

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН
В УПРУГО-ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ

B. M. Кузнецов

(Новосибирск)

Вопросы динамики трещин при хрупком разрушении привлекают в последнее время значительное внимание [1]. В работе [2] рассматривается стационарное распространение одной полубесконечной трещины, на поверхности которой приложены симметрично распределенные нормальные и касательные напряжения. Ниже исследуется обобщение работы [2] на случай бесконечно большого количества трещин. Для простоты предполагается, что касательные напряжения на поверхности трещины отсутствуют.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим бесконечное упругое тело в плоском напряженном состоянии в плоскости xy . Предположим, что в теле имеется бесконечно большое количество трещин, параллельных оси абсцисс, расположенных на расстоянии $2h$ одна от другой в области $x \leq Vt$, где V — константа, t — время. Предположим далее, что на обеих сторонах поверхности трещины нормальные и касательные напряжения равны и имеют вид

$$\sigma_{yy} = -f(x - Vt), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (1.1)$$

Поведение компонент тензора напряжений на бесконечности определим следующим образом

$$R\sigma_{xx}, R\sigma_{xy}, R\sigma_{yy} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Обозначим через u_x и u_y компоненты вектора перемещения и введем скалярный и векторный потенциалы φ и ψ

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

Как известно, φ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ \left(c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь ρ — плотность среды, λ и μ — константы Ляме.

Из физических соображений ясно, что при бесконечно большом количестве трещин имеет место симметрия как относительно любой прямой, проходящей через трещину и являющейся ее продолжением, так и относительно любой прямой, проходящей параллельно трещинам на половине расстояния между ними. Вследствие этого можно ограничиться рассмотрением области (фиг. 1), представляющей собой полосу $0 \leq y \leq h$.

На границах полосы должны быть выполнены условия

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = h, y = 0, x > Vt \quad (1.5)$$

вследствие симметрии, и

$$\sigma_{yy} = -f(x - Vt), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, x < Vt \quad (1.6)$$

вследствие (1.1).

Следуя [2], ищем решение уравнений (1.4), в виде

$$\varphi = \varphi(x - Vt, y), \quad \psi = \psi(x - Vt, y) \quad (1.7)$$

Введем обозначения

$$x - Yt = X, \quad \beta_1 y = Y_1, \quad \beta_2 y = Y_2 \quad (1.8)$$

$$\beta_1 = \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2}\right)^{1/2}, \quad \beta_2 = \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2}\right)^{1/2}$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и используя (1.8), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_2^2} = 0 \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что можно ввести в рассмотрение две функции

$$w_1(z_1) = \varphi + i\chi, \quad w_2(z_2) = \psi + ik \quad (z_1 = X + iY_1, z_2 = X + iY_2) \quad (1.10)$$

Функции φ , χ и ψ , k связаны условиями Даламбера — Эйлера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial \chi}{\partial Y_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} = -\frac{\partial \chi}{\partial X}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{\partial k}{\partial Y_2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y_2} = -\frac{\partial k}{\partial X} \quad (1.11)$$

Для компонентов тензора напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), & \sigma_{xy} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), & (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Используя (1.7) — (1.11), преобразуем эти соотношения к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu} &= (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu} &= -(1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= -2\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} - (1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

В тех же обозначениях

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = V \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right) \quad (1.14)$$

Теперь сформулируем задачу. Требуется найти функции $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$ в области

$$0 \leqslant Y_n \leqslant \beta_n h \quad (n = 1, 2)$$

удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$2\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + (1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } Y_n = \beta_n h, Y_n = 0 \quad (1.15)$$

$$(1 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial^2 k}{\partial X^2} = \frac{f(X)}{\mu} \quad \text{при } Y_n = 0, X < 0 \quad (1.16)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } Y_n = \beta_n h, Y_n = 0, X > 0 \quad (1.17)$$

и условию на бесконечности

$$\frac{d^2 w_n}{dz_n^2} | z_n | \rightarrow 0 \quad \text{при } | z_n | \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

2. Формальное решение. Введем вместо $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$

$$W_1 = \frac{d^2 w_1}{dz_1^2}, \quad W_2 = \frac{d^2 w_2}{dz_2^2} \quad (2.1)$$

Отобразим полосу (фиг. 1) на верхнюю полуплоскость (фиг. 2)

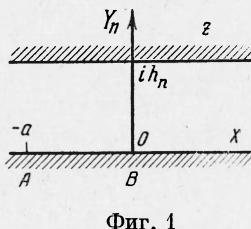
$$\zeta_n = \xi_n + i\eta_n = \exp \frac{\pi z_n}{\beta_n n} \quad (n = 1, 2) \quad (2.2)$$

Пока что, формально, не будем делать различия между переменными ξ_1 и ξ_2 и положим $W_1 = W_1(\zeta)$, $W_2 = W_2(\zeta)$. В плоскости ζ граничные условия (1.15) — (1.17) для функций W_1 и W_2 имеют вид

$$2\beta_1 \operatorname{Im} W_1 + (1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} W_2 = 0 \quad (\eta = 0) \quad (2.3)$$

$$(1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} W_1 - 2\beta_1 \operatorname{Im} W_2 = \frac{1}{\mu} f [X(\xi)] \equiv \frac{1}{\mu} F(\xi) \quad (\eta = 0, 0 < \xi < 1) \quad (2.4)$$

$$\beta_1 \operatorname{Im} W_1 + \operatorname{Re} W_2 = 0 \quad (\eta = 0, \xi > 1, \xi < 0) \quad (2.5)$$



Фиг. 1

Обозначим через W^* функцию, сопряженную W , и перепишем (2.3) в виде

$$2\beta_1 i (W_1 - W_1^*) - (1 + \beta_2^2) (W_2 + W_2^*) = 0 \quad (2.6)$$

Проинтегрируем это равенство по контуру, состоящему из отрезка действительной оси и полуокружности радиуса R . Устремляя R к бесконечности, получаем, учитывая (1.18), по теореме Коши [3]

$$\text{Фиг. 2} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(t) dt}{t - \xi} = W(\xi), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W^*(t) dt}{t - \xi} = 0$$

и, следовательно,

$$W_1(\xi) = -i \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_1} W_2(\xi) \quad (2.7)$$

Заменяем в (2.2) и (2.3) функцию W_2 на W_1 при помощи (2.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W_1 &= \alpha F(\xi) & (\eta = 0, 0 < \xi < 1) \\ \operatorname{Im} W_1 &= 0 & (\eta = 0, \xi > 1, \xi < 0) \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{1 + \beta_2^2}{\mu [(1 + \beta_2^2) - 4\beta_1\beta_2]} \right) \quad (2.8)$$

Для функции $W_1(\xi)$, таким образом, получается смешанная краевая задача. Ее решение дает формула Келдыша — Седова [3], имеющая в данном случае вид

$$W_1(\xi) = \frac{\alpha}{\pi i g(\xi)} \int_0^1 \frac{F(t) g(t) dt}{t - \xi} + \frac{W_1(\infty)}{g(\xi)} \quad \left(g(\xi) = \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^{1/2} \right) \quad (2.9)$$

Вследствие условия на бесконечности (1.18) $W_1(\infty) = 0$.

3. Частный случай. Пусть так же, как в [2]

$$f(X) = \begin{cases} 0 & (-\infty < X < -a) \\ P & (-a < X < 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

В плоскости ζ для функции $F(\xi) \equiv f[X(\xi)]$ это условие имеет вид

$$F(\xi) = \begin{cases} 0 & (\exp(-\pi a / \beta h) > \xi > 0) \\ P & (1 > \xi > \exp(-\pi a / \beta h)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.9), получаем после интегрирования

$$W_1(\xi) = -\frac{\alpha P}{\pi g(\xi)} \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b - \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\xi}} \ln \frac{\sqrt{1-\xi} + b \sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi} - b \sqrt{\xi}} \right] \quad (3.3)$$

$$b = \sqrt{\exp(\pi a / \beta h - 1)} \quad (3.4)$$

Ветви неоднозначных функций, входящих в это выражение, определены следующим образом: $g(\xi) > 0$ при $\xi > 1$, мнимая часть логарифма равна $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$ при $\xi \rightarrow \infty$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} b \leqslant 1/2\pi$. Выражение (3.3) вместе с (2.1), (2.2) и (2.7) дает решение поставленной задачи. Компоненты тензора напряжений определяются отсюда по формулам (1.13). Заметим, что при замене ξ на ξ_1 и ξ_2 величина b должна заменяться согласно (3.4), где соответственно $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$.

Переходим теперь к определению скорости распространения трещин. Из (3.3) нетрудно убедиться в том, что компоненты тензора напряжений и составляющие вектора скорости перемещения есть величины $O(\exp(-\pi\beta/3h))$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, поток энергии на бесконечности отсутствует. С другой стороны, в окрестности особой точки $z = -a$ напряжения и скорость есть величины $O(\ln r)$, где $r^2 = [(x - Vt + a)^2 + y^2]$, так что работа в единицу времени есть $O[r(\ln r)^2]$ и стремится к нулю вместе с r . Следовательно, можно считать, что весь поток энергии, создаваемый в упругом теле внешними силами P , связан с особенностью в точке $z = 0$, т. е. в начале трещины.

Отсюда естественно предположить, что работа внешних сил целиком расходится на создание свободной поверхности трещины.

Обозначим через T энергию, приходящуюся на единицу площади образующейся поверхности.

Тогда скорость роста поверхностной энергии есть TV . Эта величина должна быть равна работе внешних сил в единицу времени.

$$TV = \int_{-a}^0 P \left[\frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{y=0} dx \quad (3.5)$$

Вследствие (1.14) и (2.7) имеем

$$\left[\frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{y=0} = V \left\{ \beta_1 \operatorname{Im} W_1(\xi_1) - \frac{2\beta_2}{1+\beta_2^2} \operatorname{Im} W_1(\xi_2) \right\} \quad (3.6)$$

Подставим (3.6) в (3.5) и перейдем под интегралом к переменной $v = \sqrt{(1-\xi)/\xi}$; получим

$$T = \frac{2\alpha P^2 \beta_1 h}{\pi^2} \left\{ \beta_1 \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b_1 \int_0^{b_1} \frac{dv}{1+v^2} - \int_0^{b_1} \ln \frac{b_1+v}{b_1-v} \frac{vdv}{1+v^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\beta_2}{1+\beta_2^2} \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b_2 \int_0^{b_2} \frac{dv}{1+v^2} - \int_0^{b_2} \ln \frac{b_2+v}{b_2-v} \frac{vdv}{1+v^2} \right] \right\} \quad (3.7)$$

Заметив, что

$$\int_0^b \ln \frac{b+v}{b-v} \frac{vdv}{1+v^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b$$

получим из (3.7), с учетом (2.8)

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} = \frac{\pi a}{2\beta_1 h} \frac{4\beta_1 \beta_2 - (1+\beta_2^2)^2}{2\beta_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_2 - \beta_1 (1+\beta_2^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_1} \quad (3.8)$$

4. Анализ результатов. Рассмотрим вначале формулу (3.8) в предельном случае $h \rightarrow \infty$. Полагая $a/h \ll 1$, имеем с точностью до членов более высокого порядка малости

$$b_n = \frac{V \sqrt{a}}{\sqrt{h} \beta_n}, \quad \text{arc } \operatorname{tg} b_n = b_n \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.8) эти величины и выражения β_1 и β_2 согласно (1.8), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{P^2 a}{\pi \mu T} \frac{V^2}{c_2^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c_2^2}} \right)^{1/2} = \\ & = 4 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Это выражение совпадает с результатом работы [2] для одиночной трещины. В частности, равенство нулю правой части (4.1)

$$4 \left(1 - \frac{V^2}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_2^2} \right)^2 = 0$$

представляет собой уравнение, определяющее скорость распространения релеевских поверхностных волн. Таким образом, в случае стационарного распространения в неограниченной упругой среде одной трещины ее скорость имеет предельное значение, равное релеевской скорости.

Второй предельный случай, который получается из (3.8) при $V \rightarrow 0$, соответствует статической задаче

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} = \left\{ \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} [\exp(\pi a/h) - 1]^{1/2}}{(\exp(\pi a/h) - 1)^{1/2}} + \frac{a}{\pi a} \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 \left[\exp \frac{\pi a}{h} - 1 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (4.2)$$

Отсюда при $h \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{P^2 a}{\pi \mu T} = 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

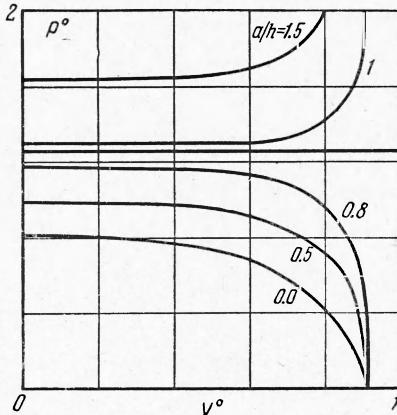
Это также совпадает с результатом, полученным в работе [2].

Рассмотрим теперь формулу (3.8) в общем виде. Результаты расчета в случае $\lambda = \mu$, $c_1^2/c_2^2 = 3$ для различных значений параметра a/h представлены на фиг. 3, где

$$P^\circ = P a^{1/2} (\pi \mu T)^{-1/2}, \quad V^\circ = V / c_2$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что формула (3.8) определяет в плоскости $P^\circ V^\circ$ два семейства кривых, соответствующих двум различным режимам распространения трещин. В одном из них (нижнем на фиг. 3) скорость трещин убывает с увеличением давления, в другом — возрастает. Формально это зависит от того, что раньше обращается в нуль с ростом скорости — числитель — или знаменатель формулы (3.8). Очевидно, что критическая кривая, разделяющая эти два семейства, определяется одновременным обращением в нуль и числителя и знаменателя. Так как числитель обращается в нуль при скорости, равной релеевской, то критическое значение параметра $(a/h)_*$ определяется из уравнения

$$2\beta_2^\circ \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_2^\circ - \beta_2^\circ [1 + (\beta_2^\circ)^2] \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_1 = 0 \quad (4.3)$$



Фиг. 3

Здесь

$$\beta_n = \sqrt{1 - c_0^2 / c_n^2}, \quad b_n = \sqrt{\exp(\pi a / h\beta_n) - 1} \quad (n = 1, 2)$$

при этом c_0 означает релеевскую скорость. При $\lambda = \mu$ находим отсюда $(a / h)_* = 0.94$. Критическое значение давления определяется при найденном значении $(a / h)_*$ из выражения (4.2). В данном случае получаем

$$\frac{P_* a^{1/2}}{(\pi \mu T)^{1/2}} = 1.27$$

Физический смысл двух режимов развития трещин состоит в следующем. Скорость стационарного распространения одиночной трещины возрастает с уменьшением давления. Таким образом, если в материале под действием некоторых нагрузок возникла и распространяется трещина, то она может продолжать развиваться и после того, как нагрузки снимаются. В случае же большого количества трещин такой режим возможен не всегда. При большом расстоянии между трещинами, таком, что $a / h < (a / h)_*$, каждая трещина развивается примерно так же, как и одиночная. Если же расстояние между трещинами мало, так, что $a / h > (a / h)_*$, то на распространение каждой трещины оказывают существенное влияние другие трещины. Развитие трещины как бы сдерживается сжимающими усилиями, действующими со стороны соседних трещин.

Из формулы (3.8) вытекает еще одно важное следствие. При достаточно малом расстоянии между трещинами, когда $a / h > (a / h)_*$, существует предельная скорость распространения при $P \rightarrow \infty$, по величине меньшая, или равная релеевской. Для данного значения параметра a / h эта скорость определяется из уравнения

$$2\beta_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_2 - \beta_1 (1 + \beta_2^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 b_1 = 0 \quad (4.4)$$

В частности, если $a / h \gg 1$, то приближенно можно принять $\operatorname{arc} \operatorname{tg} b_1 \approx 1/2\pi$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} b_2 \approx 1/2\pi$, и тогда из (3.8) получаем

$$\frac{V^2}{c_2^2} = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) \left\{ 1 - \left[1 - \frac{16}{(4 + c_1^2 / c_2^2)^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (4.5)$$

При $\lambda = \mu$ предельное значение скорости, определенное из этого выражения, равно $0.8 c_2$.

Поступила 15 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблatt Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Craggs I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. Phys. Solids, 1960, 8, 66–75.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.