

УДК 550.344.42

Генерирующие граничные условия для расчёта распространения цунами на последовательности вложенных сеток

К. Хаяши¹, Ан.Г. Марчук², А.П. Важенин¹

¹The University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Fukushima, Japan

²Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: m5161111@gmail.com (Хаяши К.), mag@omzg.sscs.ru (Марчук Ан.Г.), vazhenin@u-aizu.ac.jp (Важенин А.П.)

Хаяши К., Марчук Ан.Г., Важенин А.П. Генерирующие граничные условия для расчёта распространения цунами на последовательности вложенных сеток // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 315–331.

В работе анализируются граничные условия, которые применяются при численном моделировании процессов генерации и распространения волн цунами в различных случаях. Особое внимание уделяется генерирующим граничным условиям, которые позволяют легко генерировать волну с заданными характеристиками (амплитуда, период и, вообще, форма сигнала или мареограмма). Ввиду того что в распространяющейся волне цунами скорость водного потока однозначно определяется высотой волны и глубиной, можно путём принудительного изменения уровня водной поверхности в граничных узлах расчётной сетки и заданием компонент скорости водного потока получить волну, распространяющуюся от границы внутрь области. При помощи такого приёма реализован численный расчёт распространения цунами от очага до берега на последовательности сгущающихся сеток. В этом вычислительном эксперименте параметры волны цунами из области в подобласть передаются именно через граничные условия. Ещё таким способом можно модельным источником малого размера генерировать очень длинную волну цунами, в частности такую волну, которая на заданной линии имеет определённый профиль. Иногда такое требуется при тестировании численных методов расчёта цунами.

DOI: 10.15372/SJNM20180306

Ключевые слова: численный расчёт распространения цунами, граничные условия, вложенные сетки.

Hayshi K., Marchuk An., Vazhenin A. Generating boundary conditions for the tsunami propagation calculation on imbedded grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 3. — P. 315–331.

The boundary conditions that are used for the numerical modeling of the tsunami generation and propagation have been studied. This study focuses on the generating boundary conditions which make it possible to simulate the tsunami wave with desired characteristics (amplitude, time period and, generally speaking, waveform). Taking into account the fact that the water flow velocity in the propagating tsunami wave is uniquely determined by its height and the ocean depth, it is possible to simulate the wave which propagates inward from the boundary into the area of simulation. This can be done by setting the wave height and the water flow velocity over the boundary. By such a way the numerical modeling of the tsunami propagation from a source up to the coast was implemented on a sequence of refining grids. In the conducted numerical experiment, the wave parameters are transmitted from a bigger area into a subarea via boundary conditions. In addition, such a method allows generating a wave that has certain characteristics on a specified line.

Keywords: numerical computation of the tsunami propagation, boundary conditions, nested grids.

Введение

Существующим и создаваемым службам предупреждения цунами требуется решать задачу быстрой и достаточно детальной оценки ожидаемой высоты цунами вдоль побережья. Целесообразней всего решать такую задачу с помощью численного моделирования распространения волны, используя дифференциальную модель мелкой воды [1]. Сам такой подход не является чем-то новым. Создано и протестировано несколько разностных схем, корректно решающих нелинейные уравнения мелкой воды. Наиболее известны пакеты: MOST, TUNAMI и COMCOT. Их описание давно опубликовано и большое число исследователей, занимающихся изучением цунами, использует их при численном моделировании распространения волны цунами. Но численный расчёт распространения волны на персональном компьютере в достаточно большой области (порядка 10 миллионов расчётных узлов) длится 2–3 часа. При этом сетка, покрывающая область такого размера, в которую входит и очаговая область, и береговая линия, не может быть достаточно детальной для корректного моделирования волны вблизи берега и в бухтах. Но если использовать в расчётах шаг, равный нескольким метрам (вместо нескольких сот метров), потребуется на 2–3 порядка больше вычислительных ресурсов (оперативной памяти и времени расчётов), что практически исключает использование персональных компьютеров для получения результата в течение десятков минут. А скорость расчётов очень важна для защиты прибрежных территорий и для принятия своевременных мер по предупреждению.

Один из возможных путей для решения этой проблемы — это использование вложенных сеток. Это означает, что сначала расчёт ведётся на достаточно грубой расчётной сетке (с длиной шага в сотни метров), а затем при приближении к береговой линии реализуется переход на новую более детальную расчётную сетку. При этом эта новая сетка покрывает лишь небольшую подобласть от исходной области моделирования. Таких переходов в новые подобласти с более детальными расчётными сетками может быть несколько. На последнем этапе расчёт ведётся в прибрежной зоне (в портах и бухтах), где пространственное разрешение расчётной сетки составляет несколько метров, что позволяет получить детальную картину ожидаемого затопления побережья. Метод вложенных сеток (nested grids) начал использоваться достаточно давно (ещё в конце прошлого века), но в основном такой подход использовался для более точного моделирования волны в прибрежных акваториях, а не в целях ускорения численных расчётов. В частности, как только был создан численный метод MOST, использующий расщепление разностной схемы по направлениям, в нём была предусмотрена возможность использования адаптивных сеток, которые сгущались в направлении уменьшения глубины [2]. Это необходимо делать для того, чтобы при уменьшении длины волны при её приближении к берегу количество расчётных узлов на длину волны не становилось меньше чем 8–10 узлов. В противном случае начинается резкая диссипация энергии волны, не обусловленная никаким физическим процессом, что приводит к неестественному снижению амплитуды цунами. Примерно с такой же целью начали применяться вложенные сетки в тех местах расчётной области, где распространяющаяся волна становится короче и выше. Сначала метод вложенных сеток реализовывался по следующей схеме: в какой-то момент времени все параметры течения в некоторой подобласти “замораживались”, после чего проводилась интерполяция на более детальную расчётную сетку в этой подобласти. Затем расчёт продолжается уже во вложенной подобласти на новой сетке и, возможно, с новым шагом по времени. При этом продолжать расчёт можно на этом же компьютере (прекратив расчёт в “большой” области) или передать данные на другой вычислительный модуль [3]. Достаточно много авторов использовали вложенные сетки для увеличения детальности

вычислений в некоторых подобластях, где требовалась оценка параметров волны [4–7]. По сути, методы там отличаются только способами передачи параметров распространяющейся волны (возвышение водной поверхности и компоненты скорости водного потока) из всей расчётной области в подобласть с более детальной расчётной сеткой, и в некоторых случаях в подобласти используется иная математическая модель. Некоторые авторы используют в подобластях адаптивные сетки с треугольными ячейками [8]. Такой подход существенно усложняет алгоритм расчёта, что ни в коей мере не способствует ускорению вычислений, так как пошаговый расчёт ведётся во всей расчётной области, включая и подобласть (подобласти). Следует заметить, что ряд авторов вообще не конкретизируют тот момент, каким способом данные передаются из “большой” области в подобласть.

Практически все используемые методы на вложенных сетках предполагают кратность длин шагов “грубой” сетки исходной расчётной области и более детальной сетки подобласти, и обычно более детальная цифровая батиметрия получается из исходной батиметрии в узлах “грубой” сетки простой билинейной интерполяцией. Такой подход затруднителен при использовании “несогласованных” сеток, расположения узлов которых практически нигде не совпадают. Более того, на границе детальной сетки, с цифровой батиметрией, построенной на основе других батиметрических данных, по сравнению с глобальными базами таких данных [9–10] и др., может оказаться скачок глубины, что может негативно отразиться на достоверности результатов численного моделирования.

1. Два типа граничных условий при моделировании распространения волн

При численном моделировании различных динамических процессов, например распространения волн, область моделирования обычно является ограниченной в пространстве. Поэтому при достижении волной границ расчётной области необходимо учитывать реакцию оставшейся части океана (не входящей в область моделирования) на колебания водной поверхности внутри расчётной области. По большому счёту, возможны два варианта: свободный выход волны за пределы расчётной области без отражения и отражение от тех границ, которые представляют береговые линии. Следовательно, в численных расчётах распространения длинных волн обычно используются два типа граничных условий: отражения и свободный выход волны за пределы расчётной области. Рассмотрим, какой конкретно вид должны иметь оба этих типа граничных условий при численных расчётах распространения волн цунами по модели мелкой воды [1].

Для выяснения некоторых особенностей распространения длинных волн рассмотрим одномерную систему дифференциальных уравнений мелкой воды. В одномерном случае при отсутствии внешних сил (кроме силы гравитации) эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Du)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

здесь u — горизонтальная скорость потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущённого уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Из уравнений мелкой воды следует, что скорость волны не зависит от её длины и определяется формулой Лагранжа [1]

$$c = \sqrt{gD}. \quad (3)$$

Эта формула имеет основополагающее значение для кинематики длинных волн (в том числе цунами). Фронт волны может быть определён как граница между той частью акватории, где вода покоится (возвышение η и компоненты скорости равны нулю), и той частью, куда к этому моменту возмущение от источника уже дошло ($\eta \neq 0$). Для описания динамики волн цунами в прибрежной зоне, где амплитуда цунами возрастает, а глубина становится меньше, применяется нелинейная модель мелкой воды [11], в рамках которой скорость распространения волн выражается формулой

$$c = \sqrt{g(D + \eta)}. \quad (4)$$

Итак, сначала получим приближённую формулу для величины горизонтальной скорости u воды при движении волны цунами, если глубина равна D . Такую зависимость можно получить явным образом из линеаризованных уравнений мелкой воды (1), (2). Мы уже знаем, что в рамках этой модели волна распространяется со скоростью, определяемой формулой Лагранжа (3). Представим бегущую волну в виде гармонической функции

$$\eta = a \cos(kx - \omega t), \quad (5)$$

которая описывает волну высотой a , бегущую в сторону увеличения x -координаты со скоростью $c = \omega/k$. Подставив выражение для смещения водной поверхности (5) в уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gka \sin(kx - \omega t). \quad (6)$$

Интегрируя по t обе части уравнения (6), получаем зависимость скорости потока в волне от амплитуды и глубины

$$u = \int \frac{gk}{-\omega} a \sin(kx - \omega t) d(kx - \omega t) = \frac{g}{c} (a \cos(kx - \omega t)) = \frac{g}{\sqrt{gD}} \eta = \eta \sqrt{\frac{g}{D}}. \quad (7)$$

Таким образом, в гармонической волне вида (5) скорость течения воды определяется по формуле (7). Но в силу линейности процесса для любой длинной волны, которая может быть представлена в виде суперпозиции гармонических волн разной частоты и является решением системы линейных дифференциальных уравнений мелкой воды (1), (2), формула (7) будет справедлива. А для квазилинейной системы уравнений мелкой воды, где скорость фронта и гребня волны определяются зависимостью (4), формула для горизонтальной скорости потока в движущейся волне будет иметь вид

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}}, \quad (8)$$

где η — высота волны, D — глубина, g — ускорение силы тяжести. Вот такая корреляция скорости водного потока в волне и её амплитуды позволяет строить граничные условия при численном моделировании цунами в ограниченной области океана.

Рассмотрим теперь двумерные уравнения мелкой воды, описывающие распространение длинных волн (в том числе цунами) в двумерных акваториях при отсутствии внешних сил (кроме силы гравитации),

$$\begin{aligned} H_t + (uH)_x + (vH)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + gH_x &= gD_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + gH_y &= gD_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y, t)$ — толщина водного слоя, u и v — компоненты горизонтальной скорости потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущённого уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Для численного решения этой системы дифференциальных уравнений обычно используется явная разностная схема с центральными разностями. Это означает, что по такой схеме значения параметров течения на последующем временном шаге могут быть вычислены только во внутренних точках расчётной области. Центральные разности должны применяться из-за того, что заранее неизвестно направление распространения волны. Таким образом, значения сеточных переменных в граничных узлах сетки на очередном временном шаге должны быть получены только на основе граничных условий.

Рассмотрим сначала более простое граничное условие полного отражения волны (или непротекания), которое обычно ставится в узлах расчётной сетки вдоль береговой линии, являющейся хорошим отражателем волны цунами. Пусть для определённости левая граница прямоугольной расчётной области является береговой линией, от которой волна должна отразиться. Чаще всего для численного решения дифференциальных уравнений мелкой воды используется прямоугольная сетка. В данной области динамическими параметрами волнового движения являются сеточные переменные $\eta(i, j)$, $u(i, j)$ и $v(i, j)$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), отображающие значения возвышения свободной поверхности и компонент скорости водного потока в узлах сетки. Также в каждом узле задана глубина $D(i, j)$. В результате расчёта по явной разностной схеме на очередном $(n + 1)$ -м шаге по времени вычислены значения сеточных переменных во всех внутренних узлах расчётной сетки $\eta_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$ ($i = 2, \dots, n - 1$; $j = 2, \dots, m - 1$). Для того чтобы на левой границе были реализованы условия отражения волны, могут быть использованы следующие простейшие граничные условия:

$$\eta_{1,j}^{n+1} = \eta_{2,j}^{n+1}, \quad u_{i,j}^{n+1} = 0, \quad v_{1,j}^{n+1} = v_{2,j}^{n+1}, \quad (10)$$

означающие, что компонента скорости в направлении оси X в граничных узлах равна нулю. Если отражающая граница направлена под углом α к оси ординат, то условия на этой границе должны обеспечивать равенство нулю скорости водного потока в направлении нормали к ней. При этом нормальная к линии отражающей границы компонента скорости принудительно присваивается соответствующим параметрам в ближайшем к ней “сухом” узле, где вычисления по разностной схеме не осуществляются, так как там значение глубины не является положительным.

Граничные условия свободного выхода волны за пределы расчётной области имеют более сложный вид. В литературе они иногда называются условиями Зоммерфельда. Суть их заключается в переносе параметров течения из ближайших внутренних узлов сетки в граничные, учитывая направление движения волны и скорость, определяемую из (3). В частности, на левой границе расчётной области для реализации свободного выхода волны из области могут быть использованы следующие граничные условия:

$$\eta_{1,j}^{n+1} = \eta_{1,j}^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cos(\alpha) \right) + \eta_{2,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cos(\alpha), \quad (11)$$

$$u_{1,j}^{n+1} = u_{1,j}^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cos(\alpha) \right) + u_{2,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cos(\alpha), \quad (12)$$

$$v_{1,j}^{n+1} = v_{1,j}^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cos(\alpha) \right) + v_{2,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cos(\alpha), \quad (13)$$

$$j = 2, \dots, m - 1.$$

Здесь угол α задаёт направление движения волны относительно оси абсцисс и вычисляется по формуле

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{(u_{2,j}^n)^2}{(u_{2,j}^n)^2 + (v_{2,j}^n)^2}}. \quad (14)$$

Следует заметить, что коэффициент при первых слагаемых в формулах (11)–(13) не может быть отрицательным ввиду условия устойчивости Куранта для явных разностных схем, которое не допускает продвижения волны более чем на один шаг сетки по пространству за один шаг по времени. На других границах такого рода граничные условия слегка изменятся. По сути, граничные условия (11)–(13) представляют собой запись разностной схемы для уравнений (9), использующей для аппроксимации производных не центральные, а правые разности.

Остановимся теперь на “генерирующих” граничных условиях. Они позволяют генерировать волну, распространяющуюся внутрь расчётной области. Это может быть не только внешняя граница области, но и граница какой-либо подобласти. Ввиду того что скорость водного потока в движущейся волне однозначно определяется из (8), то путём принудительного задания на какой-либо границе ненулевых значений амплитуды и компонент скорости потока можно получить волну цунами с заданными параметрами, распространяющуюся внутрь расчётной области.

В качестве примера работы генерирующих граничных условий на рисунках 1а–1г визуализирована водная поверхность квадратной расчётной области 1000×1000 км с модельным рельефом дна, где глубина пропорциональна квадрату расстояния до нижней границы.

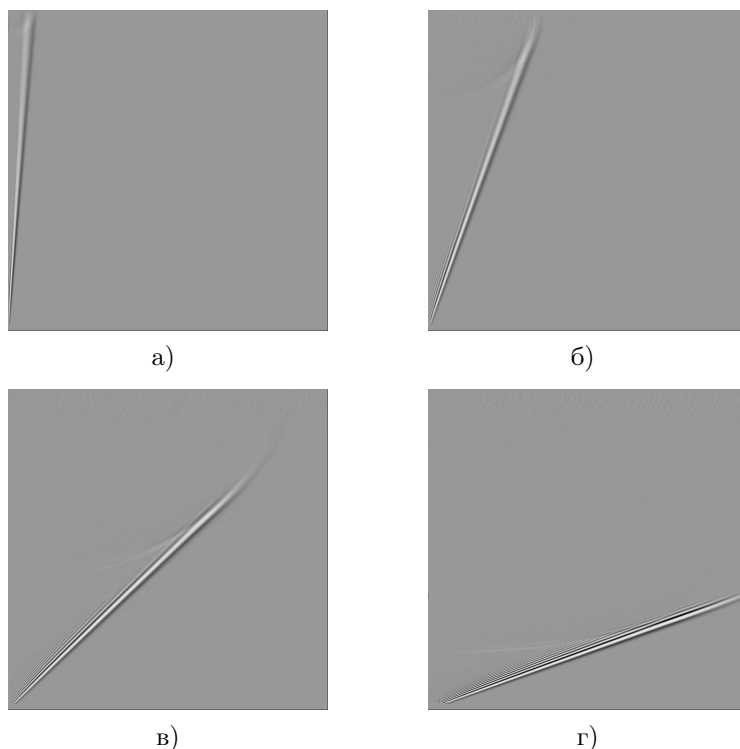


Рис. 1. Водная поверхность в различные моменты времени после генерации волны цунами с помощью граничных условий на левой границе расчётной области

На левой границе реализуются следующие генерирующие граничные условия:

$$\eta_{1,j}^{n+1}(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right), \quad u_{1,j}^{n+1}(t) = \eta(t) \sqrt{\frac{g}{D}}, \quad v_{1,j}^{n+1} = 0 \quad (15)$$

при $t \leq T$ и

$$\eta_{1,j}^{n+1} = \eta_{2,j}^{n+1}, \quad u_{1,j}^{n+1} = u_{2,j}^{n+1}, \quad v_{1,j}^{n+1} = v_{2,j}^{n+1} \quad (t > T). \quad (16)$$

Здесь T задаёт период волны.

На рис. 1а–1г видно, как волна с прямолинейным фронтом распространяется внутрь расчётной области, сохраняя всё время прямолинейность фронта, что соответствует точному аналитическому решению соответствующей кинематической задачи [12]. С помощью такого приёма можно вести расчёт распространения цунами, пришедшей в рассматриваемую область извне. Это позволяет рассчитывать процесс распространения цунами на последовательности вложенных сеток.

2. Расчёт цунами на последовательности сгущающихся сеток

Численный расчёт распространения цунами на последовательности сгущающихся сеток позволяет получить детальное распределение высоты волны вдоль некоторых участков побережья, которые мы считаем важными с точки зрения прогноза цунами. Если вести расчёт во всей области, включающей в себя и район генерации, и береговую линию с очень малым шагом по пространству, обеспечивая тем самым детальность оценок, то из-за условия устойчивости придётся считать с очень малым шагом по времени, что приведёт к большим затратам машинного времени и вычислительных ресурсов. Приведём пример численного расчёта распространения цунами от очага, находящегося на значительном расстоянии от берега до мелководных бухт, где обычно сосредоточены объекты инфраструктуры и жилые постройки.

Для численного моделирования распространения цунами был использован алгоритм MOST, основанный на расщеплении разностной схемы по пространственным направлениям и разработанный в конце 80-х годов прошлого века в Вычислительном центре СО АН СССР В.В. Титовым [2]. Кратко опишем этот алгоритм. Система уравнений мелкой воды (9) сводится к последовательному выполнению двух одномерных систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} V_t + UV_x = 0, \\ U_t + UU_x + gH_x = gD_x, \\ H_t + (UH)_x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} V_t + VV_y + gH_y = gD_y, \\ U_t + VU_y = 0, \\ H_t + (VH)_y = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где дифференцирование выполняется сначала в направлении X -координаты, а затем — в направлении Y -координаты. Здесь $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y, t)$ — толщина водного слоя, U и V — компоненты горизонтальной скорости потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущённого уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Все собственные значения системы дифференциальных уравнений (17) вещественны и различны, поэтому система может быть записана в каноническом виде:

$$\begin{aligned} V'_t + \lambda_1 V'_x &= gD_x, \\ P_t + \lambda_2 P_x &= gD_x, \\ Q_t + \lambda_3 Q_x &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda_1 = U$, $\lambda_{2,3} = U \pm \sqrt{gH}$ — собственные значения, $V' = V$, $P = U + 2\sqrt{gH}$, $Q = U - 2\sqrt{gH}$ — инварианты Римана. Здесь граничные условия разного типа получаются по методу характеристик. Условия свободного выхода волны из расчётной области (открытые граничные условия) имеют вид

$$V' = 0, \quad R = \pm 2\sqrt{gD}, \quad \text{где } R = U \pm 2\sqrt{gH} \quad (\text{т.е. } R = P \text{ или } Q),$$

а условия полного отражения волны от границы —

$$V' = 0, \quad P = -Q.$$

Сама разностная схема для расчёта расщеплённой системы уравнений мелкой воды (17) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\vec{W}_i^{n+1} - \vec{W}_i^n}{\Delta t} + A \frac{\vec{W}_{i+1}^n - \vec{W}_{i-1}^n}{2\Delta t} - A\Delta t \frac{A(\vec{W}_{i+1}^n - \vec{W}_i^n) - A(\vec{W}_i^n - \vec{W}_{i-1}^n)}{2(\Delta x)^2} \\ = \frac{\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_{i-1}}{2\Delta x} - A\Delta t \frac{\vec{F}_{i+1} - 2\vec{F}_i + \vec{F}_{i-1}}{2(\Delta x)^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$A = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Bmatrix}, \quad \vec{W} = (V', P, Q), \quad \vec{F} = (0, gD_x, gD_x). \quad (20)$$

Условием устойчивости этой схемы будет следующее неравенство:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}. \quad (21)$$

Рассмотрим прямоугольную акваторию у северо-восточного побережья острова Хонсю (Япония), которая включает в себя цунамигенную зону вдоль глубоководного жёлоба. Назовём эту расчётную область B_1 . Длина шагов расчётной сетки 3219×3219 в этой области равно 0.00248 географического градуса, что примерно составляет 280 м в направлении с севера на юг. Географическое расположение и цифровой рельеф дна и суши этой расчётной области B_1 , простирающейся от 140° до 147.9944° восточной долготы и от 34.00° до 41.9948° северной широты, который был создан на основе данных JDOSS [13] и ASTER_GDEM [14], показаны на рис. 2.

На первом этапе рассчитывается распространение волны цунами в области B_1 от модельного очага, изображённого на рис. 2, и практически до берега. В этом расчёте шаг по времени был выбран равным 0.5 секунды, так как из условия устойчивости Куранта шаг по времени не может превышать отношения минимальной длины шага сетки к максимальной скорости распространения цунами в выбранной области, равной приблизительно 300 м/с. В процессе расчёта на каждом временном шаге мы записываем в файл (файлы) значения параметров волны (возвышение свободной поверхности и компоненты

скорости течения) во всех граничных точках области B_2 , имеющей размеры 2797×3197 и расположенной внутри исходной расчётной области B_1 (рис. 3 а). Естественно, рассматриваются только те границы, где есть точки с неотрицательной глубиной, т. е. в данном случае это верхняя, правая и нижняя границы области B_2 . Записывать граничные данные можно с самого начала расчёта в области B_1 . Прекратить запись можно после того, как волна цунами полностью (как минимум один полный период) пройдёт границу области B_2 . После этого начинаем расчёт цунами в области B_2 . При этом в начальный момент водная поверхность там покоится. На каждом очередном временном шаге происходит считывание сохранённых параметров течения вдоль границ расчётной области B_2 . Одновременно эти данные интерполируются на более детальную расчётную сетку, шаг которой в данном случае в 4 раза меньше, чем в области B_1 . В результате, от границ внутрь области B_2 распространяется волна цунами в точности с теми же параметрами, как в области B_1 (рис. 4).

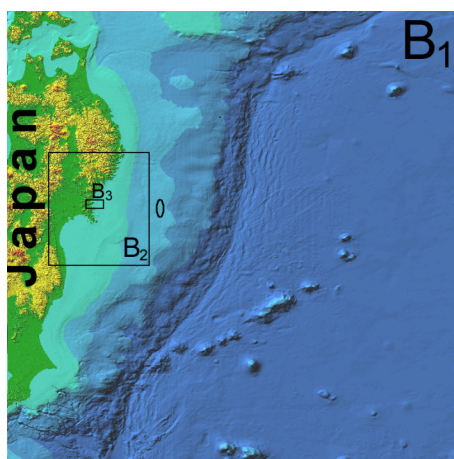


Рис. 2. Визуализация цифровой батиметрии исходной расчётной области у берегов Японии, а также расположение эллипсовидного очага цунами и вложенных подобластей

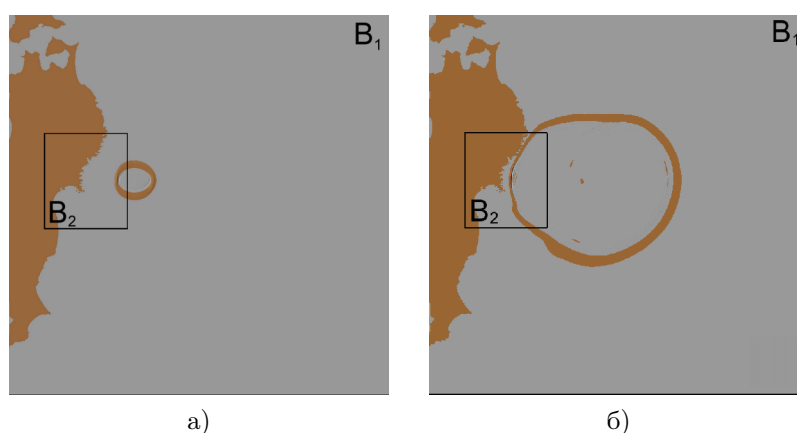


Рис. 3. Положения волны цунами, распространяющейся от модельного источника в области B_1

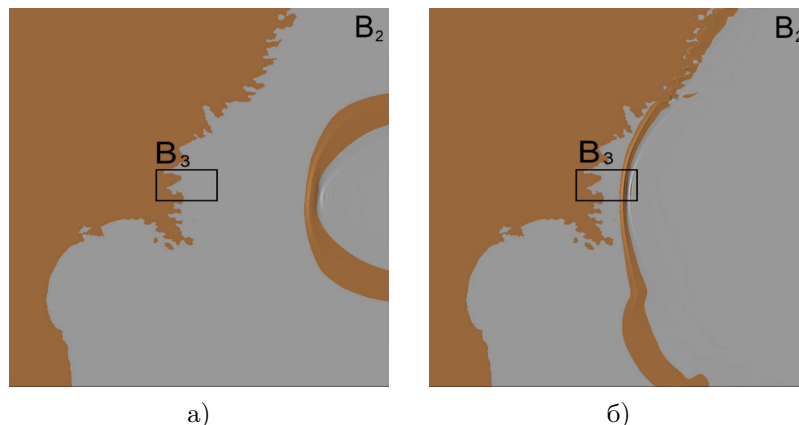


Рис. 4. Визуализация результатов расчёта распространения цунами в подобласти B_2

В процессе расчёта уже в подобласти B_2 мы на каждом временном шаге, как и при расчёте в области B_1 , сохраняем в файл значения параметров волны (возвышение свободной поверхности и компоненты скорости течения) во всех точках границы подобласти B_3 , которая расположена внутри расчётной области B_2 (рис. 4).

На последнем этапе рассчитывается распространение волны в подобласти B_3 размером 2148×1077 узлов, покрывающей прибрежную акваторию с несколькими мелководными бухтами. Водная поверхность для двух моментов распространения цунами в этой подобласти визуализированы на рис. 5.

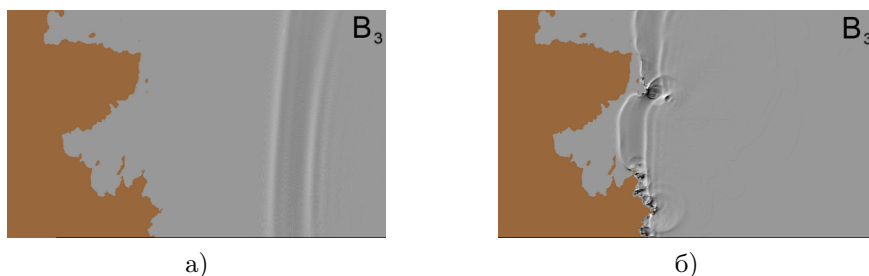


Рис. 5. Визуализация водной поверхности для двух моментов распространения цунами в расчётной области B_3

Здесь, как и раньше, параметры волны цунами передаются в эту расчётную подобласть через граничные условия на верхней, правой и нижней границах. Значения параметров течения здесь генерируются путём интерполяции результатов расчёта в области B_2 на более детальную расчётную сетку с шагом примерно 7 м в направлении с запада на восток, при этом сетки являются несогласованными. Остановимся на этом моменте подробнее. Так как сеточная батиметрия подобласти B_3 создавалась на основе данных, никак не связанных с батиметрией JDOSS [13], которая являлась основой для создания цифровой батиметрии расчётных областей B_1 и B_2 , то расположение граничных узлов детальной сетки области B_3 нигде не совпадает с расположением узлов расчётной сетки B_2 . Кроме того, глубины из этих двух батиметрических баз пространственно могут существенно различаться. Поэтому одномерной интерполяцией значений параметров волны вдоль границ B_3 для перехода на более детальную сетку здесь не обойтись. Алгоритм пересчёта здесь следующий. Рассматриваем поочередно все узлы вдоль

границ расчётной области V_3 с соответствующими географическими координатами и, найдя ячейку расчётной сетки области V_2 , внутри которой располагается рассматриваемый узел на границе V_3 , с помощью билинейной интерполяции находим возвышение водной поверхности η на основе уровня океана в углах этой ячейки сетки. При желании могут быть использованы более сложные алгоритмы интерполяции. Теперь о самом главном моменте в передаче параметров волны через границу расчётной подобласти V_3 . В случае когда существует скачок глубины при переходе от цифровой батиметрии области V_2 в подобласть V_3 , использование для продолжения расчёта в подобласти V_3 смещения водной поверхности η вместе с компонентами скорости водного потока u и v , перенесённых из области V_2 , может исказить профиль распространяющейся от границы подобласти V_3 волны. Это может произойти из-за несоответствия скорости водного потока высоте волны на более детальной батиметрии области V_3 (отличной от JDOSS). Для того чтобы скорость потока соответствовала высоте волны на новой батиметрии, величина скорости в каждой узловой точке границы области V_3 будет вычисляться по формуле (8), а направление распространения волны вычисляется из соотношения интерполированных компонент этой скорости по результатам расчёта в области V_2 . Таким образом, если в результате (билинейной) интерполяции в граничном узле подобласти V_3 были определены высота цунами η и компоненты скорости водного потока u_0 и v_0 , тогда скорректированные компоненты скорости потока выразятся в виде

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}} \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}, \quad v = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}} \frac{v_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}. \quad (22)$$

Здесь D обозначает глубину в соответствии с батиметрией области V_3 , g — ускорение силы тяжести. Такую процедуру пересчёта параметров волны вдоль граничных узлов расчётной сетки подобласти V_3 требуется проводить на каждом шаге по времени, что позволит корректно продолжать численный расчёт в подобласти V_3 на сетке с наибольшей детальностью.

Если целью описанного алгоритма расчёта распространения цунами на последовательности сгущающихся сеток является по возможности быстрее оценка высоты волны у берега, то расчёты в области V_1 и в каждой из подобластей V_2 и V_3 следует вести одновременно. Это значит, что надо организовать расчётный конвейер, где параметры волны на границах подобластей передаются на другой компьютер (процессор) после каждого расчётного шага по времени. Если же временной фактор не является существенным, то можно расчёты в каждой из последовательности областей вести по очереди: сначала в исходной расчётной области V_1 , сохраняя в файле параметры волны вдоль границ подобласти V_2 ; затем, используя эти данные, рассчитать распространение волны в подобласти V_2 , сохраняя при этом на каждом шаге по времени параметры цунами вдоль границ подобласти V_3 . И на последнем этапе провести расчёт в подобласти V_3 на самой детальной расчётной сетке. Результатом всех этапов расчёта является распределение высоты волны цунами вдоль побережий бухт.

3. Влияние детальности расчётных сеток на параметры волны около берега

Из практики численных расчётов распространения волн цунами известно, что для корректного моделирования этого процесса необходимо, чтобы на длину распространяющейся волны приходилось порядка десяти узлов расчётной сетки. В противном случае

(если количество шагов расчётной сетки на длину волны меньше этого числа) будет происходить неестественная диссипация волновой энергии и, как следствие, уменьшение высоты волны, не связанное с волновой гидродинамикой. Поэтому при использовании постоянного шага сетки во всей расчётной области при приближении волны цунами к берегу её длина, составлявшая в глубоком океане более 40 шагов сетки, постепенно уменьшается до критических значений в 5–10 шагов. Это может привести к искажению реальной картины распространения цунами и неверным оценкам её параметров.

Итак, сравним параметры волны в бухте Оппа (подобласть V_3) для двух случаев. Первый, когда расчёт ведётся в области V_1 с единым пространственным шагом сетки от очага до берега. Второй, когда распространение цунами моделируется в подобласти V_3 по описанному алгоритму с использованием последовательности сгущающихся сеток. При этом будут рассмотрены два варианта модельного очага, генерирующие цунами с периодом примерно 150 и 300 секунд. Форма и профиль такого очага приводятся на рис. 6. Горизонтальные размеры здесь соответствуют случаю генерации волны, имеющей период 150 секунд.

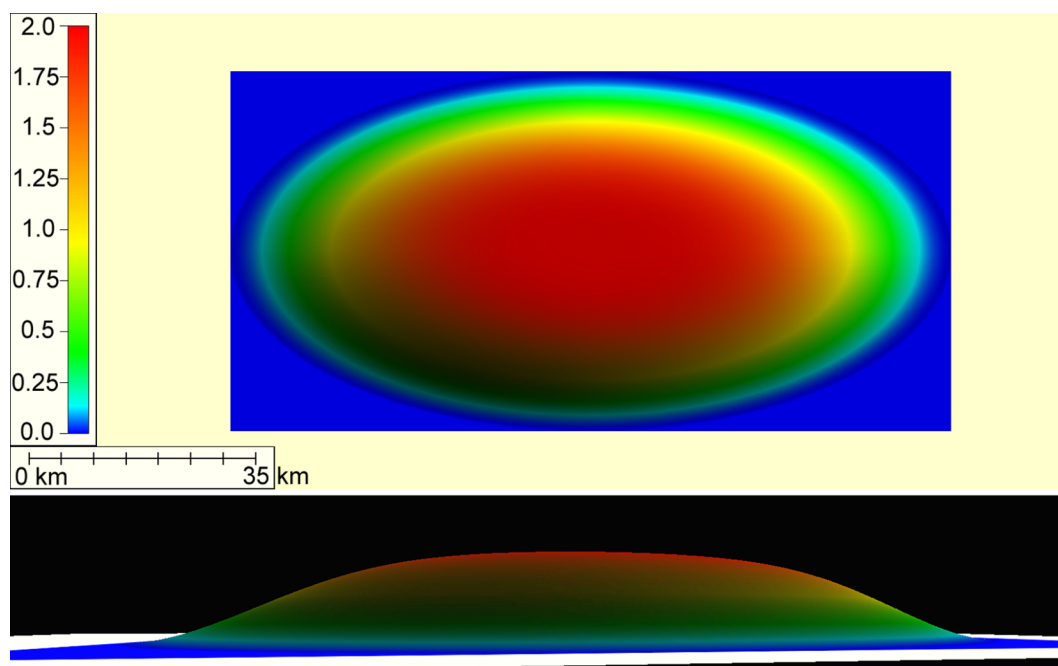


Рис. 6. Пространственная форма (вид сверху) и профиль начального смещения модельного очага цунами

Если сравнить водную поверхность во фрагментах областей V_1 и V_2 , включающих бухту Оппа, в один и тот же момент времени, то можно увидеть существенную разницу между результатом расчёта без перехода на детальные сетки (рис. 7 а) и волновой поверхностью, полученной по двухэтапному алгоритму (расчёт в области V_1 с переходом в подобласть V_2) (рис. 7 б). Из рисунков видно, что при расчёте на сетке детальностью порядка 280 м у приближающейся к берегу волны появляется “хвост” из последовательности волн меньшей амплитуды. А в случае двухэтапного расчёта V_1, V_2 такой эффект существенно менее выражен.

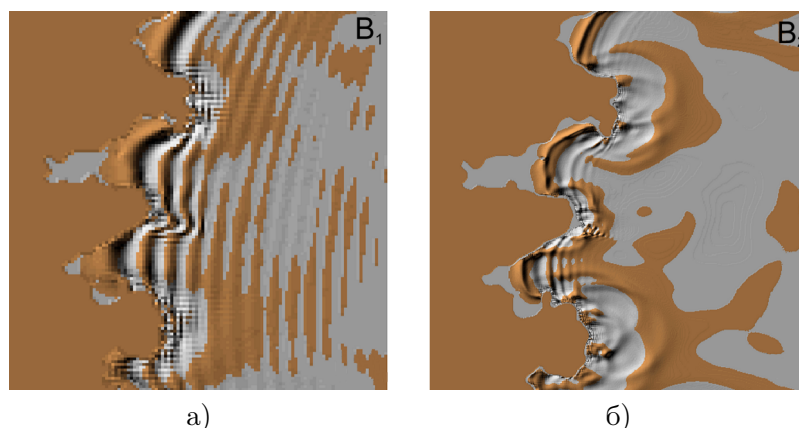


Рис. 7. Сравнение водной поверхности в сегментах расчётных областей V_1 и V_2

Если сравнивать результаты двухэтапного расчёта (V_1 – V_2), представленного на рис. 8 а, с результатом трёхэтапного (V_1 – V_2 – V_3) (рис. 8 б), то бросается в глаза полное отсутствие “хвоста” в случае расчёта на последовательности из трёх сгущающихся расчётных сеток. Отсюда можно сделать вывод, что эффект волнового “хвоста” из волн малой амплитуды имеет нефизическую природу и является следствием численного расчёта на недостаточно детальных сетках.

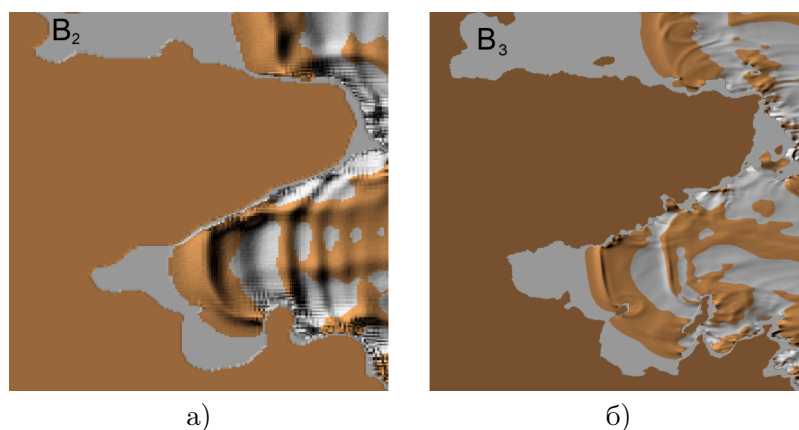


Рис. 8. Результаты расчётов распространения цунами в соответствующих сегментах областей V_2 и V_3 с применением двухэтапного V_1 – V_2 (а) и трёхэтапного V_1 – V_2 – V_3 (б) вычислительных экспериментов

Численные расчёты также выявили существенную разницу в высотах волны внутри бухты при вычислениях на последовательности сгущающихся сеток и при использовании единой сетки детальностью 0.00248 географического градуса для всей расчётной области V_1 . Рисунок 9 показывает местоположение расчётного узла сетки, где производилось сравнение максимумов высоты волны для всех трёх вышеперечисленных вычислительных экспериментов: V_1 , V_1 – V_2 и V_1 – V_2 – V_3 . Для цунами с периодом 150 с высота волны в указанном узле сетки составила 50, 150 и 190 см соответственно. А в вычислительных экспериментах, где период волны был равен 300 с, эти высоты составила 90, 160 и 190 см.

Генерирующие граничные условия могут ставиться не только на внешних границах расчётной области, но и внутри области, например вокруг модельного источника цунами. Таким способом можно генерировать волну с заданными параметрами (период и форма

волнового сигнала). Такой способ позволяет небольшому по размерам источнику породить волну, имеющую длину, значительно превышающую поперечник этого источника, чего не может быть при использовании для генерации поршневой модели.

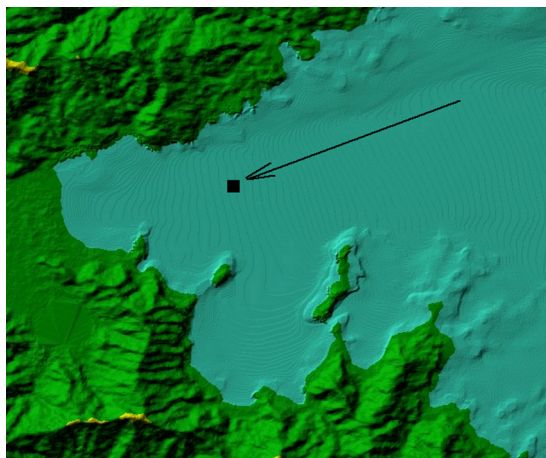


Рис. 9. Расположение узла расчётной сетки в бухте Оппа, где регистрировалась высота цунами в ходе вычислительных экспериментов

Заключение

Граничные условия при численных расчётах распространения цунами могут использоваться не только для обеспечения отражения волн от береговых линий и других отражающих границ или свободного выхода волны из области моделирования, но и для передачи параметров волны, распространяющейся из одной части расчётной области в подобласть, где дальнейший расчёт ведётся на более детальной сетке. Таким способом можно находить детальное распределение высоты волны вдоль интересующего нас участка побережья. Ещё с помощью генерирующих граничных условий можно получать волну цунами с заданными параметрами, что немаловажно для тестирования численных алгоритмов. Вычислительные эксперименты распространения цунами на последовательности сгущающихся сеток вблизи северо-восточного побережья Японии выявили существенную разницу в высоте волны у берега при расчётах на сетках разной детальности.

Теоретически при распространении цунами может возникнуть ситуация, когда волна, отразившись от берега в подобласти, например V_3 , подойдет к границам уже изнутри этой подобласти. Возникает вопрос: следует ли реализовывать передачу параметров выходящей из подобласти волны через границы V_3 ? На наш взгляд, этого делать не стоит, так как такое отражение с выходом волны во внешнюю область будет смоделировано при расчёте её распространения во внешней (в данном случае V_2) области. Возможно, это моделирование будет не таким точным, как в подобласти V_3 , но эффект отражённой волны будет учтён.

Несколько слов про производительность вычислений. До настоящего времени этот алгоритм отработывался в отладочном режиме на персональных компьютерах. К примеру, на персональном компьютере с двухъядерным процессором 2500 МГц расчёт одного шага по времени в области 3200×3200 (примерно 10000000 узлов) длится около секунды. После того, как волна войдёт в подобласть V_2 , имеющую меньший размер, скорость расчёта увеличивается примерно в полтора раза. На последнем этапе, ввиду того что количество

узлов подобласти B_3 составляет порядка 2-х миллионов узлов, скорость расчёта возрастёт ещё примерно в 4 раза. Таким образом, даже на обычном персональном компьютере время расчёта сопоставимо со временем распространения волны в реальных условиях. Уже начата работа по применению описанной методики при расчётах на графических процессорах и специализированных платах FPGA, дающих ускорение расчёта в сотни раз [15].

Литература

1. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. — М.: Государственное изд-во иностранной литературы, 1959.
2. **Titov V.V.** Numerical modeling of tsunami propagation by using variable grids // *Tsunamis: their science and hazard mitigation. Proc. of the Int. Tsunami Symposium, July 31 – August 3, 1989 / V.K. Gusiakov.* — Novosibirsk: Computing Center, Siberian Division, USSR Academy of Sciences, 1990. — P. 46–51.
3. **Hasan Md.M., Rahman S.M.M., and Mahamud U.** Numerical modeling for the propagation of tsunami wave and corresponding inundation // *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering.* — 2015. — Vol. 12, iss. 2 Ver. IV. — P. 55–62.
4. **Shigihara Y., Fujima K.** Development of tsunami model integrating several different grid systems // *Proc. of the Fifteenth World Conference on Earthquake Engineering.* — Portugal, Lisbon, 2012.
5. **Son S., Lynett P.J., and Kim D.-H.** Nested and multi-physics modeling of tsunami evolution from generation to inundation // *Ocean Modelling.* — 2011. — Vol. 38. — P. 96–113.
6. **Karim Md.F., Ismail A.I., and Meah M.A.** A boundary fitted nested grid model for tsunami computation along Penang island in peninsular Malaysia // *Int. J. of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering.* — 2014. — Vol. 8, № 2. — P. 277–284.
7. **Gusakov V.K., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., and Shokin Yu.I.** Some approaches to local modelling of tsunami wave runup on a coast // *Russian J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* — 2008. — Vol. 23, № 6. — P. 551–565.
8. **Harig S., Chaeroni C., Pranowo W.S., and Behrens J.** Tsunami Simulations on several scales: Comparison of approaches with unstructured meshes and nested grids // *Ocean Dynamics.* — 2008. — Vol. 58, iss. 5. — P. 429–440.
9. **GEBCO Digital Atlas. 1903-Centenary Edition-2003.** CDROM. — U.K., Liverpool: British Oceanographic Data Centre, 2003. — (Intergovernmental Oceanographic Commission, International Hydrographic Organization).
10. **Smith W.H.F., Sandwell D.T.** Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings // *Science.* — 1997. — Vol. 277, iss. 5334. — P. 1956–1962.
11. **Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
12. **Марчук Ан.Г.** Оценка высоты цунами, распространяющейся над параболическим дном, в лучевом приближении // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.* — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 23–35; Перевод: Marchuk An.G. Estimating the height of a tsunami wave propagating over a parabolic bottom in the ray approximation // *Num. Anal. and Appl.* — 2017. — Vol. 7, № 1. — P. 17–27.
13. URL: http://jdossl.jodc.go.jp/vpage/depth500_file.html.
14. Global Digital Elevation Model. — URL: <http://www.gdem.aster.ersdac.or.jp/search.jsp>.

15. **Lavrentiev M.M., Romanenko A.A., Oblaukhov K.K., Marchuk An.G., Lysakov K.F., and Shadrin M.Yu.** FPGA based solution for fast tsunami wave propagation modeling // Proc. of the Twenty-seventh (2017) Int. Ocean and Polar Engineering Conf., June 25–30, 2017.— USA, CA, San Francisco, 2017.— P. 924–929.

*Поступила в редакцию 25 октября 2017 г.,
в окончательном варианте 25 декабря 2017 г.*

Литература в транслитерации

1. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. Matematicheskaya teoriya i prilozheniya. — M.: Gosudarstvennoe izd-vo inostrannoy literatury, 1959.
2. **Titov V.V.** Numerical modeling of tsunami propagation by using variable grids // Tsunamis: their science and hazard mitigation. Proc. of the Int. Tsunami Symposium, July 31 – August 3, 1989 / V.K. Gusiakov. — Novosibirsk: Computing Center, Siberian Division, USSR Academy of Sciences, 1990.— P. 46–51.
3. **Hasan Md.M., Rahman S.M.M., and Mahamud U.** Numerical modeling for the propagation of tsunami wave and corresponding inundation // IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering. — 2015.— Vol. 12, iss. 2 Ver. IV.— P. 55–62.
4. **Shigihara Y., Fujima K.** Development of tsunami model integrating several different grid systems // Proc. of the Fifteenth World Conference on Earthquake Engineering. — Portugal, Lisbon, 2012.
5. **Son S., Lynett P.J., and Kim D.-H.** Nested and multi-physics modeling of tsunami evolution from generation to inundation // Ocean Modelling.— 2011.— Vol. 38.— P. 96–113.
6. **Karim Md.F., Ismail A.I., and Meah M.A.** A boundary fitted nested grid model for tsunami computation along Penang island in peninsular Malaysia // Int. J. of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering.— 2014.— Vol. 8, № 2.— P. 277–284.
7. **Gusakov V.K., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., and Shokin Yu.I.** Some approaches to local modelling of tsunami wave runup on a coast // Russian J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.— 2008.— Vol. 23, № 6.— P. 551–565.
8. **Harig S., Chaeroni C., Pranowo W.S., and Behrens J.** Tsunami Simulations on several scales: Comparison of approaches with unstructured meshes and nested grids // Ocean Dynamics.— 2008.— Vol. 58, iss. 5.— P. 429–440.
9. GEBCO Digital Atlas. 1903-Centenary Edition-2003. CDROM. — U.K., Liverpool: British Oceanographic Data Centre, 2003. — (Intergovernmental Oceanographic Commission, International Hydrographic Organization).
10. **Smith W.H.F., Sandwell D.T.** Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings // Science.— 1997.— Vol. 277, iss. 5334.— P. 1956–1962.
11. **Marchuk An.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln tsunami. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1983.
12. **Marchuk An.G.** Otsenka vysoty tsunami, rasprostranyayushcheysya nad parabolicheskim dnom, v luchevom priblizhenii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017.— T. 20, № 1.— S. 23–35; Pereod: Marchuk An.G. Estimating the height of a tsunami wave propagating over a parabolic bottom in the ray approximation // Num. Anal. and Appl.— 2017.— Vol. 7, № 1.— P. 17–27.
13. URL: http://jdossl.jodc.go.jp/vpage/depth500_file.html.
14. Global Digital Elevation Model. — URL: <http://www.gdem.aster.ersdac.or.jp/search.jsp>.

15. **Lavrentiev M.M., Romanenko A.A., Oblaukhov K.K., Marchuk An.G., Lysakov K.F., and Shadrin M.Yu.** FPGA based solution for fast tsunami wave propagation modeling // Proc. of the Twenty-seventh (2017) Int. Ocean and Polar Engineering Conf., June 25–30, 2017.— USA, CA, San Francisco, 2017.— P. 924–929.

