УДК 539.3

ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ТРЕХСЛОЙНОГО МАТЕРИАЛА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

А. И. Сейфуллаев

Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан
E-mail: a.seyfullayev@yahoo.com

Рассматривается задача теории упругости для трехслойного материала, в котором два слоя, расположенные симметрично относительно центрального слоя, имеют одинаковые свойства. В центральном слое имеется трещина нормального отрыва, вершины которой находятся в соседних слоях. Решение задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Определен коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального разрыва и исследована его зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: слоистые композиты, трещина, коэффициент интенсивности напряжений.

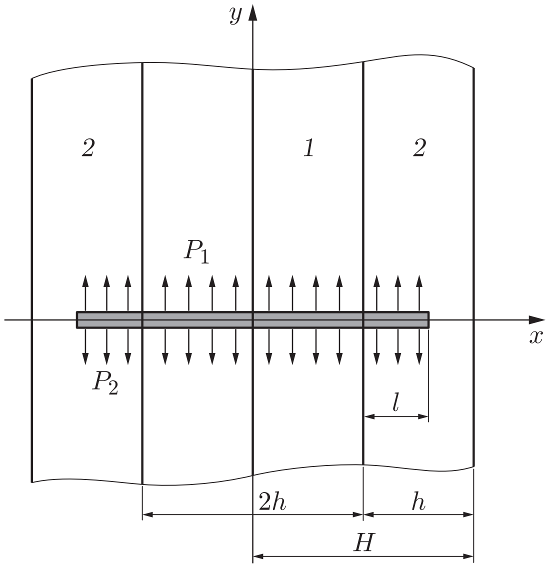
DOI: 10.15372/PMTF20190116

Введение. Многослойные материалы широко используются в различных конструкциях. Для повышения прочности и долговечности таких материалов необходимо исследовать процессы развития в них трещин.

В большинстве работ [1–9] при моделировании трещины многослойные материалы представляются в виде жестко сцепленных слоев, имеющих различные толщину и упругие свойства. При исследовании процесса разрушения многослойных (n-слойных) материалов с трещиной рассматриваются три задачи: 1) задача о трещине, находящейся в одном из боковых слоев [10]; 2) задача о трещине нормального отрыва в боковом слое, вершина которой находится на границе поврежденного и соседнего целого слоев [2, 11, 12]; 3) задача о росте трещины в зависимости от модуля сдвига и коэффициента Пуассона материала слоев, а также от прочности адгезии на границах раздела.

Для того чтобы решить задачу о распространении трещины через границу слоев, необходимо знать распределение напряжений в ее окрестности. В работе [2] проанализировано поле напряжений вблизи трещины, появившейся при разрыве слоя, в предположении, что трещина перпендикулярна поверхностям слоев и ее вершины находятся на границе раздела поврежденного и соседних целых слоев.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается плоская задача теории упругости для трехслойного материала, в которых два слоя, расположенные симметрично относительно центрального слоя, имеют одинаковые свойства. В центральном слое имеется трещина нормального отрыва, вершины которой находятся в соседних слоях. Боковые поверхности составленного таким образом трехслойного материала свободны от внешних



Модель трехслойного материала, содержащего трещину:
1 — центральный слой, *2* — боковые слои

нагрузок. На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения стремятся к нулю. К берегам трещины приложены некоторые заданные нормальные напряжения. Задача полагается симметричной относительно плоскости $y = 0$ декартовой системы координат (x, y) (см. рисунок).

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{gathered}
x = 0, \quad |y| < \infty, \qquad (\tau_{xy})_1 = 0, \qquad u_1 = 0,\\
y = 0, \quad 0 \leqslant x < h, \qquad (\sigma_y)_1 = -p_1 \quad (p_1 \equiv \mathrm{const} \geqslant 0), \qquad (\tau_{xy})_1 = 0,\\
x = H, \quad |y| < \infty, \qquad (\sigma_x)_2 = 0, \qquad (\tau_{xy})_2 = 0,\\
y = 0, \qquad h \leqslant x \leqslant h + l, \qquad (\tau_{xy})_2 = 0,\\
y = 0, \qquad h \leqslant x \leqslant h + l, \qquad (\sigma_y)_2 = -p_2 \quad (p_2 \equiv \mathrm{const} \geqslant 0),\\
y = 0, \qquad h + l \leqslant x \leqslant H, \qquad v_2 = 0,\\
x = h \quad \forall y, \qquad (\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2, \qquad (\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_2,\\
u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2.
\end{gathered}$$

На бесконечности выполняются условия

$$\begin{gathered}
0 < x < H, \qquad |y| \to \infty, \qquad u_j v_j = O(|y|^\alpha),\\
(\sigma_x)_j \to 0, \quad (\sigma_y)_j \to 0, \quad (\tau_{xy})_j \to 0 \qquad (\alpha < 0, \quad j = 1, 2).
\end{gathered}$$

Коэффициент интенсивности напряжений определяется по формуле

$$K_1 = \lim_{x \to (h+l)+0} \{\sqrt{2\pi[x - (h + l)]\sigma_y}\ (x, 0)\}.$$

Здесь $(\sigma_y)_j$, $(\sigma_x)_j$, $(\tau_{xy})_j$ $(j = 1, 2)$ — напряжения в j-м слое из упругого материала с модулем сдвига G_j и коэффициентом Пуассона ν_j; u_j, v_j — перемещения в j-м слое; p_1, p_2 — заданные величины, связанные зависимостью [12]

$$p_1 = k_2 p_2, \qquad k_2 = k\,\frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}, \qquad k = \frac{G_1}{G_2}, \qquad x_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i},$$

которую можно получить с помощью метода Колосова — Мусхелишвили [13].

Сформулированная выше задача рассмотрена в работе [14]. С помощью метода Папковича — Нейбера, интегралов Фурье для гармонических функций и принципа суперпозиции решение этой задачи сводится к системе парных интегральных уравнений с тригонометрическими ядрами и неизвестными правыми частями. Из этих интегральных уравнений искомые функции $C_2(\eta)$ и $D_2(\eta)$ определяются в виде

$$C_2(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^h t\psi_1(t) J_0(\eta t)\, dt, \qquad D_2(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_h^{h+l_1} t\psi_2(t) J_0(\eta t)\, dt, \tag{1}$$

где $J_0(\eta t)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\psi_j(t)$ — неизвестные функции. В [10] показано, что $\psi_2(x) \in C^1[h, h+l]$. Если $k \ne 1$, $\nu_1 \ne \nu_2$, то функция $\psi_1(x)$ непрерывна на интервале $(0, h]$, при $x \to 0$ $\psi_1(x) \sim A(h-x)^{-1/2}$ (A — некоторая известная постоянная). Если функция $\psi_1(x)$ удовлетворяет этим условиям, то $v_1(h-0, 0) \ne 0$, где $v_1(x, y)$ — нормальное смещение в центральном слое.

Представление искомых функций в виде (1) позволяет получить систему двух независимых обобщенных интегральных уравнений Абеля с неизвестными правыми частями. Из этих уравнений с использованием граничных условий получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций

$$\psi_1(x), \quad x \in [0, h), \qquad \psi_2(x), \quad x \in (h, h+l], \qquad l \ne 0.$$

В работе [14] определен коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{\rm I} = p_2 \sqrt{\pi(h+l)}\, \psi_2((l+h)/H,\ h/H,\ k,\ \nu_1,\ \nu_2) \quad (l \ne 0).$$

В данной работе вычислен коэффициент интенсивности напряжений при различных геометрических и механических параметрах задачи.

2. Анализ решения. Рассмотрим частные случаи решения.

1. Пусть $k = G_1/G_2 = 0$, $\nu_1 = 0$ (или $h = 0$). Тогда из [14] следует $\psi_1(x) \equiv 0$, $x \in (0, h]$. При этом решение задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi_2(x) = p_2^* + \int\limits_0^l \psi_2(u) K_{11}(x), u, k_1, \nu_1, \nu_2 \Big|_{k=0,\ \nu_1=0}^{du} \qquad (x \in [0, l]).$$

Данное решение совпадает с известными решениями [1].

2. Пусть $k = 1$, $\nu_1 = \nu_2$. Тогда получаем задачу о центральной трещине, находящейся в упругом слое [1]. Решение данной задачи также совпадает с известными решениями [11, 12]. Полагая $k = 1$, $\nu_1 = \nu_2$, $h \to \infty$, $H \to \infty$, получаем задачу Гриффитса [1, 7, 13].

Решение системы интегральных уравнений сведено к решению системы неоднородных алгебраических уравнений. Из анализа уравнений следует, что при $\lambda \to \infty$ подынтегральные функции экспоненциально уменьшаются, поэтому верхние пределы выбираются таким образом, чтобы подынтегральные функции при фиксированных значениях координат вычислялись с точностью до 10^{-3}.

Размерность матрицы системы алгебраических уравнений равна 21. При $m = 41$ и $m = 21$ различие значений функции $\psi_2(\cdot)$ не превышает 10^{-4}.

В результате численного анализа установлено, что с увеличением k при фиксированных значениях h, h_1, длины трещины l и внешней нагрузки безразмерные значения $K_{\rm I}/(P_2\sqrt{\pi(h+l)}\,)$ увеличиваются; при фиксированных значениях k, длины трещины l, толщины слоя h_1 и внешней нагрузки безразмерные значения $K_{\rm I}/(P_2\sqrt{\pi(h+l)}\,)$ монотонно уменьшаются с увеличением h_1/h (см. таблицу).

Значения коэффициента интенсивности напряжений $K_{\mathrm{I}}/(P_2\sqrt{\pi(h+l)}\,)$

l/h	$K_{\mathrm{I}}/(P_2\sqrt{\pi(h+l)}\,)$					
	$k=2$, $h/h_1=0{,}1$	$k=0{,}1$, $h/h_1=5$	$k=0{,}1$, $h/h_1=0{,}1$	$k=0{,}5$, $h/h_1=1{,}0$	$k=1$, $h/h_1=0{,}1$	$k=0{,}1$, $h/h_1=0{,}5$
0,1	1,0038	1,000	0,9998	1,0010	1,0038	0,9935
0,2	1,0140	1,002	0,9991	1,0041	1,0155	0,9719
0,3	1,0319	1,006	0,9973	1,0090	1,0361	0,9264
0,4	1,0598	1,010	0,9936	1,0154	1,0675	0,8126
0,5	1,1002	1,016	0,9863	1,0226	1,1065	0,7141
0,6	1,1247	1,023	0,9735	1,0195	1,1631	0,6320
0,7	1,1306	1,031	0,8810	1,0056	1,2494	0,5901
0,8	1,1381	1,041	0,9370	0,9853	1,3852	0,5019
0,9	1,1497	1,052	0,7922	0,9382	1,6288	0,4507

Таким образом, решена задача о разрушении трехслойного материала с центральной трещиной нормального отрыва, вершины которой находятся в боковых слоях, одинаковых по толщине и механическим свойствам. Определен коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва, исследована его зависимость от параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Paris P. S.** The fracture mechanics approach to fatigue // Proc. of the 10th Sagamore army materials research conf., Raquette Lake (USA), Aug. 13–16, 1963. Syracuse: Syracuse Univ. Press, 1964. P. 107–127.
2. **Ашбаух Н. Е.** Напряжения в слоистых композитах, содержащих разорванный слой // Прикл. механика. 1973. Т. 40, сер. Е, № 2. С. 221–228.
3. **Cinar A., Erdogan F.** The problem of a crack on the interface biomaterial elastic body // Intern. J. Fracture. 1983. V. 23, N 83. P. 83–102.
4. **Akbarov S. D., Maksudov F. G., Panakhov P. I., Seyfullayev A. I.** On the crack problems in composite materials with curved lagers // Intern. J. Engng Sci. 1994. V. 32, N 6. P. 1003–1016.
5. **Akbarov S. D.** Mechanics of curved composites / S. D. Akbarov, A. N. Guz. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 2000.
6. **Сейфуллаев А. И.** Задача механики разрушения композитных материалов с локально искривленными слоями // Механика композит. материалов. 2006. № 1. С. 75–86.
7. **Кулиев В. Д., Сеидов Э. Э.** К теории разрушения n-слойных материалов с трещиной // Материалы 13-го Междунар. семинара “Технологические проблемы прочности”. Подольск: Моск. гос. обл. ун-т, 2006. С. 209–211.
8. **Перельмутер М. Н.** Анализ напряженного состояния в концевой области трещины на границе раздела материалов методом граничных элементов // Вычисл. механика сплош. среды. 2012. Т. 5, № 4. С. 415–426.
9. **Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В.** Разветвление трещины нормального отрыва в угловой точке на границе раздела сред // Теорет. и прикл. механика. 2012. № 5. С. 101–111.
10. **Seyfullayev A. I., Rustamova M. A., Kerimova Sh. A.** Problem of the mechanics of fatigue fracture of a two-layer material with edge cracks // Mech. Composite Materials. 2017. V. 53, N 3. P. 492–501.
11. **Кулиев В. Д., Насибов В. И.** Краевая трещина в биупругой полосе // Механика композит. материалов. 1983. № 4. С. 594–599.

12. **Кулиев В. Д., Борисова Н. Л.** Трещина продольного сдвига, находящаяся на границе раздела двух биупругих полос разной толщины. Новые явления // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния. 2015. № 2. С. 33–49.
13. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2012.
14. **Искендарзаде Ф. А., Сейфуллаев А. И.** К проблеме разрушения трехслойного материала с центральной трещиной нормального разрыва // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1986. № 1. С. 55–69.

Поступила в редакцию 30/III 2018 г.,
после доработки — 7/V 2018 г.
Принята к публикации 28/V 2018 г.