.4} = A_{20.5} = M^1_{11},$$
$$A_{9.7} = A_{11.8} = A_{15.11} = -A_{16.2} = -A_{17.2} = A_{20.10} = M^1_{22},$$
$$A_{9.8} = A_{11.12} = A_{15.15} = -A_{16.3} = -A_{17.3} = A_{18.13} = M^1_{33},$$
$$A_{9.9} = A_{11.13} = A_{15.18} = -A_{17.4} = A_{18.16} = A_{20.17} = M^1_{12},$$
$$A_{9.10} = A_{11.14} = A_{15.20} = -A_{16.5} = A_{18.17} = A_{20.19} = M^1_{13},$$
$$A_{9.11} = A_{11.15} = A_{15.21} = -A_{16.6} = -A_{17.6} = A_{18.18} = A_{20.20} = M^1_{23},$$
$$A_{16.4} = M^3_{11} - M^1_{12},\ A_{17.5} = M^3_{11} - M^1_{13},\ A_{18.9} = M^1_{22} - M^2_{12},$$
$$A_{19.11} = M^3_{22} - M^2_{23},\ A_{20.14} = M^1_{33} - M^3_{13},\ A_{21.15} = M^2_{33} - M^3_{23}.$$

Система линейных уравнений (12) имеет единственное решение, если

(13) $$\det \| A_{pq} \| \neq 0.$$

Поскольку элементы матрицы $\| A_{pq} \|$ выражаются через моменты M^i_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, i = 0, 1, 2, 3$), определенные в (7) и (8), то неравенство (13) является единственным условием, которому должны удовлетворять внешние нагрузки p_k, для того чтобы по известным компонентам u_k и p_k на поверхности S можно было однозначно найти все упругие коэффициенты однородного тела.

Заметим, что при выводе (12) были исключены интегралы по объему v от перемещений. Нетрудно видеть, что если включить их в число неизвестных, то из (4) получим замкнутую систему из 24 уравнений для 24 величин: α_p ($p = 1, 2, \ldots, 21$) и $\int\limits_v u_k dv$ ($k = 1, 2, 3$). Последние интегралы определяют средние по объему v значения перемещений, которые легко находятся, если известно решение системы (12).

Приведенные выше соображения об определении прочностных характеристик по известным значениям u_k и p_k на границе S можно распространить на более сложные тела: например, на анизотропные линейные вязкоупругие тела. В этом случае необходимо знание компонент u_k и p_k на S как функций времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В.В.** Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. — М.: Наука, 1984.
3. **Рэнсон У., Саттон М., Питерз У.** Голографическая и лазерная спекл-интерферометрия // Экспериментальная механика. Кн. 1. — М.: Мир, 1990. — С. 448—491.
4. **Лурье А.И.** Теория упругости. — М.: Наука, 1970.

г. Новосибирск *Поступила 16/VII 1993 г.*

УДК 539.37

А.Г. Акопян

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНЫХ КЛИНЬЕВ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследуется влияние неоднородности материала на малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения в условиях продольного сдвига и плоской деформации. Принимается, что одна грань клина свободна, а другая жестко защемлена. Решение аналогичных задач для однородных составных клиньев изложено в [1]. Явление малонапряженности линейно-упругих кусочно-однородных тел исследовано в [2, 3]. Задачи малонапряженности неоднородно-составного клина со свободными гранями при продольном сдвиге и плоской деформации рассмотрены в [4].

В настоящей работе получены условия ограниченности напряжений у вершины неоднородного составного клина. Показана зависимость зон малонапряженности от неоднородных механических свойств материалов составного клина.

1. Продольный сдвиг. Пусть два длинных цилиндрических тела из неоднородных материалов со степенным упрочнением спаяны друг с другом по некоторой части боковых поверхностей полным прилипанием. Угловая точка на крае контактной поверхности находится в условиях продольного сдвига. Одна грань в угловой части тела жестко защемлена. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta = 0$ проведем по контактной поверхности, ось z — по продольному направлению (рис. 1).

В каждой области поперечного сечения имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещений

$$\tau_{rz} = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{rz}, \quad \tau_{\theta z} = 2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{\theta z}, \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}. \tag{1.2}$$

Здесь σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и деформаций:

$$\sigma_0 = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}.$$