

К ТЕОРИИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О.Д. Григорьев (Новосибирск)

Рассматривается связь между условием положительности мощности рассеивания и картиной действительного плоского течения вблизи прямой линии разрыва; устанавливается кинематический признак существования прямой линии разрыва напряжений.

Докажем следующий кинематический признак существования прямой линии разрыва. Для того чтобы некоторая прямая была линией разрыва напряжений для действительного плоского течения жестко-пластического тела, необходимо и достаточно, чтобы указанная прямая:

а) не совпадала с линией скольжения;

б) после исключения поступательного движения пластической области была ортогональна к линиям тока, и разделяла ортогональные к линиям тока траектории различной вогнутости (выпуклости); при этом линия разрыва не совпадает с точками перегиба линий тока.

Необходимость. Пусть имеется прямая линия разрыва напряжений. Очевидно, она не совпадает с линией скольжения. Исключив поступательное движение пластической области, получим, что линия разрыва ортогональна к полю скоростей. Так как скорости непрерывны вблизи прямой линии разрыва, то криволинейная сетка в виде линий тока и ортогональных к ним траекторий имеет здесь непрерывную касательную.

Вдоль указанной ортогональной сетки имеют место соотношения [1, 2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{aligned} \right\} = \sigma \pm k \cos 2\beta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \sigma_{12} = k \sin 2\beta \quad (1)$$

$$\xi_{11} = -\xi_{22} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} = \frac{v}{R_2}, \quad \xi_{12} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{v}{H_1} = 2 \operatorname{tg} 2\beta \frac{v}{R_2}$$

Здесь σ_{ij} , ξ_{ij} — физические компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации; H_1 , H_2 — коэффициенты Ламе; β — угол между направлением большого главного напряжения и вектором скорости; v — модуль вектора скорости; R_2 — радиус кривизны ортогональных к линиям тока траекторий.

Согласно (1) с обеих сторон прямой линии разрыва (после исключения поступательного движения) имеем

$$\sin 2\beta^+ = \sin 2\beta^-, \quad \beta^- = 90^\circ - \beta^+ \quad (2)$$

Здесь значения с разных сторон линии разрыва отличаются индексами плюс и минус.

Рассмотрим условие положительности мощности рассеивания вблизи линии разрыва, выразив последнее в форме [2]

$$\begin{aligned} R_2 > 0 & \text{ для } -45^\circ < \beta < 45^\circ \text{ или } 135^\circ < \beta < 225^\circ \\ R_2 < 0 & \text{ для } -45^\circ < \beta < 135^\circ \text{ или } 225^\circ < \beta < 315^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

При этом радиус кривизны считается положительным, если он направлен в сторону возрастания параметра q_1 .

Из (3) — (2) следует, что прямая линия разрыва разделяет ортогональные траектории различной вогнутости (выпуклости).

Достаточность. Пусть имеет место действительное плоское течение. Причем поле линий тока после исключения поступательного движения пластической области содержит ортогональную к линиям тока прямую, которая не совпадает с линией скольжения и разделяет ортогональные траектории различной вогнутости. По условию вдоль указанной прямой

$$R_2 = \infty \quad (4)$$

Поэтому тензор скоростей деформации обращается вдоль нее в нуль. С другой стороны, вследствие различной вогнутости ортогональных траекторий функция β при переходе через прямую претерпевает разрыв (3). Таким образом, рассматриваемая прямая может быть только линией разрыва напряжений для действительного плоского течения [3]. Заметим, что из рассмотрения выпал случай прямых линий тока, т. е. когда среда движется, как твердое тело. Покажем, в заключение, что линия разрыва не совпадает с точками перегиба ортогональных траекторий. Ввиду (1) имеем

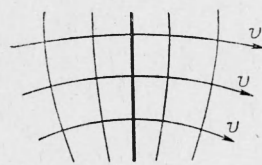
$$\xi_{12}^+ = \xi_{12}^-, \quad v^+ = v^-, \quad \left[\frac{\partial \ln v}{\partial s_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \right]^+ = \left[\frac{\partial \ln v}{\partial s_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \right]^- = 0 \quad (5)$$

где $\partial \alpha / \partial s_1$ — кривизна линий тока; $\partial / \partial s_2$ — производная вдоль линии разрыва.

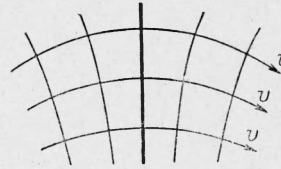
Так как случай поступательного движения исключается, то

$$\frac{\partial \ln v^+}{\partial s_2} = \frac{\partial \ln v^-}{\partial s_2} \neq 0, \quad \frac{\partial \alpha^+}{\partial s_1} = \frac{\partial \alpha^-}{\partial s_1} \neq 0 \quad (6)$$

Отсюда в силу леммы о сохранении непрерывной функции в окрестности точки, где она отлична от нуля, своего знака, получим, что кривизна линий тока не меняет знака при переходе через линию разрыва. Следовательно, прямая линия разрыва



Фиг. 1



Фиг. 2

не является геометрическим местом точек перегиба линий тока. На фиг. 1 и 2 изображены возможные картины плоского течения вблизи прямой линии разрыва.

Поступила 22 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Григорьев О. Д. Об условии положительности мощности рассеивания в плоском течении жестко-пластического тела. ПМТФ, 1962, № 1.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.

О РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБЕ

В. С. Наместников (Новосибирск)

В работе [1] при рассмотрении релаксации тонкостенной трубы, закрученной и растянутой одновременно, предполагалось, что упругие мгновенные компоненты деформации удовлетворяют условию несжимаемости. Рассмотрим эту задачу, освободившись от требования несжимаемости.

Оси x, y располагаем в касательной плоскости, направив ось x параллельно оси трубы. Тензор напряжений в рассматриваемом случае приводится к

$$\sigma_x = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1)$$

Тензор упругих деформаций выражается

$$e_x = \sigma/E, \quad e_y = e_z = -\nu\sigma/E, \quad e_{xy} = (1+\nu)\tau/E, \quad e_{xz} = e_{yz} = 0 \quad (2)$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона)

Выражения для деформации ползучести имеют вид

$$\dot{p}_x = \frac{\dot{p}}{\sigma_i} \sigma, \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = \frac{-\dot{p}}{2\sigma_i} \sigma, \quad \dot{p}_{xy} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{\sigma_i} \tau, \quad \dot{p}_{xz} = \dot{p}_{yz} = 0 \quad (3)$$

p и σ_i связаны зависимостью

$$\dot{p}^2 = k \exp \left\{ \frac{\sigma_i}{A} + \frac{|\tau_{\max}|}{A_0} \right\} \quad \left(\dot{p}^2 = \frac{2}{3} \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}, \sigma_i^2 = \frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right) \quad (4)$$

В рассматриваемом случае

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad \tau_{\max} = \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} \quad (5)$$

Постоянными сохраняются удлинения и угол поворота трубы, поэтому условия релаксации сводятся к

$$e_x = e_x + p_x = \text{const}, \quad e_{xy} = e_{xy} + p_{xy} = \text{const} \quad (6)$$

Из (2), (3) и (6) получаем

$$\dot{\sigma} + \frac{E\dot{p}}{\sigma_i} \sigma = 0, \quad \dot{\tau} + \frac{E\dot{p}}{m\sigma_i} \tau = 0 \quad \left(m = \frac{2(1+\nu)}{3} \right) \quad (7)$$