К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНЫ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

В. П. Кашкаров, А. Т. Лукьянов (Алма-Ата)

Рассматривается решение системы уравнений пограничного слоя жидкости с переменной вязкостью при помощи статического электроинтегратора для случая обтекания пластины однородным потоком [1].

Число работ, посвященных изучению неизотермических течений капельной вязкой жидкости, сравнительно невелико. Заметим, что достаточно просто решаются задачи о слоистых течениях (см., например, [1]). Что касается течения в пограничном слое, то авторам известны лишь две работы, в которых удалось найти аналитические решения. В первой из них [2] находится приближенное решение упрощенной системы уравнений пограничного слоя. В работе [3] используется метод Кармана — Польгаузена, дающий, как известно, в основном качественную картину течения.

Интегрирование системы уравнений пограничного слоя с учетом зависимости вязкости от температуры приходится проводить численными методами. При этом исходные дифференциальные уравнения заменяются системой нелинейных конечно-разностных, решение которых связано с большим объемом вычислительной работы и целым рядом специфических трудностей. В этом случае весьма эффективным оказалось применение статических электроинтеграторов [4], значительно упрощающих и ускоряющих процесс счета. Ниже описывается один из вариантов статического электроинтегратора для непосредственного интегрирования системы уравнений неизотермического плоско-параллельного пограничного слоя, возникающего у пластины, обтекаемой однородным потоком.

Рассматриваемая задача приводится в безразмерных переменных к системе уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right],\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{P}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\tag{1}$$

(P — число Прандтля)

с граничными условиями

$$u=0,\quad v=0,\ \Theta=0\ \text{ при }\ y=0;\qquad u=1,\ \ \Theta=1\ \text{ при }\ y=\infty\tag{2}$$

$$\left(u=\frac{U}{U_\infty},\ v=\frac{V}{U_\infty},\ \Theta=\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w},\ x=\frac{X}{L},\ y=\frac{X}{L},\ L=\frac{\nu_\bullet}{\nu_\infty},\ \nu=\frac{\nu_\infty}{U_\infty},\ \ P=\frac{\nu_\infty}{d}\right)$$

Уравнение (1) в конечных разностях, разрешенное относительно искомых функций, имеет вид

$$u_{n,\,k+1}=\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{1}{U_{nk}}\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\nu_i\,(u_{n+1,\,k}-u_{nk})-$$

$$-\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{1}{U_{nk}}\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b}\nu_i\,(u_{nk}-u_{n-1,\,k})+u_{nk}-\frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{v_{nk}}{u_{nk}}(u_{n+1,\,k}-u_{nk})$$

$$\left(a=\frac{u_{n+1,\,k}-u_{nk}}{N}\right),\quad b=\frac{u_{nk}-u_{n-1,\,k}}{N}\Bigg)\tag{3}$$

$$\Theta_{n.\,k+1}=\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{1}{U_{nk}}\frac{1}{P}(\Theta_{n+1,\,k}-2\Theta_{nk}+\Theta_{n-1,\,k})+\Theta_{nk}-\frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{v_{nk}}{u_{nk}}(\Theta_{n+1.\,k}-\Theta_{nk})\tag{4}$$

$$v_{n,k+1}=v_{n,k}+u_{nk}-u_{n,k+1}\tag{5}$$

---

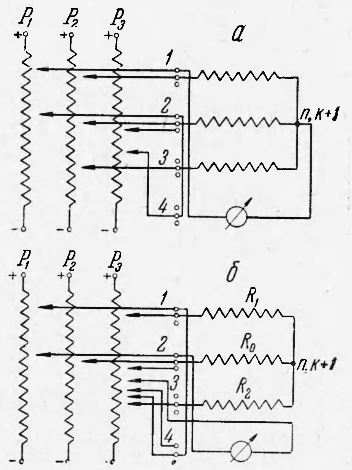
[1] Содержание доклада, сделанного на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике 29.I — 6.II 1964 г. в Москве.

Здесь $N = 0.001$ — наименьшее изменение функции, при котором учитывается изменение коэффициентов; ν_i — значения коэффициента вязкости, взятые с шагом $N = 0.001\ U_\infty$ (U_∞ принимается обычно равным единице). Выражение

$$\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\nu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

соответствует средней величине в интервале $u_{n+1,k} - u_{nk}$. Если, например, $u_{n+1,k} = 0.235\, u_\infty$, $u_{nk} = 0.232\, u_\infty$, то

$$a = \frac{0.003}{0.001} = 3, \qquad \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{a}\nu_i = \frac{\nu_{0.233} + \nu_{0.234} + \nu_{0.235}}{3}$$



Фиг. 1

Статический интегратор состоит из трех дискретных потенциометров высокой разрешающей способности. Отводы от потенциометров выведены на общую коммутационную панель с трехконтактными гнездами (фиг. 1). Потенциометры P_1 и P_2 — функциональные и служат для программирования изменения коэффициентов уравнения; потенциометр P_3 — дискретный; сопротивления R_1, R_0, R_2 составляют счетно-решающий элемент. Решение осуществляется путем перемещения счетно-решающего элемента по точкам сеточной области, представленным в интеграторе потенциалами.

Перед началом решения на потенциометрах P_1 и P_2 устанавливаются функциональные зависимости (между номером отвода и напряжением) вида $F_1 = f(\Delta x / \Delta y,\ v / u)$ и $F_2 = f(\nu / u)$. После этого при помощи штеккеров со шнурами на концы решающего элемента задают напряжения, пропорциональные значениям функции в выбранных точках сеточной области. На фиг. 1, *а*, показана схема соединений в интеграторе при решении разностного уравнения (3). Для интегратора можно записать равенство

$$V_{n,\,k+1} = \frac{1}{2 + R/R_0}\frac{1}{V_{nk}}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{\alpha}\nu_i'(V_{n-1,\,k} - V_{nk}) - \frac{1}{2 + R/R_0}\frac{1}{V_{nk}}\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{\beta}\nu_i'(V_{nk} - V_{n-1,\,k}) + V_{nk} - A(V_{n+1,\,k} - V_{nk}) \quad \left(\alpha = \frac{V_{n-1,\,k} - V_{nk}}{N},\ \beta = \frac{V_{nk} - V_{n-1,\,k}}{N}\right) \tag{6}$$

Здесь α и β — числа наименьших долей деления функционального потенциометра, содержащихся в промежутках $V_{n-1,k} - V_{nk}$ или $V_{nk} - V_{n-1,k}$, $\nu' \sim \nu$, $\alpha = a$, $\beta = b$. Сравнивая уравнения (3) и (6), найдем условия моделирования

$$\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{2 + R/R_0}, \qquad \frac{1}{V_{nk}}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{\alpha}\nu_i' = \frac{1}{u_{nk}}\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\nu_i \tag{7}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{v_{nk}}{u_{nk}} = A, \qquad \frac{1}{V_{nk}}\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{\beta}\nu_i' = \frac{1}{u_{nk}}\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b}\nu_i$$

При решении уравнения (4) отдельные узлы интегратора соединяются по схеме фиг. 1, *б*. При этом для интегратора справедливо равенство

$$V_{n,\,k+1} = \frac{1}{2 + R/R_0}\frac{1}{V_{nk}}(V_{n+1,\,k} - 2V_{nk} + V_{n-1,\,k}) + V_{nk} - A(V_{n-1,\,k} - V_{nk}) \tag{8}$$

Сравнивая уравнения (4) и (8), найдем условия моделирования

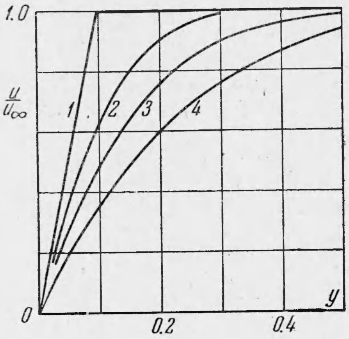
$$\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{1}{P} = \frac{1}{2 + R/R_0}, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{v_{nk}}{u_{nk}} = A \tag{9}$$

Для устойчивости процесса счета необходимо выполнение неравенств [5]

$$\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{1}{P} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}\frac{\nu}{u} \leqslant \frac{1}{2}$$

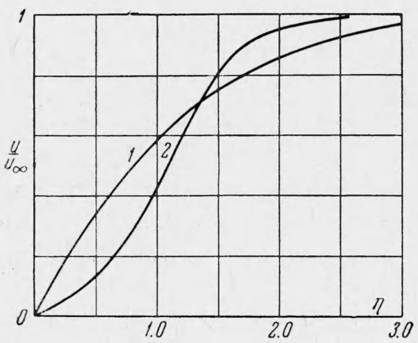
При расчетах область разбивается на две сетки — неподвижную ($\Delta x = 0.005$ и $\Delta y = 0.1$) и подвижную ($\Delta x = \Delta y = 0.1$).

Результаты решения, полученные при помощи статического интегратора описанным выше путем, представлены на фиг. 2—4.

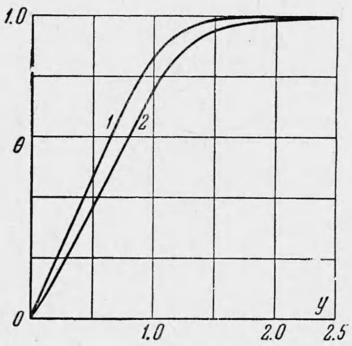


Фиг. 2

Кривые на фиг. 2 показывают развитие профиля скоростей в пограничном слое вдоль пластины; за начальное распределение скорости при $x = 0$ принята кривая вида *1*; кривые *2*, *3*, *4* соответствуют значениям $x = 3\Delta x$, $7\Delta x$, $15\Delta x$; при этом кривая *4* соответствует уже автомодельному профилю. На фиг. 3 изображены автомодельные профили скорости в пограничном слое, образованном при обтекании однородным потоком воды горячей ($T_w = 80°$ С, $T_\infty = 20°$ С — кривая *1*) и холодной ($T_w = 20°$ С, $T_\infty = 80°$ С — кривая *2*) пластин. Характерной особенностью этих профилей (которые качественно совпадают с приведенными в книге [2]) является наличие на кривой *2* точки перегиба (для смазочного масла деформация профиля скорости на холодной пластине была бы выражена более резко); для тех же значений T_w и T_∞ пластины и потока на фиг. 4 приведены профили температуры в пограничном слое. Сравнение построенных кривых для профилей скорости с приведенными в работе [2] показывает их качественную близость.



Фиг. 3



Фиг. 4

Результаты расчета позволяют найти соотношения напряжений трения и тепловых потоков на холодной и горячей пластине

$$\frac{\tau_{w80}}{\tau_{w20}} = \left(\frac{\nu_{80}}{\nu_{20}}\right)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{w80} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_{w20} \qquad \left(\frac{\tau_{w80}}{\tau_{w20}} = 1.20\right)$$

$$\frac{q_{w80}}{q_{w20}} = -\left(\frac{\nu_{20}}{\nu_{80}}\right)^{1/2} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\bigg|_{w20} \bigg/ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\bigg|_{w80} \qquad \left(\frac{q_{w80}}{q_{w20}} = 1.30\right) \tag{10}$$

В скобках указаны значения для воды.

Точность результатов определяется величинами шагов сетки, принятой схемой счета, и тщательностью изготовления отдельных узлов интегратора.

Поступила 1 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
3. Hanna O. T., Myers J. E. Amer. I. Chem. Engng J., 1961, vol. 7, No. 3.
4. Вулис Л. А., Лукьянов А. Т. Статические аналоговые устройства. Сб. «Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники». Машгиз, М., 1963.
5. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, М.— Л., 1951.