в расширяющемся канале, заведомо оказывается седлом, если не принимать во внимание производство капель и влияние кривизны профиля канала. Преобладающая над дроблением агломерация капель ($\Phi < 0$) и положительная кривизна профиля канала ($y'' > 0$) только усиливает это заключение. При более высоких содержаниях конденсированной фазы, преобладающем дроблении капель и отрицательной кривизне профиля седловой характер особенности (т. е. тот же самый, что и в случае чистого газа) возможен лишь при не слишком больших скольжениях. В противном случае $\det \|a_{ij}\| > 0$ и характер особенности оказывается иным: точка перехода через скорость звука утрачивает характер седла.

Поступила 23 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5.
2. **Калинин А. В.** К построению уравнений гидромеханики двухфазной среды с фазовыми переходами.— «Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1969, № 6.
3. **Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.** Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука.— ПММ, 1967, т. 31, № 4.

УДК 539.31

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИКС ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

А. Э. Пуро

(*Таллин*)

При использовании сингулярного приближения [1] для оценки эффективных значений тензора упругости остается невыясненным вопрос о величине тензора упругости тела сравнения. Ниже используется параметрикс [2] для определения первого приближения случайной составляющей тензора деформации и эффективных значений тензора упругости, проводится сравнение с точным решением для частного вида неоднородности и ранее использованным приближением [3].

Эффективное значение тензора упругости $\boldsymbol{\lambda}^0$ определяем из

$$\boldsymbol{\lambda}^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}' \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle,$$

где $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda} - \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle$; $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, тензор напряжения удовлетворяет уравнению равновесия

$$\nabla (\boldsymbol{\lambda \varepsilon}) = 0.$$

Решение уравнения будем искать в виде объемного потенциала

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \int \operatorname{def}_x \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}(\mathbf{y}) \, dv_y \,, \tag{1}$$

где $\operatorname{def}_x = (1/2)[\nabla_x + (\nabla_x)^T]$; $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — параметрикс [4] уравнения равновесия, совпадающий с «главной» полярной частью тензора Грина неоднородной анизотропной среды.

Предполагая, что $\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon''$, $\varepsilon^0 = \mathrm{const}$, и подставляя (1) в уравнение равновесия, получим интегральное уравнение

$$f(x) = \nabla_x \lambda(x)\varepsilon^0 + \int \nabla_x \lambda(\mathbf{x}) \operatorname{def}_x \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}(\mathbf{y})\, dv_y, \tag{2}$$

решение которого строят обычно методом итераций.

Рассмотрим подробнее случай изотропной случайно неоднородной среды

$$\lambda_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu\delta_{im}\delta_{jn}.$$

Параметрикс уравнения равновесия [2]

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi[\lambda(\mathbf{y}) + 2\mu(\mathbf{y})]} r_{,ij} + \frac{1}{8\pi\mu(\mathbf{y})}(\delta_{ij} r_{,pp} - r_{,ij}),$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Ограничимся первым приближением для оценки случайной составляющей тензора деформации.
В этом случае

$$\langle\lambda' u''_{i,i}\rangle = \frac{1}{8\pi}\int \frac{r_{,iji}}{r}\left[H_1(r) r_j \varepsilon^0_{nn} + 2H_2(r) r_m \varepsilon^0_{mj}\right] dv_y; \tag{3}$$

$$\langle\mu' u''_{i,k}\rangle = \frac{1}{8\pi}\int \frac{r_{,ijk}}{r}\{[H_3(r) + H_5(r)] r_j \varepsilon^0_{nn} + 2[H_4(r) - H_6(r)] \times$$
$$\times r_m \varepsilon^0_{mj} + \left[H_5(r) r_j \varepsilon^0_{nn} + 2H_6(r) r_m \varepsilon^0_{mj}\right]\}\delta_{ij} r_{,nnk} dv_y,$$

где, согласно [5], для случайных изотропных однородных полей функции взаимной корреляции обозначены

$$\left\langle\frac{\lambda'(\mathbf{x})\nabla\lambda(\mathbf{y})}{\lambda(\mathbf{y}) + 2\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_1\frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \left\langle\frac{\lambda'(\mathbf{x})\nabla\mu(\mathbf{y})}{\lambda(\mathbf{y}) + 2\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_2(r)\frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\left\langle\frac{\mu'(\mathbf{x})\nabla\lambda(\mathbf{y})}{\lambda(\mathbf{y}) + 2\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_3(r)\frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \left\langle\frac{\mu'(\mathbf{x})\nabla\mu(\mathbf{y})}{\lambda(\mathbf{y}) + 2\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_4(r)\frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\left\langle\frac{\mu'(\mathbf{x})\nabla\lambda(\mathbf{y})}{\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_5(r)\frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \left\langle\frac{\mu'(\mathbf{x})\nabla\mu(\mathbf{y})}{\mu(\mathbf{y})}\right\rangle = H_6(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Преобразуя интегралы (3), получим оценку эффективных значений

$$\mu_1 = \langle\mu\rangle - \frac{6}{15}\langle\mu' \ln \mu\rangle + \frac{4}{15}\int_0^\infty H_4(r)\, dr; \tag{4}$$

$$\lambda_1 = \langle\lambda\rangle + \int_0^\infty \left\{H_1(r) + \frac{2}{3}[H_2(r) + H_3(r)] + \frac{4}{15}[H_4(r) - H_6(r)]\right\} dr.$$

При этом использовались выражения

$$\frac{1}{4\pi}\int H(r)\frac{r_k r_m}{r^4}\, dv = \frac{1}{3}\int_0^\infty H(r)\, dr\,\delta_{km};$$

$$\frac{1}{4\pi}\int H(r)\frac{r_k r_m r_i r_j}{r^6}\, dv = \frac{1}{15}\int_0^\infty H(r)\, dr\,[\delta_{mk}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{mj} + \delta_{kj}\delta_{im}].$$

Можно предположить, что полученные формулы дают относительно наибольшую точность для случайной среды с постоянным коэффициентом

Пуассона, т. е. $\mu(\mathbf{r}) = k\lambda(\mathbf{r})$, так как параметрикс является в этом случае функцией Грина уравнения $\lambda_{ijmn}\nabla_j\varepsilon_{mn} = 0$. Эффективные значения соответственно имеют вид

$$\mu_1 = \langle\mu\rangle - [(6 + 16k)/15(1 + 2k)] \langle \mu' \ln \mu\rangle,$$
$$\lambda_1 = \langle\lambda\rangle - [(15 + 12k - 4k^2)/15(1 + 2k)k]\langle\mu' \ln \mu\rangle.$$

В работе [6, 7] для гетерогенной двухфазной среды с $\mu = \mathrm{const}$ вычислено точное эффективное значение λ_1. Проведем вычисление λ_1 в общем случае для среды с постоянным модулем жесткости. Возьмем дивергенцию от уравнения равновесия

$$\operatorname{grad} [(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}] - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0,$$

получим $\Delta[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}] = 0$.
Согласно теореме о среднем [8] гармонических функций,

$$(5) \qquad (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} = \int (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}\, ds/4\pi R = \langle(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}\rangle .$$

Интегрирование производится по сфере произвольного радиуса, т. е. усреднение по шаровому слою дает значение величины $(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}$ в центре шара.
Из (5) получаем

$$\langle\operatorname{div} \mathbf{u}\rangle = (\langle\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\rangle + 2\mu\langle\operatorname{div} \mathbf{u}\rangle\langle 1/(\lambda + 2\mu)\rangle,$$

и, следовательно,

$$(6) \qquad \lambda_1 = \langle\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\rangle/\langle\operatorname{div} \mathbf{u}\rangle = \langle 1/(\lambda + 2\mu)\rangle^{-1} - 2\mu.$$

Для сравнения оценки (4) и оценки [3] с точным значением разложим (6) в ряд по моментам случайной составляющей

$$(7)\ \lambda_1 = \frac{\langle\lambda + 2\mu\rangle}{1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \dfrac{m_k}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^k}} - 2\mu = \langle\lambda\rangle - \frac{m_2}{\langle\lambda + 2\mu\rangle} + \frac{m_2}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} - \ldots,$$

где
$m_k = \langle(\lambda - \langle\lambda\rangle)^k\rangle = \langle(\lambda')^k\rangle$.
Оценка (4) для рассматриваемой среды

$$\lambda_1 = \langle\lambda\rangle - \langle\lambda' \ln(\lambda + 2\mu)\rangle = \langle\lambda\rangle - m_2/\langle\lambda + 2\mu\rangle + (1/2)m_3/\langle\lambda + 2\mu\rangle^2 - \ldots$$

с точностью до трех членов является более точной по сравнению с [3], которая дает только первые два члена разложения (7).

Точное значение (6) можно получить, используя тензор Грина рассматриваемой среды

$$(8) \qquad G_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{16\pi^2} \int \frac{1}{\lambda(\mathbf{z}) + 2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|}\right) \times dv_z + \frac{1}{8\pi\mu} (\delta_{ij} r_{,pp} - r_{,ji}) .$$

Покажем, что при $\lambda(z) = \mathrm{const}$ выражение (8) переходит в известное для однородной среды, т. е. интеграл

$$(9) \qquad - \int \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{z}|}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|}\right) dv_z = \frac{\partial}{\partial y_i} \int \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{z}|} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}\, dv_z = 2\pi \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} r .$$

Интеграл в правой части (9) представляет производную от объемного потенциала (притяжение) с плотностью $1/\rho$ ($\rho = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$) по бесконечному пространству и, согласно [9], равен интегралу по шару с центром в y и радиусом $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = r$

$$\int_v \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} dv_z = 4\pi \int_0^r \rho d\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} = -2\pi \frac{x_j - y_j}{r}.$$

Непосредственной подстановкой (8) в уравнение равновесия проверяется, что (8) является функцией Грина.

Возьмем в качестве функции Леви [4]

$$(10) \qquad G_{ji}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{16\pi^2} \int \frac{1}{\lambda(\mathbf{z}) + 2\mu(\mathbf{z})} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|} \right) dv_z + \frac{1}{8\pi\mu(\mathbf{y})} (\delta_{ij} r_{,pp} - r_{,ji}).$$

В первом приближении ε''_{ij} вычисляем по формуле (2), используя в подынтегральном выражении (10).

Вводя функции взаимной корреляции изотропных однородных полей λ, μ,

$$\langle \nabla_y \lambda(y)/[\lambda(z) + 2\mu(z)] \rangle = M_1(\rho)\boldsymbol{\rho}/\rho; \quad \langle \nabla_y \mu(y)/[\lambda(z) + 2\mu(z)] \rangle = M_2(\rho)\boldsymbol{\rho}/\rho;$$

$$\langle \lambda'(x) \nabla_y \lambda(y)/[\lambda(z) + 2\mu(z)] \rangle = \nabla_y H_1(\rho, R, \theta); \quad \langle \lambda'(x) \nabla_y \mu(y)/[\lambda(z) + 2\mu(z)] \rangle = \nabla_y H_2(\rho, R, \theta),$$

где $\rho = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$; $R = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$; $\cos\theta = \boldsymbol{\rho}\mathbf{R}/\rho R$, вычислим

$$(11) \qquad \langle \varepsilon''_{ik} \rangle = \frac{1}{3} \int_0^\infty \left[M_1(\rho) + \frac{2}{3} M_2(\rho) \right] d\rho \varepsilon^0_{pp} \delta_{ik} = -\left(\frac{1}{3} \left\langle \frac{\lambda'}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \frac{2}{3} \left\langle \frac{\mu'}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \varepsilon^0_{pp} \delta_{ik}.$$

При вычислении интегралов

$$(12) \qquad \langle \lambda' \varepsilon''_{pp} \rangle = \frac{-1}{16\pi^2} \int\int \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} H_1(\rho, R, \theta) \varepsilon^0_{pp} + \frac{\partial}{\partial y_k} H_2 \times (\rho, R, \theta) \varepsilon^0_{ki} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{1}{R} \right) dv_y dv_z = -\left[\left\langle \frac{(\lambda')^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \frac{2}{3} \left\langle \frac{\lambda'\mu'}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right] \varepsilon^0_{pp};$$

$$(13) \qquad \langle \mu' \varepsilon''_{pp} \rangle = -\left(\left\langle \frac{\mu'\lambda'}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \frac{2}{3} \left\langle \frac{\mu'\mu'}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \varepsilon^0_{pp}$$

учитывается, что, интегрируя y по всему пространству, получаем выражение, зависящее от R так, что

$$\frac{1}{4\pi} \int H(R) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{R} dv_z = -\frac{1}{3} H(0) \delta_{ij}.$$

С учетом выражений (11)—(13) оценка эффективного значения модуля сжатия $k = \lambda + (2/3)\mu$

$$k_1 = \langle k\rangle + \left\langle\left(\lambda' + \frac{2}{3}\mu'\right)\varepsilon''_{pp}\right\rangle \frac{1}{\langle\varepsilon^0_{pp} + \varepsilon''_{pp}\rangle} = \tag{14}$$

$$= \langle k\rangle - \frac{\left\langle\dfrac{\lambda'\lambda'}{\lambda+2\mu}\right\rangle + \dfrac{8}{9}\left\langle\dfrac{\lambda'\mu'}{\lambda+2\mu}\right\rangle + \dfrac{4}{9}\left\langle\dfrac{\mu'\mu'}{\lambda+2\mu}\right\rangle}{1 - \dfrac{1}{3}\left\langle\dfrac{\lambda'}{\lambda+2\mu}\right\rangle - \dfrac{2}{9}\left\langle\dfrac{\mu'}{1+2\mu}\right\rangle}.$$

При $\mu = \mathrm{const}$ выражение (14) переходит в точное. Принимая в формуле (14) величину $1/(\lambda + 2\mu)$ либо как

$$1/(\lambda + 2\mu) \approx 1/\langle\lambda + 2\mu\rangle, \text{ либо как } 1/(\lambda + 2\mu) \approx \langle 1/(\lambda + 2\mu)\rangle,$$

получаем оценки, соответствующие сингулярному приближению [1] и полученные также в [3].

Поступила 18 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фокин А. Г.** Об использовании сингулярного приближения при решении задач статистической теории упругости.— ПМТФ, 1972, № 1.
2. **Rozo Furuhashi, Masaharu Kataoke.** Theory of elastic potential of inhomogeneous materials.— «Bulletin of JSME», 1968, vol. 11, N 48.
3. **Иванищева О. И., Минаев В. А.** О напряженно-деформированном состоянии стохастически неоднородных упругих тел.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. **Миранда К.** Уравнения в частных производных эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
5. **Обухов А. М.** Статистическое описание непрерывных полей.— «Труды Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, № 24.
6. **Hill R.** Elastic propertic of reinforced solids; Some theoretical principles.— «J. Mech. Phys. Solids», 1963, vol. 11, N 5.
7. **Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.** К вычислению упругих модулей гетерогенных сред.— ПМТФ, 1968, № 3, с. 37.
8. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М., Гостехтеориздат, 1951, т. 11.
9. **Сретенский Л. Н.** Теория ньютонова потенциала. М.— Л., ГИТТЛ, 1946.