УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНОПОДОБНЫМ ДЕФЕКТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ КРИТЕРИЕВ

М. М. Шакиртов, А. П. Шабанов, В. М. Корнев*

Сибирский государственный университет путей сообщения, 630082 Новосибирск
* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: legion-mpf@yandex.ru, shabanov@211.ru, kornev@hydro.nsc.ru

Рассмотрен процесс растяжения пластины с узким трещиноподобным разрезом, вершины которого образуют полуокружности конечного радиуса. Пластина изготовлена из структурированного материала, имеющего механические характеристики, близкие к характеристикам стали марки Ст.45. С использованием численного метода по необходимому и достаточному критериям построены диаграммы разрушения. Показана возможность аналитического представления диаграмм разрушения.

Ключевые слова: трещиноподобный разрез, диаграммы разрушения, пластические зоны.

Введение. Рассматривается процесс растяжения прямоугольной пластины, в которой имеется трещиноподобный дефект длиной $2l$. Материал пластины имеет регулярную структуру, причем характерный линейный размер r_0 структурного элемента (например, диаметр зерна) известен. В работе [1] с использованием подхода Нейбера — Новожилова [2, 3] и модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [4, 5] по необходимому и достаточному критериям построены диаграммы разрушения пластины. Для трещины нормального отрыва дискретно-интегральный критерий разрушения [1] имеет вид

$$\frac{1}{r_0}\int\limits_0^{r_0}\sigma_y(x,0)\,dx \leqslant \sigma_m, \qquad x \geqslant 0; \tag{1}$$

$$2v(x,0) \leqslant \delta_m^*, \qquad -\Delta \leqslant x < 0. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_y(x,0)$ — нормальные напряжения на продолжении трещины; r_0 — характерный линейный размер элемента структуры материала, соизмеримый с диаметром зерна; Δ — длина зоны предразрушения, расположенной на продолжении реальной трещины; $2v(x,0)$ — величина раскрытия трещины; $\delta_m^* = 2v(-\Delta^*,0)$ — критическая величина раскрытия трещины.

Согласно [3] достаточный критерий разрушения (1), (2) включает два неравенства, первое из которых представляет собой силовой критерий разрушения, а второе — деформационный критерий разрушения. Эти критерии имеют преимущества и недостатки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00220).

Использование одновременно силового и деформационного критериев в соотношениях (1), (2) позволяет реализовать их преимущества.

Заметим, что в работе [1] диаграммы разрушения строились с существенными ограничениями: рассматривалась трещина-разрез с нулевым радиусом кривизны в вершине; диаграмма растяжения материала образца имела вид диаграммы Прандтля; рассматривались квазихрупкие материалы, деформация которых, соответствующая пределу прочности, превышает деформацию, соответствующую началу процесса текучести, не более чем в пять раз; пластина находилась в условиях плоского напряженного состояния.

Вместе с тем представляет интерес исследование аналогичных диаграмм разрушения, построенных с использованием необходимого и достаточного критериев, для упрочняющихся материалов, обладающих ярко выраженными пластическими свойствами. Следует отметить также, что если рассматривается материал со структурой, то реальная трещина отличается от математической трещины-разреза, так как начальный радиус кривизны в ее вершине не равен нулю [1].

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная пластина с размерами 200 × 100 мм, изготовленная из материала, механические характеристики которого близки к характеристикам стали марки Ст.45 [6]: условный предел текучести $\sigma_y = 355$ МПа, предел прочности $\sigma_{\text{в}} = 600$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа, относительное удлинение при разрыве $\delta = 16$ %. Сталь нормализована в воздухе при температуре $T = 880$ °C, средний размер зерна (структурного элемента) $r_0 \approx 30$ мкм. В центре пластины имеется узкий вырез шириной 0,6 мм, расположенный таким образом, что исследуемый образец имеет две оси симметрии. Вершины выреза образуют полуокружность радиусом $\rho = 0{,}3$ мм, что на порядок превышает размер структурного элемента. Более длинная сторона выреза ориентирована вдоль более длинной стороны пластины. В ходе исследований длина этой стороны выреза $2l$ меняется от 10 до 190 мм. Образец нагружен по длинной стороне (перпендикулярно направлению разреза) растягивающими напряжениями σ_∞. Задача формулируется следующим образом. Задается фиксированная полудлина разреза l. Образец нагружается внешней растягивающей нагрузкой σ_∞. Рассматривается напряженно-деформированное состояние области образца, примыкающей к вершине разреза. Требуется определить внешнюю нагрузку σ_∞^0, при которой структурный элемент на продолжении разреза полностью переходит в пластическое состояние. Кроме того, необходимо определить внешнюю нагрузку σ_∞^*, при которой этот структурный элемент должен разрушиться.

Построение расчетной модели. Задача решается численно с использованием метода конечных элементов. Так как пластина имеет две оси симметрии, в расчете использовалась схема, представленная на рис. 1. В области, примыкающей к вершине дефекта, на

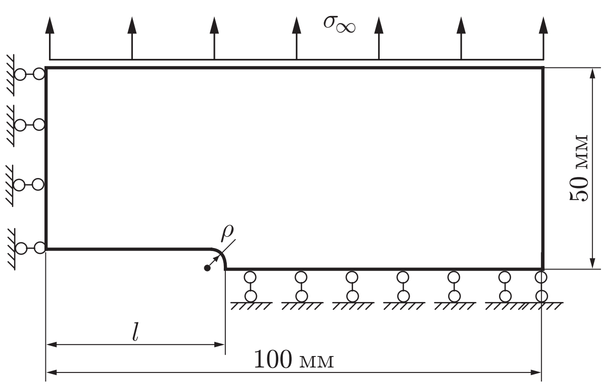

Рис. 1. Расчетная схема пластины

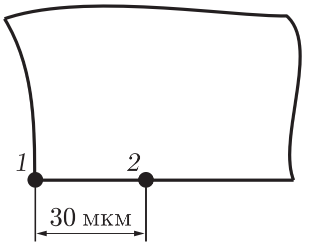

Рис. 2

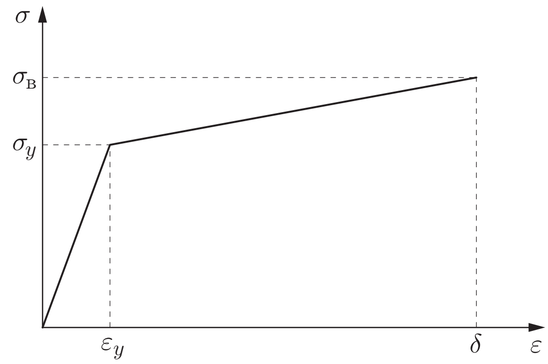

Рис. 3

Рис. 2. Положение границы структурного элемента в вершине разреза

Рис. 3. Идеализированная диаграмма растяжения материала

оси симметрии пластины имеется две точки (рис. 2), расстояние между которыми равно размеру структурного элемента (30 мкм). Диаграмма растяжения материала пластины моделировалась кусочно-линейной функцией (рис. 3). Тангенциальный модуль деформирования на участке упрочнения $E_1 = 1540$ МПа рассчитывался таким образом, чтобы в точке, соответствующей пределу прочности, относительная деформация была равна известному значению относительного удлинения при разрыве $\delta = 16$ % для стали марки Ст.45. Коэффициент Пуассона принят равным 0,3.

Такая модель имеет ряд особенностей. Наличие узкого тонкого дефекта обусловливает значительную концентрацию напряжений в его вершине. Для исследования очень малой по сравнению с габаритными размерами образца области, примыкающей к вершине трещины, необходимо построить конечноэлементную сетку с существенно различающимися по величине элементами. Это, в свою очередь, может привести к появлению значительных погрешностей при определении напряженно-деформированного состояния рассматриваемой области модели.

Критерии оценки точности. Для оценки точности любого конечноэлементного расчета обычно используется известное теоретическое решение задачи, с помощью которого можно определить, например, напряжения в какой-либо точке образца. Затем задача решается численно, в результате чего в той же точке образца определяются напряжения, которые сравниваются с точным решением. Однако оценить таким образом точность решения упругопластической задачи достаточно сложно, поскольку ее точного решения, как правило, не существует. Однако имеется формула, полученная Г. Нейбером [7] для случая антиплоского сдвига прямоугольной полосы с эллиптическим боковым вырезом. Следует отметить, что диаграмма растяжения материала пластины является нелинейной. Формула Нейбера связывает коэффициенты концентрации при линейном и нелинейном деформировании образца с концентраторами:

$$k_e^2 = k_\sigma k_\varepsilon. \tag{3}$$

Здесь k_e — коэффициент концентрации напряжений при линейно-упругом деформировании материала образца; k_σ, k_ε — коэффициенты концентрации соответственно для напряжений и деформаций при нелинейно-упругом деформировании материала.

Соотношение (3) получено для конкретной задачи. Вопрос о возможности обобщения этого соотношения на весь класс нелинейных упругих задач, а главное на случай упругопластического деформирования, возник после опубликования работы [7] и до сих

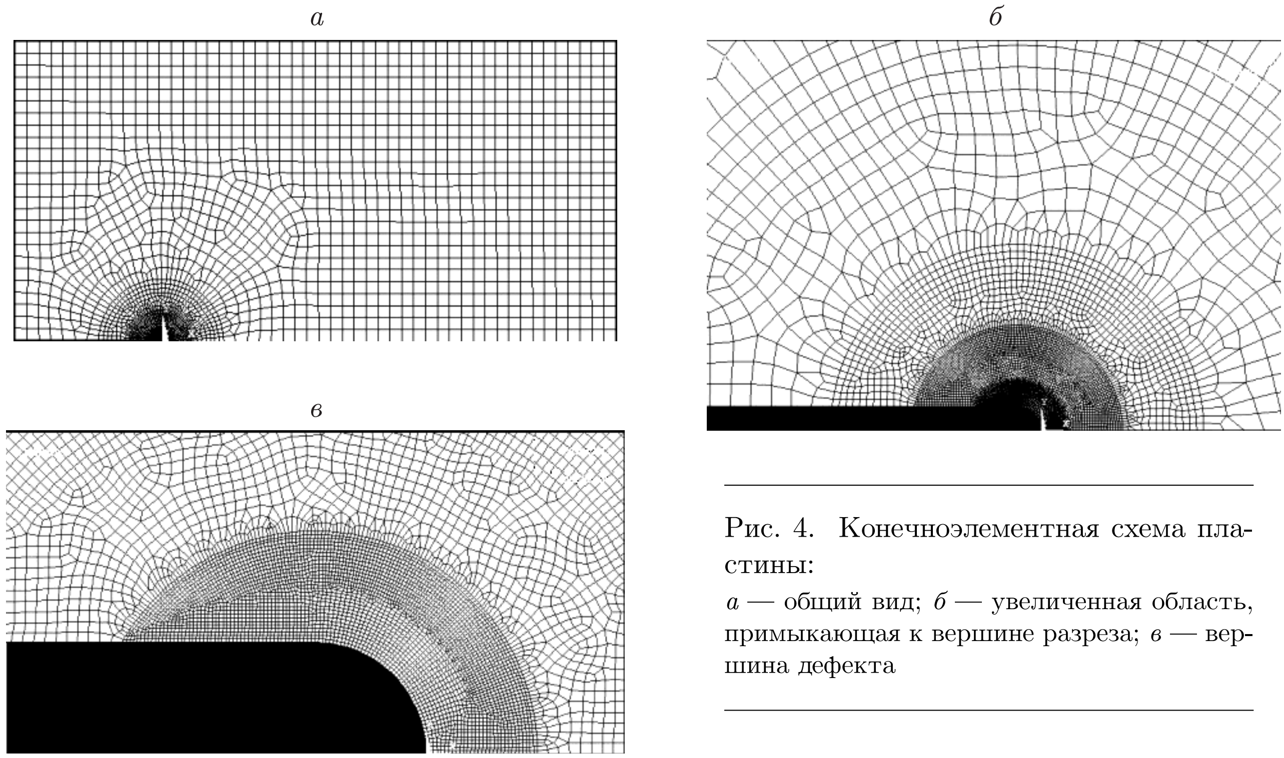

Рис. 4. Конечноэлементная схема пластины:

а — общий вид; *б* — увеличенная область, примыкающая к вершине разреза; *в* — вершина дефекта

пор обсуждается [8]. Вместе с тем экспериментальное исследование процесса растяжения прямоугольной пластины из алюминиевого сплава Д16Т с круглым отверстием при упругопластическом деформировании показало, что соотношение (3) выполняется достаточно точно [9, 10].

Построение конечноэлементной сетки. В ходе исследований анализ напряженно-деформированного состояния проводится в очень малой области, примыкающей к вершине дефекта. Это обстоятельство обусловливает необходимость построения конечноэлементной модели, в которой размеры элементов в разных областях образца должны различаться на несколько порядков. Использовался прием создания вложенных областей, внутри каждой из которых размер конечного элемента уменьшался приблизительно в два раза (рис. 4). Область образца, примыкающая к вершине, разбивалась по концентрическим окружностям, в результате чего было получено пять областей локализации со своими размерами конечного элемента. Вдоль контура вершины дефекта располагалось приблизительно 50 элементов размером порядка 0,01 мм. Такой способ построения модели позволяет с приемлемой точностью получать поля упругопластических напряжений и деформаций в областях, примыкающих к вершине разреза. Задача решалась с учетом возможности появления больших упругопластических деформаций в предположении, что образец находится в условиях плоского напряженного состояния.

Результаты расчета. В ходе численной реализации для каждого размера трещиноподобного дефекта l определена внешняя нагрузка σ_∞^0, при достижении которой структурный элемент (зерно), расположенный в вершине этого дефекта, полностью переходит в пластическое состояние. Кроме того, определялась величина внешней нагрузки σ_∞^*, при достижении которой рассматриваемый структурный элемент разрушается. Для этого подбирались эквивалентные деформации, так чтобы в точке *2* (см. рис. 2) они были равны относительному удлинению образца при разрыве δ. Кроме того, на продолжении дефекта фиксировалась длина пластической зоны l_p в тот момент, когда на границе структурного

Результаты расчетов предельных напряжений и длины пластической зоны

l, мм	σ_∞^0, МПа	σ_∞^*, МПа	l_p, мм	e, %	σ_∞^0/σ_y	σ_∞^*/σ_y
5	47	334	—	32,70	0,1324	0,9408
10	35	292	4,60	17,45	0,0986	0,8225
15	25	255	5,40	10,55	0,0704	0,7183
20	20	220	7,30	7,05	0,0563	0,6197
25	17	190	10,00	5,50	0,0479	0,5352
30	15	162	11,50	4,55	0,0423	0,4563
35	12	139	12,40	3,20	0,0338	0,3915
40	11	120	12,10	3,85	0,0310	0,3380
45	9	104	12,10	3,45	0,0254	0,2923
50	7,7	90	11,70	5,20	0,0217	0,2535
55	8	77	11,20	5,40	0,0225	0,2169
60	6	66	10,60	4,30	0,0169	0,1859
65	4,95	58	10,57	4,35	0,0149	0,1633
70	4,25	50	10,00	8,35	0,0120	0,1408
75	4	44	9,40	15,60	0,0113	0,1239
80	3,5	39	8,77	25,80	0,0099	0,1099
85	3	35	7,89	39,10	0,0085	0,0987
90	2,6	31	6,70	55,00	0,0073	0,0873
95	2,25	19	4,10	68,80	0,0063	0,0535

элемента (в точке *2* на рис. 2) эквивалентные напряжения становились равными пределу прочности. Результаты расчетов представлены в таблице. Там же указана средняя погрешность e определения значений σ_∞^0 и σ_∞^*, вычисленная с использованием формулы (3). Следует отметить, что при малых и больших значениях полудлины дефекта погрешность имеет неприемлемо большие значения. Это обстоятельство может быть объяснено тем, что соотношение (3) получено для бесконечной полосы с эллиптическим отверстием. Однако при малых значениях длин дефекта форма этого отверстия существенно отличается от эллиптической, а при больших длинах значительное влияние оказывает край образца [11].

На рис. 5 в декартовых и логарифмических координатах представлены зависимости предельных напряжений от полудлины разреза. Следует отметить, что в логарифмических координатах точки на диаграммах σ_∞^0/σ_y и σ_∞^*/σ_y, соответствующие одной и той же полудлине дефекта, находятся на одинаковых расстояниях друг от друга. Построенные диаграммы разрушения образца с трещиноподобным дефектом могут быть использованы при исследовании зарождения трещины, обусловленного концентрацией напряжений при циклическом нагружении (см. [12]), когда в зоне предразрушения (пластичности) происходит охрупчивание материала.

На рис. 6 представлена зависимость длины пластической зоны на линии продолжения трещиновидного дефекта от его полудлины. Заметим, что эта зависимость имеет четко выраженный экстремум. На рис. 7 показаны границы пластических зон, построенных при достижении в точке *2* (см. рис. 2) напряжений, равных пределу прочности, в случае если длины дефектов равны 25 и 70 мм (что соответствует значениям l на рис. 6 до и после экстремума). Следует отметить, что в случае коротких разрезов форма пластической зоны соответствует плоской деформации, а в случае длинных — плоскому напряженному состоянию [13], несмотря на то что все расчеты проводились для образца, находящегося в плоском напряженном состоянии.

Аналитическое представление диаграмм разрушения. Как отмечено выше, диаграммы, построенные в логарифмических координатах для разреза с радиусом кривизны в его вершине, равным 300 мкм, имеют вид кривых, расположенных на одинаковых

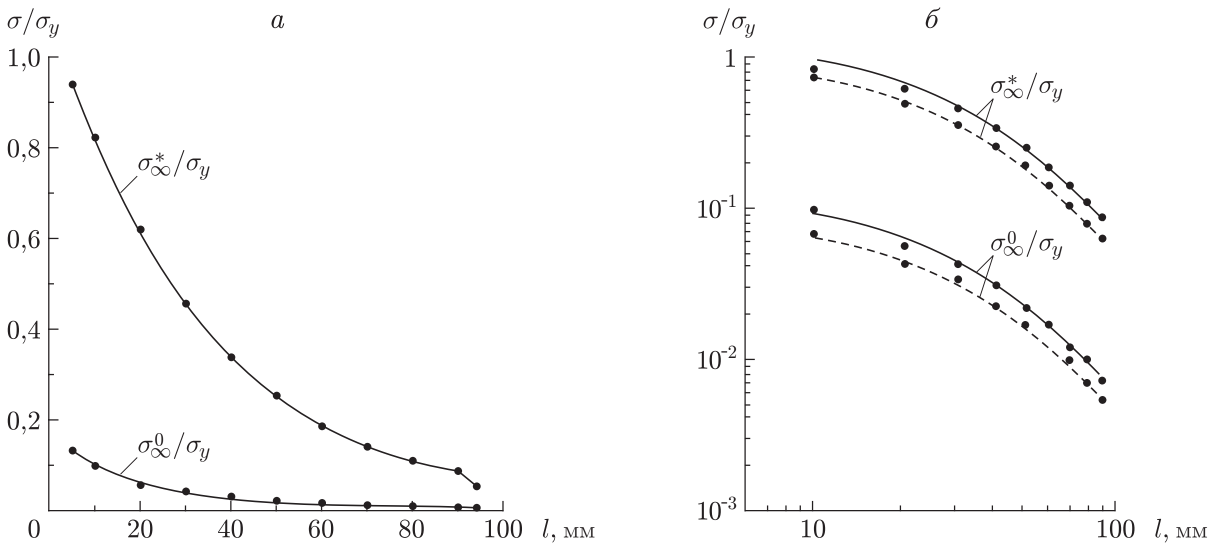

Рис. 5. Диаграммы разрушения образцов из стали марки Ст.45, имеющих разрез различного радиуса:

а — построение в декартовых координатах ($\rho = 300$ мкм); *б* — построение в двойных логарифмических координатах (сплошные линии — $\rho = 300$ мкм, штриховые — $\rho = 100$ мкм, точки — результаты расчетов)

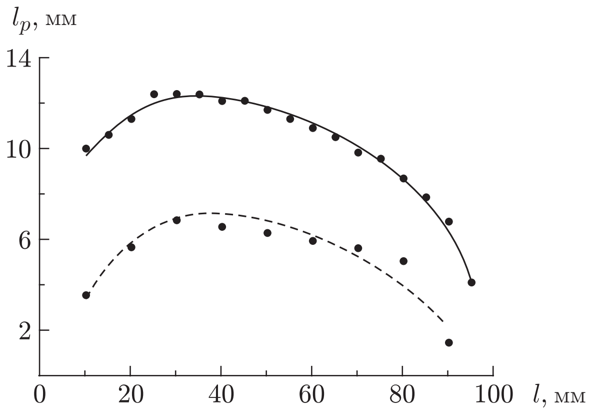

Рис. 6

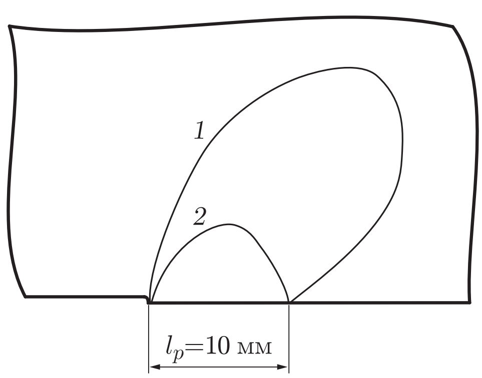

Рис. 7

Рис. 6. Изменение длины пластической зоны в момент разрушения первого структурного элемента:

сплошная линия — $\rho = 300$ мкм, штриховая — $\rho = 100$ мкм, точки — результаты расчетов

Рис. 7. Формы пластических зон при достижении в структурном элементе напряжений, равных пределу прочности, для различных длин разреза ($\rho = 300$ мкм):

1 — $l = 25$ мм, *2* — $l = 70$ мм

расстояниях друг от друга (сплошные линии на рис. 5,*б*). Численно получены аналогичные диаграммы для разреза с радиусом кривизны в его вершине, равным 100 мкм (штриховые линии на рис. 5,*б*). Оказалось, что расстояние между штриховыми линиями приближенно равно расстоянию между сплошными линиями. Следовательно, отношение функций $\sigma^*_\infty(l,\rho)/\sigma^0_\infty(l,\rho)$ не зависит от длины разреза и радиуса кривизны в его вершине, а определяется только механическими постоянными материала.

Рассмотрим образец, выполненный из неструктурированного однородного материала. Напомним, что напряжение $\sigma^0_\infty(l,\rho)$ действует в невозмущенной части образца, при этом напряжения в вершине дефекта (точка *1* на рис. 2) должны быть равны пределу текучести σ_y. Так как в этом случае материал в любой точке образца деформируется по линейному закону, выражение для коэффициента концентрации напряжений можно записать в виде [2]

$$\sigma_y/\sigma^0_\infty(l,\rho) = 1 + 2\sqrt{l/\rho}. \tag{4}$$

Из (4) получаем зависимость

$$\sigma^0_\infty(l,\rho) = \sigma_y/(1 + 2\sqrt{l/\rho}\,). \tag{5}$$

В случае длинных узких разрезов $\rho \ll l$ равенство (5) принимает вид

$$\sigma^0_\infty(l,\rho) = \sigma_y\sqrt{\rho/l}/2. \tag{6}$$

В то же время при определении значения напряжений $\sigma^*_\infty(l,\rho)$ напряжения в вершине дефекта должны быть равны пределу прочности $\sigma_{\text{в}}$ (см. рис. 3). Однако поскольку в этом случае материал находится в упругопластическом состоянии, используем формулу (3). При этом выражение для коэффициента концентрации напряжений в предположении, что материал деформируется упруго, может быть представлено в виде

$$k_e = \sqrt{k_\sigma k_\varepsilon} = 1 + 2\sqrt{l/\rho},$$

где $k_\sigma = \sigma_{\text{в}}/\sigma^*_\infty(l,\rho)$; $k_\varepsilon = \delta/\varepsilon^*_\infty$; ε^*_∞ — деформация, которую испытывает материал в невозмущенной части образца; δ — относительное удлинение при разрыве. Учитывая, что на бесконечности материал деформируется упруго, получаем $\sigma^*_\infty(l,\rho) = E\varepsilon^*_\infty$. Тогда равенство (3) можно преобразовать:

$$(1 + 2\sqrt{l/\rho}\,)^2 = E\sigma_{\text{в}}\delta/(\sigma^*_\infty(l,\rho))^2. \tag{7}$$

Сравнивая соотношения (4) и (7), получаем

$$\varkappa = \sigma^*_\infty(l,\rho)/\sigma^0_\infty(l,\rho) = \sqrt{E\sigma_{\text{в}}\delta}\,/\sigma_y. \tag{8}$$

Если рассматривается идеально пластичный материал, диаграмма деформирования которого имеет вид диаграммы Прандтля, то равенство (8) принимает вид

$$\varkappa = \sigma^*_\infty(l,\rho)/\sigma^0_\infty(l,\rho) = \sqrt{\delta/\varepsilon_y}\,, \tag{9}$$

где ε_y — деформация, соответствующая пределу текучести.

Таким образом, отношение величин $\sigma^0_\infty(l,\rho)$ и $\sigma^*_\infty(l,\rho)$ на диаграммах разрушения, построенных с использованием необходимого и достаточного критериев, не зависит от геометрии дефекта, а определяется только значениями упругих постоянных, которые приводятся в справочниках. В качестве проверки полученных результатов рассмотрим пластину с размерами 200×100 мм, изготовленную из материала, имеющего следующие характеристики: $\delta = 16$ %, $\sigma_y = 355$ МПа, $\sigma_{\text{в}} = 600$ МПа, $E = 200$ ГПа. В пластине имеется разрез длиной $2l = 60$ мм с радиусом кривизны в вершине $\rho = 100$ мкм. Для этого образца вычислены значения $\sigma_\infty^0 = 6{,}82$ МПа, $\sigma_\infty^* = 90$ МПа. В этом случае $\sigma_\infty^*/\sigma_\infty^0 = 13{,}196$. Из формулы (8) следует $\varkappa = 12{,}343$. Таким образом, различие этих двух значений составляет 6,88 %, что соответствует погрешности конечноэлементного расчета упругопластической задачи (см. таблицу).

Следовательно, для построения диаграммы разрушения с использованием необходимого критерия нужно вычислить значения предела текучести и радиуса кривизны в вершине разреза, а затем по формуле (5) или (6) определить вид функции $\sigma_\infty^0 = \sigma_\infty^0(l,\rho_1)$. В случае если известны механические характеристики материала образца и вид диаграммы $\sigma_\infty^0 = \sigma_\infty^0(l,\rho_1)$, диаграмма разрушения строится с помощью формулы (8) или (9): $\sigma_\infty^*(l,\rho_1) = \varkappa\sigma_\infty^0(l,\rho_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнев В. М.** Оценочная диаграмма квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур. Многомасштабные необходимые и достаточные критерии разрушения // Физ. мезомеханика. 2010. Т. 13, № 1. С. 47–59.
2. **Neuber G.** Kerbspannunglehre: Grunglagen fur Genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937.
3. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
4. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
5. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
6. **Зубченко А. С.** Марочник сталей и сплавов. 2-е изд., доп. и испр. / А. С. Зубченко, М. М. Колосков, Ю. В. Каширский и др. М.: Машиностроение, 2003.
7. **Нейбер Г.** Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации // Механика: Сб. переводов. 1961. № 4. С. 117–130.
8. **Вейс В.** Анализ разрушения в условиях концентрации напряжений // Разрушение. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 263–302.
9. **Ахметзянов М. Х.** Исследование концентрации напряжений в пластической области при помощи фотоупругих покрытий // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 159–162.
10. **Александров А. Я.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. М.: Наука, 1973.
11. **Корнев В. М., Демешкин А. Г.** Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 152–164.
12. **Корнев В. М.** Диаграммы квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур при малоцикловом нагружении // Физ. мезомеханика. 2011. Т. 14, № 5. С. 31–45.
13. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 11/IV 2012 г.