

нансной «накачки» одной моды и сохраняло у себя некоторые черты этой моды. Вихри формировались в областях максимумов вертикальной скорости линейной моды. Течение разбивалось по вертикали на секции, длина которых равнялась длине полуволны линейной моды. При этом частота колебаний жидкости в вихрях приближенно совпадала с частотой линейной моды.

Измеренные в опытах частоты также сопоставлялись с частотами линейных мод. На рис. 4, 5 линиями показана безразмерная частота моды  $(0, 1, 1)$  (первое число — количество периодов по азимутальному углу, второе — количество нулей радиальной скорости на промежутке  $0 < r \leq R$ , третье — количество полуволн вдоль оси сосуда; подробная информация об инерционных модах вращающейся жидкости, заключенной в цилиндрический сосуд, содержится в [2, 3]). Видно, что в данном случае имеется удовлетворительное совпадение экспериментальной частоты  $\Omega$  с частотой этой моды. Наблюдения показали, что при больших  $Ro$  значительные вертикальные перемещения частиц в вихре также происходили главным образом с той же частотой. При этом течение в основных чертах своей структуры совпадало с течением, возникающим при резонансном возбуждении упомянутой моды. При малых  $Ro$  циклонический вихрь и его колебания были менее интенсивными, более заметной становилась примесь высокочастотных колебаний. В качестве критического числа Россби, выше которого низкочастотные колебания были доминирующими, можно предложить  $Ro_* = c/\omega R$  ( $c$  — максимальная фазовая скорость осесимметричной волны:  $c = 0,52\omega R$  [4]).

Результаты опытов говорят о том, что, как и в [1], вихри создавались собственными инерционными колебаниями. Отличие лишь в том, что в [1] собственные колебания возбуждались резонансной «накачкой» практически одной моды, а после буксировки во вращающейся жидкости тел возникало течение, которое, как правило, обладало признаками целого набора мод, отличающихся по геометрии и частоте. Это наглядно показали опыты, в которых при больших  $Ro$  вдоль оси сосуда буксировались диски диаметром 5; 10 см. У возникающего в приосевой области циклонического вихря наблюдались ярко выраженные биения. При этом регистрировалась экспериментальная частота  $\Omega$ , близкая к полусумме частот линейных мод  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 1)$ , более низкая, чем для диска диаметром 7 см.

В заключение отметим, что в исследованном диапазоне картины течения не зависят от  $Re$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Макаренко В. Г., Тарасов В. Ф. Экспериментальная модель смерча // ПМТФ. — 1987. — № 5.
2. Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex // Phil. Mag. — 1880. — V. 10.
3. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. — Л.: Гидрометеониздат, 1975.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

Поступила 3/IX 1987 г.

УДК 532.533

### О РАЗЛИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Э. Л. Амромин, А. В. Васильев, В. В. Дробленков

(Ленинград)

Целью расчетов кавитационных течений обычно является отыскание размеров каверны и распределения давления по обтекаемым телам. Большинство таких расчетов произведено в рамках механики идеальной жидкости. Однако ряд экспериментальных фактов — наличие отрыва пограничного слоя [1] и зоны разрежения [2] на теле перед каверной, влияние размеров тела и скорости его обтекания на гидродинамические ре-

акции, размеры каверн [3, 4] и даже само их существование — требуют исследования влияния вязкости жидкости и поверхностного натяжения на кавитационное обтекание различных тел.

Эпюра давления на теле с каверной определяется внешним невязким потоком. Влияние вязкости приводит к заметному отклонению линий тока от поверхностей тела и каверны в трех зонах: перед каверной, за ней и вблизи кормовой оконечности тела. Эпюра давления на теле в пределах этих зон также заметно отличается от эпюры давления на теле с каверной в идеальной жидкости. Особенности течения в первых двух зонах иллюстрирует рис. 1: кривые 1 и 2 — границы каверн в идеальной и в вязкой капиллярной жидкости при одном и том же значении  $\sigma$  — числа кавитации; 3 и 4 — соответствующие расчетные эпюры коэффициента давления  $C_p$  на обтекаемом теле со шведской головкой [1], часть контура меридионального сечения которого изображена кривой 5;  $\sigma = 2(p_\infty - p_k)\rho^{-1}V_\infty^{-2}$ ;  $C_p = 2(p - p_\infty)\rho^{-1}V_\infty^{-2}$ ;  $\rho$  — плотность жидкости;  $V_\infty$  — скорость набегающего потока;  $p_\infty$  — давление в нем;  $p_k$  и  $p$  — давление в каверне и в произвольной точке границы между невязким и вязким потоками. Кривые 1—4 расчетные,  $\sigma = 0,36$ . Для идеальной жидкости расчеты произведены с использованием обобщенной схемы Рябушинского с замыканием частичной каверны на кольцо (меридиональное сечение которого изображено отрезком 6) тем же, что и в [3], численным методом. Для вязкой капиллярной жидкости расчеты производились примененным в [5] методом для значений числа Рейнольдса  $Re = 10^6$  и числа Вебера  $We = 2 \cdot 10^5$  при нулевом значении краевого угла, т. е. для абсолютно смачиваемого тела;  $Re$  и  $We = \rho V_\infty^2 D \gamma^{-1}$  строятся по одному и тому же характерному размеру  $D$  (диаметру тела вращения или длине хорды для профиля),  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе между жидкостью и газом,  $x_0$  — абсцисса начала зоны отрыва перед каверной,  $x_3$  — конца зоны отрыва за ней,  $x_1$  и  $x_2$  — абсциссы начала и конца каверны.

Первая зона вязко-невязкого взаимодействия образуется из-за совместного влияния вязкости и поверхностного натяжения. Каверна в реальной жидкости имеет ненулевую толщину на линии присоединения к телу и, подобно уступу, вызывает отрыв пограничного слоя перед собой.

Вторая зона предшествует присоединению пограничного слоя к телу: в своем конце каверна также имеет ненулевую толщину, что связано с наличием обратной струйки в конце реальной каверны. В описываемой здесь схеме учтено, что расположенная внутри пограничного слоя реальная каверна проницаема для жидкости. Поэтому осредненный во времени поток жидкости направлен внутрь каверны на задней части ее границы (простирающейся от точки А на кривой 2 до стенки) и из каверны через остальную часть границы (как указано стрелками на рис. 1). Такой поток внутри пограничного слоя не меняет условий на границе между ним и внешним невязким течением и не приводит к нарушению закона сохранения массы для течения в целом.

Третья зона сильного вязко-невязкого взаимодействия вблизи кормы тела не исследуется ни в [5], ни в настоящей работе. Она существует также и в бескавитационных течениях [6], ее влияние на кавитацию может быть косвенным и сказываться главным образом через изменения распределения давления и подъемной силы.

Расчеты кавитационного обтекания тел вязкой жидкостью связаны как со значительными вычислительными трудностями, так и с необходимостью использования полуэмпирических зависимостей, основанных иногда на немногочисленных экспе-

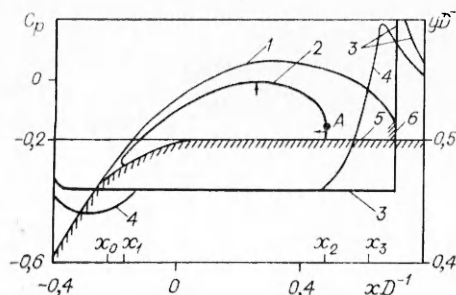


Рис. 1

риментах и на длинных последовательностях оценок. Поэтому представляется важной проверка упрощенных схем и способов расчета кавитационного обтекания тел вязкой жидкостью.

Цель настоящей работы — анализ последствий упрощений, связанных с неполным учетом вязко-невязкого взаимодействия и с предположением о тонкости каверны. Анализ целесообразно начать с более подробного, чем в [5, 7, 8], описания метода, использовавшегося для расчетов кавитационного обтекания тел вязкой жидкостью, т. е. для решения следующей задачи: жидкость однородна, невесома и несжимаема, поток установившийся, плоский или осесимметричный, давление в каверне постоянно, заданы положение каверны на теле, т. е. абсциссы ее начала и конца  $x_1, x_2$ , а также значение  $Re$ , турбулентность набегающего потока [9] и зависящий от смачиваемости обтекаемого тела краевой угол [3, 7]. Требуется найти форму каверны, соответствующие ей значения  $\sigma$  и  $We$ , а также давление на поверхности обтекаемого тела.

Давление в каверне связано с давлением в жидкости формулой Лапласа

$$(1) \quad C_p + \sigma = 2\kappa D We^{-1}$$

( $\kappa$  — кривизна границы каверны). В рамках механики идеальной жидкости границы каверны и невязкого потока совмещались, последняя при выбранной схеме замыкания каверны определялась из краевой задачи для потенциала скорости  $\Phi$ , поскольку  $C_p$  связано с компонентами  $\text{grad } \Phi$  интегралом Бернулли; при этом одновременно отыскивалась форма каверны. В вязкой жидкости упомянутые границы разделены пограничным слоем, а давление на границе каверны связано с модулем скорости невязкого потока на теле вытеснения. Сечение поверхности тела вытеснения  $S^*$  принципиально может быть получено наращиванием обтекаемого тела и каверны на толщину вытеснения  $\delta^*$ . Подобно границе каверны в идеальной жидкости, поверхность тела вытеснения подлежит определению при расчете невязкого потока, поскольку ее часть является свободной границей. Задав на этой границе распределение скорости  $f(S)$ , обозначив через  $R$  расстояние от  $S^*$  до обтекаемого тела, через  $s_0, s_1, s_2, s_3$  — дуговые координаты на  $S^*$  точек, имеющих абсциссы  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , через  $N$  и  $T$  — орты внешней нормали и касательной к  $S^*$ , можно сформулировать с целью отыскания  $R$  и производных  $\Phi$  следующую нелинейную задачу, записанную с использованием зависящих от характеристик пограничного слоя величин:

$$(2) \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$(3) \quad \partial \Phi / \partial N |_{S^*} = 0;$$

$$(4) \quad \partial \Phi / \partial T |_{s \in (s_0, s_3)} = -f(s);$$

$$(5) \quad R(s_0) = \delta^*(s_0);$$

$$(6) \quad dR(s_3)/dT = d\delta^*(s_3)/dT;$$

$$(7) \quad dR(s_0)/dT = d\delta^*(s_0)/dT;$$

$$(8) \quad |\text{grad } \Phi| \rightarrow V_\infty, x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\{x, y\}$  — декартовы координаты плоскости течения (полуплоскости меридионального сечения течения). Необходимость нахождения  $R$  по значениям  $f$  связана с тем, что заранее неизвестны ни форма каверны, ни толщина вытеснения над ней. От задачи расчета кавитационного течения идеальной жидкости (2)—(8) отличаются видом правых частей условий (4)—(7). Для того чтобы задача (2)—(8) была решена, необходимо задать значения  $\delta^*$ ,  $d\delta^*/dT$  при  $s = s_0$  и  $s = s_3$ , а также функцию  $f(s)$  с точностью до одного неопределенного коэффициента  $C_0$  (как и в математически схожих с (2)—(8) задачах идеальной кавитации). Однако  $\delta^*$ ,  $d\delta^*/dT$ ,  $s_0, s_3$  и  $f$  заранее неизвестны и зависят от характеристик пограничного слоя. Функцию  $f(s)$ , которая, согласно экспериментальным данным, долж-

на иметь два участка убывания над отрывными зонами и быть практически постоянной над большей частью каверны (поскольку там  $|κD| \sim 1$ , а обычно  $We \gg 100$ ), можно аппроксимировать линейной комбинацией заданных функций  $f_1, f_2$  и неопределенных коэффициентов  $f(s) = C_0 + C_1 f_1(s) + C_2 f_2(s)$ . Функции  $f_1, f_2$  отличаются от нуля только в пределах первой и второй зон сильного взаимодействия соответственно, их вид подобран на основе анализа экспериментальных данных о распределении давления. Неопределенные коэффициенты  $C_2, C_1, C_0 \equiv (1 + \sigma)^{0.5}$  оказываются поэтому неявно зависящими от длин зон вязкого отрыва.

Пристенный пограничный слой от критической точки до  $s_0$  можно рассчитать одним из известных методов, например описанным в [9]. Значения  $\delta^*$  и толщины потери импульса  $\delta^{**}$  экстраполируются через первую зону сильного взаимодействия с помощью формулы Сквайра — Юнга до точки  $s = s'_1$ , где  $f = C_0$ , и принимается  $v_0 = u_0 = 0$  ( $u_0, v_0$  — компоненты скорости жидкости на границе каверны). Пограничный слой над каверной описывается с помощью трех соотношений: уравнения Кармана

$$(9) \quad U^2 d\delta^{**}/dT + v_0(U - u_0) = 0;$$

уравнения Прандтля для границы каверны, являющейся поверхностью нулевого трения,

$$(10) \quad u_0 du_0/dT = a(U - u_0)^3/u\delta^*$$

и использовавшегося при расчетах отрывных течений [6] профиля продольной компоненты скорости турбулентного пограничного слоя

$$(11) \quad u(\eta) = u_0 + (U - u_0)(3\eta^2 - 2\eta^3).$$

Здесь  $\eta$  — отложенная от границы каверны по нормали и отнесенная к толщине пограничного слоя координата;  $a = \text{const}$ . Чтобы из системы (9)—(11) найти  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$ , интегрируя ее от точки  $s = s'_{13}$  надо знать не только  $U = -\partial\Phi/\partial T$ , но и  $v_0$ . Значения  $v_0$  связаны с осредненной во времени интенсивностью обратной струйки и, как следствие, с  $[\delta^*]$  — скачком  $\delta^*$  при  $x = x_2$  ( $s = s_2$ ); в плоском течении, в частности,  $\int_{s_1}^{s_2} v_0 ds = C_0 [\delta^*]$ .

При расчетах для  $v_0$  был выбран простейший вид:  $v_0 = C_3 (s - s'_1)$ ,  $C_3 = \text{const}$ . Значения  $s'_1$  и  $We$  определяются при интегрировании (1) относительно ординаты границы каверны  $y_K$ : к этому обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно  $y_K$  имеются четыре условия, задающие  $y_K$  и  $dy_K/dT$ , при  $s = s_1$  и  $s = s'_1$ , вследствие чего при вычислениях можно подобрать два параметра. При  $s > s_2$   $\delta^*$  определяется из (5), после чего находится  $[\delta^*]$ .

Четыре еще не определенных величины —  $C_1, C_2, s_0, s_3$  — ищутся из локальных полуэмпирических условий отрыва и присоединения пограничного слоя, откорректированных с целью учета влияния большой кривизны границ потока в оконечностях каверны и связанных с ней больших поперечных скоростей в пограничном слое, а также из условия непрерывности  $dU/dT$  при  $s = s_0$ . Эти условия имеют вид [5, 6]

$$(12) \quad \frac{\delta^*}{U} \frac{dU}{dT} \Big|_{s_3} = -0,015;$$

$$(13) \quad \frac{[B^* - \delta^*(s_2)]^{1,25} [\delta^*(s_2 + 0)]^{0,25}}{[s_2 - s'_1]^{0,5} (s_3 - s_2)} = \frac{1}{12};$$

$$(14) \quad \frac{dU}{dT} + 1,4 \frac{UD}{\delta^* Re} - UD^{3,5} \left( We U \frac{dU}{dT} \right)^{0,67} \frac{(s_1 - s_0)^{2,33}}{5} \Big|_{s_0} = 0;$$

$$(15) \quad \frac{dU}{dT}(s_0 + 0) = \frac{dU}{dT}(s_0 - 0),$$

где  $B^*$  — максимальная толщина каверны, т. е. разность  $y_k$  и ординат тела. Условие (14) выведено для ламинарного слоя перед каверной. Для турбулентного слоя вместо (14) используется условие  $s_1 = s_0 + 2\delta^*(s_0)$  [5]. Введенные с применением относительно небольшого объема известных к настоящему времени экспериментальных данных о пограничных слоях в кавитационных течениях критерии (13), (14) могут быть в дальнейшем уточнены.

Ввиду нелинейности системы (1)–(15) вычисления надо вести многоуровневыми последовательными приближениями, сходимость которых анализируется по значениям невязки в условии (4), а также по сходимости в себе последовательностей значений  $\sigma$  и  $\lg We$ , получаемых в этих приближениях.

Каждое приближение верхнего уровня состоит из расчета потенциального обтекания тела вытеснения заданной формы, из расчета пристенного пограничного слоя и из корректировки формы тела вытеснения над каверной и зонами сильного взаимодействия. В первом приближении  $U$  определяется в два этапа: сначала непосредственно на поверхности обтекаемого тела (методом [3]), причем для профилей учитывается влияние  $Re$  на значения коэффициента подъемной силы (с помощью описанной в [10] на с. 126 поправки к значению  $C_y$ , удовлетворяющему постулату Жуковского — Чаплыгина); затем в первом приближении (и только в первом), чтобы отчасти учесть влияние каверны на градиенты давления в пограничном слое перед ней,  $U$  увеличивается на  $\delta U$ :

$$(16) \quad \delta U(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{q(\xi)}{s - \xi} d\xi;$$

$$(17) \quad q(s) = \frac{F(s)}{\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{U(\xi) d\xi}{(s - \xi) F(\xi)}.$$

Здесь  $F(s) = (s - s_1)^{0.5}(s_2 - s)^{0.5}$ . Поскольку (17) используется только для дуги  $(s_1, s_2)$ , вопрос о поведении  $F(s)$  на бесконечности здесь несуществен. Формулы (16), (17) определяют индукцию от тонкой каверны, расположенной на теле произвольной толщины и моделируемой по схеме Жуковского — Рошко (или ей подобной) в идеальной жидкости. Соответствующее смещение границы потенциального потока отыщется из уравнения

$$(18) \quad q + \frac{d}{dT}(RU) = 0$$

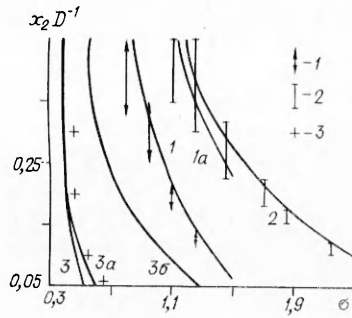
с начальным условием  $R(s_1) = 0$ . Расчет пристенного пограничного слоя на основе одного из описанных в [9] методов в каждом приближении приходится производить неоднократно, поскольку значение  $s_0$  находится из условия (14), содержащего подлежащую уточнению в процессе вычислений величину  $We$ . Одновременно с  $s_0$  определяется  $C_1$  из (15).

Чтобы найти из (13)  $s_3$ , надо знать форму каверны. Задав пробное значение  $s_3$ , следует из (6), (12) искать  $C_0$  и  $C_2$ , для этого условия (3), (4) линеаризуются на использованной для вычисления  $U$  границе невязкого потока при  $s \in (s_0, s_3)$ :

$$(19) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T}(q^*) + C_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 = U;$$

$$(20) \quad q^* + 2 \frac{d}{dT}(Ur) = 0,$$

где  $r$  — искомое возмущение  $\tilde{h}$ , которое следует определить, исключив из уравнений (19) и (20) предположительно малую плотность потенциала  $q^*$ . Оказывается удобным представить  $\partial \Phi / \partial T(q^*)$  в виде суммы  $\partial \Phi / \partial T(q^*) = \partial \Phi_1 / \partial T + \partial \Phi_2 / \partial T + J$ , где первое слагаемое учитывает вклад изменения  $\delta^*$  пристенного пограничного слоя в  $\partial \Phi / \partial T$  на  $S^*$  при  $s \in (s_0, s_3)$ ,



Р и с. 2

остальные два — возмущение  $\partial\Phi/\partial T$  от изменения ординат тела вытеснения при  $s > s_0$ . Функция  $J$  — интеграл Коши плотности  $q^*/2$ , а производная  $\partial\varphi_2/\partial T$  для плоской слабоискривленной границы пренебрежимо мала по сравнению с остальными слагаемыми. Соотношение (19) есть сингулярное интегральное уравнение относительно определяемой на промежутке  $(s_0, s_3)$  функции  $q^*(s)$ . Для исключения  $q^*$  интеграл Коши обращается, что возможно при выполнении условия ограниченности  $q^*$  на  $(s_0, s_3)$ :

$$(21) \quad \pi C_0 = \int_{s_0}^{s_3} \frac{U(\xi) - C_1 f_1(\xi) - C_2 f_2(\xi) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial T}(\xi) - \frac{\partial\varphi_2}{\partial T}(\xi, q^*)}{[(\xi - s_0)(s_3 - \xi)]^{0,5}} d\xi.$$

Условие (21) удовлетворяет соотношениям (6), (7) и позволяет выразить  $C_0$  через  $q^*$  и  $C_2$ . Поэтому  $r$ , определяемое интегрированием (20) при начальном условии (5), оказывается линейной функцией одного неопределенного коэффициента  $C_2$ :  $r(s_3) = \alpha_1 + \alpha_2 C_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2$  — постоянные). Чтобы вычислить  $C_2$ , заранее предполагается равенство  $\delta^*$  и  $R + r$  при  $s = s_3$ , и тогда (12) принимает вид

$$(22) \quad (R + \alpha_1 + \alpha_2 C_2) C_2 df_2'/dT + 0,015(C_0 + C_2 f_2) = 0.$$

В дальнейшем применяется меньший корень этого квадратного уравнения относительно  $C_2$ .

После определения  $C_2$  и, следовательно,  $f$  и  $r$  можно проверить условие (13) и откорректировать значение  $s_3$ . Если (13) удовлетворено, то для вычисления  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$  при  $s > s_0$  используется  $U = f$ ; необходимость итераций при нахождении  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$  связана с определением  $[\delta^*]$ , поскольку  $v_0 \sim [\delta^*]$ . Вычисления каждого приближения оканчиваются определением  $y_K$  по значениям  $R$  и  $\delta^*$  при  $s \in (s'_1, s_2)$ .

В качестве примера применения описанного метода на рис. 2 приведены сопоставления нанесенных с указанием разброса измерений экспериментальных данных [11] для 8 %-ного симметричного профиля с параболическим носиком при  $Re = 1,5 \cdot 10^6$  с расчетными зависимостями, расчетная кривая и экспериментальные результаты 1 отвечают углу атаки  $\alpha = 4,2^\circ$ , 2 —  $\alpha = 6,3^\circ$ , 1a — результаты расчетов идеальной кавитации для  $\alpha = 4,2^\circ$ . Абсцисса  $x_2$  в зависимостях рис. 2 откладывается вдоль хорды от передней кромки профилей. Сопоставляя между собой эти кривые, можно заключить: чтобы при том же  $\alpha$  в вязкой жидкости на данном профиле реализовать каверну той же длины, как и в идеальной, надо почти в 1,5 раза увеличить угол атаки.

Соответствие расчетных зависимостей 1 и 2 эксперименту хорошее, но предложенная процедура вычислений весьма сложна: используются приближения четырех уровней (для уточнения  $\sigma$ ,  $We$ ,  $s_3$  и  $[\delta^*]$ ) при заданных  $\{x_1, x_2\}$ . Для инженерных расчетов, в которых обычно требуется задавать не  $\{x_1, x_2\}$ , а  $\{\sigma, We\}$ , нужно еще последовательными приближениями подбирать  $\{x_1, x_2\}$ . Поэтому актуален анализ упрощенных версий теории. Одна из них оказалась достаточно эффективной для расчетов суперкаверн за телами с плавными обводами [7]; в ней характеристики пограничного слоя вычислялись только до  $s = s'_1$ , их дальнейшее изменение полагалось слабо влияющим на размеры каверн, для замыкания которых использовалась традиционная в идеальной кавитации обобщенная схема Рябушинского. Далее рассматриваются другие упрощения изложенной теории, причем во всех расчетах в уравнении (10) было принято  $a = 0,03$  и  $d\delta^*/dT(s_3) = 0$ .

В тех случаях, когда на теле при его бескавитационном обтекании имеется узкий и глубокий минимум  $C_p$ , положение точек  $s_0, s_1$  слабо ме-

няется с изменением  $We$  и  $\sigma$ . Поэтому с ростом  $x_2$  или  $s_2$  влияние  $We$  на размеры каверны резко падает. Это утверждение иллюстрируют приведенные на рис. 2 результаты для 4 %-ного сегментного профиля при  $\alpha = 2^\circ$ . Расчетная кривая 3 и экспериментальные точки [12] соответствуют  $Re = 10^6$ ,  $We = 10^5$ , кривая 3а —  $Re = 10^6$ ,  $We = 2 \cdot 10^4$ , 3б — расчет идеальной кавитации с применением обобщенной схемы Рябушинского. Незначительная разница размеров каверн уже при  $x_2 D^{-1} > 0,1$  для отличающихся в 5 раз значений  $We$  свидетельствует о слабом влиянии на эти размеры первой зоны сильного взаимодействия. В подобных случаях анализ течения в этой зоне (следующий уровень итераций в расчетах) можно опустить.

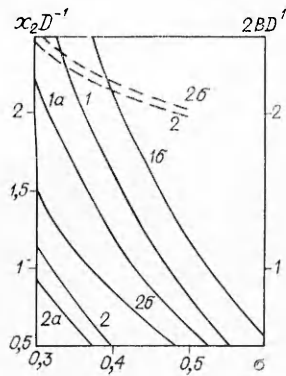
Еще одна возможность упрощений в вычислениях связана с использованием предположений о тонкости каверны. Для таких каверн

$$(23) \quad B^* \ll x_2 - x_1$$

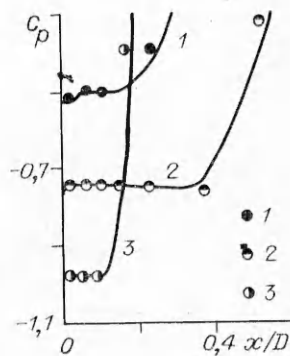
и, поскольку поверхности тела вытеснения и обтекаемого тела оказываются близкими, кажется допустимым ограничиться одним внешним приближением в задаче и однократным уточнением  $U$  только по формулам (16), (17). Если к тому же опустить относительно мало влияющий член  $\partial\varphi_2/\partial T$  в (19), (21), то такое приближение можно назвать квазиплоским квазилинейным. В нем задача Неймана (2), (3), (8) решается в точной постановке для обтекающего тела трехмерного потока, а собственно расчет кавитации производится уже для плоской слабоискривленной дуги в неоднородном набегающем потоке. При таком подходе оказывается необходимым только одно приближение внешнего уровня. Самые же большие вычислительные преимущества квазиплоского квазилинейного подхода при расчетах на ЭВМ связаны с тем, что их наиболее трудоемкую часть — решение внешней задачи Неймана — становится возможным производить один раз для всех используемых пар значений  $\{x_1, x_2\}$ , а при фиксированном  $C_y$  — и для всех  $Re$ , что по сравнению с нелинейной теорией может сокращать машинное время во много десятков раз (в зависимости от числа вариантов: чем больше вариантов, тем больше экономия времени).

Надо, однако, показать, к чему приведут такие упрощения. Сравнение квазиплоской квазилинейной и нелинейной теорий для двух тел вращения большого удлинения с разными носовыми оконечностями приводится на рис. 3. Кривые 1, 2 рассчитаны для тела с полусферической носовой оконечностью: линия 1 соответствует квазилинейной квазиплоской теории для  $Re = 10^7$ , 1а — нелинейной для того же  $Re$ , 1б — нелинейной теории для идеальной жидкости (при использовании обобщенной схемы Рябушинского). Там же приведены результаты для тела со шведской [1] носовой оконечностью, уже изображенного на рис. 1, причем сплошными линиями представлены зависимости от числа кавитации отношения  $x_2 D^{-1}$ , а штриховыми 2, 2б — зависимости от  $\sigma$  отношения ширины каверны  $B$  к диаметру тела. Кривые 2 отвечают квазиплоской квазилинейной теории для вязкой жидкости при  $Re = 10^6$ ,  $We = 2 \cdot 10^5$ , 2а — нелинейной теории при тех же  $Re$  и  $We$ , 2б — нелинейной теории для идеальной жидкости. Для  $B(\sigma)$  нелинейная и квазилинейная теории дают в вязкой жидкости совпадающий в масштабе рис. 3 результат. Начало координат для тел вращения здесь совмещено с началом цилиндрической части, а  $x_1 < 0$  при всех  $\{\sigma, Re, We\}$ . По кривым рис. 3 можно установить, что рассматриваемые каверны действительно удовлетворяют условию (23). Однако как использование плоских сечений, так и квазилинеаризация способствуют повышению  $\sigma$  при  $x_2 = \text{const}$ , чем и объясняется взаимное положение линий 1 и 1а, а также 2 и 2а.

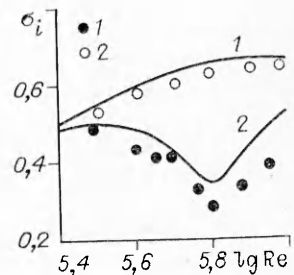
Представленные на рис. 3 результаты свидетельствуют, что квазиплоская квазилинейная теория позволяет учитывать основную долю влияния  $We$  и  $Re$  на размеры относительно коротких каверн. При больших длинах расхождения обеих версий с идеальной кавитацией тел вращения оказываются сопоставимыми с разбросом измерений и достаточно эффективна более простая теория — идеальная кавитация. Для каверн на



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

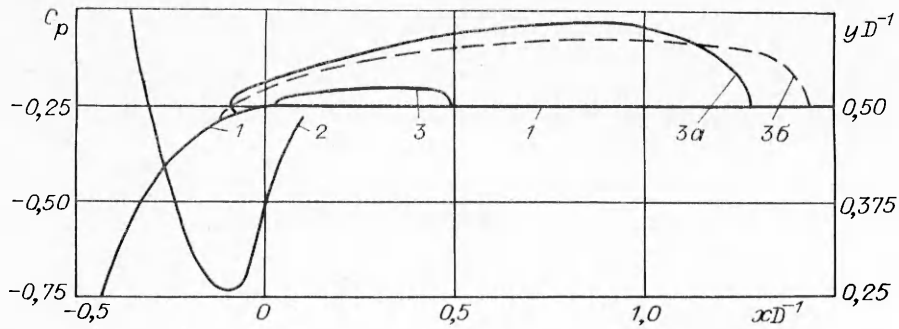
плоских профилях зависимости  $x_2(\sigma, \alpha)$  заметно отличаются в идеальной и вязкой капиллярной жидкости при любых  $\sigma$ . Однако для каверн большой длины ( $x_2 D^{-1} \rightarrow 0,5$ ) значительная часть этого отличия может быть устранена введением в зависимости  $C_y(\alpha)$  рекомендованных в [10] поправок на влияние  $Re$ . При использовании таких поправок удается удовлетворительно согласовать с опытом не только размеры каверн, но и более тонкие характеристики, например распределения  $C_p$  на близких к каверне частях тела. Это подтверждают представленные на рис. 4 сопоставления измерений [13]  $C_p$  на профиле Вальхнер-7 с хордой длины  $D = 0,08$  м при  $Re \approx 10^6$  и расчетных кривых. Кривая и точки 1 соответствуют  $\alpha = -2^\circ$ , кривые и точки 2 и 3 —  $\alpha = 3^\circ$  при разных  $\sigma$ . Наконец, надо отметить, что даже квазиплоская квазилинейная теория позволяет объяснить сложные физические эффекты, связанные с влиянием вязкости и капиллярности на кавитацию, например эффект Аракери — Акосты [4].

Согласно многолетней практике наблюдений развития кавитации, на хорошо обтекаемых телах при любом способе снижения  $\sigma$  каверны растут. С этой практикой вступили в противоречие опыты [4]: когда на теле с полусферической носовой оконечностью диаметром  $D = 0,05$  м был установлен турбулизатор, при значениях  $Re \approx 2 \cdot 10^5$  и  $\sigma \approx 0,45$  на нем наблюдалась каверна, однако при увеличении скорости набегающего потока, сопровождавшемся снижением  $\sigma$ , каверна начала уменьшаться и затем вовсе исчезла. Необычной для тела с турбулизатором оказалась также зависимость от  $Re$  характеризующего появление каверн на теле критического числа кавитации  $\sigma_i$ . Эта зависимость представлена экспериментальными точками 1 на рис. 5, точки 2 — результаты измерений  $\sigma_i$  на том же теле без турбулизатора.

Обсуждаемую теорию можно использовать для определения  $\sigma_i$  в потоках с невысоким газосодержанием: зависимость  $\sigma$  от длины каверны при фиксированных  $Re$  и  $We$  в стационарных потоках из-за влияния капиллярности имеет максимум при  $x_2 - x_1 > 0$ ; он и принимается в качестве  $\sigma_i$  для присоединенных к телу каверн как в современных экспериментах [4], так и в расчетах [8]. Результаты расчетов  $\sigma_i$  по квазиплоской квазилинейной теории показаны линиями 1 и 2 на рис. 5. В расчетах наличие турбулизатора учитывалось назначением начала зоны ламинарно-турбулентного перехода на теле в заданных точках. Поскольку даже для тела с турбулизатором имеет место неплохое соответствие расчетов опытам, можно на основе этих расчетов объяснять эффект Аракери — Акосты.

На носовой части использованного в опытах [4] тела имеется пологий минимум давления (часть меридионального сечения этого тела изображена на кривой 1 на рис. 6, 2 — часть эпюры  $C_p$  для бескавитационного обтекания этого тела). Вниз по потоку от минимума  $C_p$  происходит нарастание  $dC_p/dT$ . При относительно низких  $Re$ , несмотря на наличие турбулизатора, пограничный слой перед каверной остается ламинарным и пред-





Р и с. 6

шествующая ей зона вязкого отрыва может оставаться в равновесии только в области малых положительных  $dC_p/dT$ , т. е. близко от минимума  $C_p$ . При более высоких  $Re$  каверна полностью располагается в турбулентном пограничном слое и началу зоны отрыва должны отвечать гораздо большие  $dC_p/dT$ , которые, как показывают расчеты, при соответствующих опытам [4] условиям еще не могут быть вызваны обратным влиянием каверны на  $C_p$  перед ней. Вследствие этого на рассматриваемом теле в турбулентном пограничном слое каверны должны смещаться вниз по потоку, в зону больших давлений, как показано на рис. 6, где кривыми 3—3б нанесены границы каверн для одного и того же значения  $\sigma = 0,3$ , причем граница 3 отвечает  $Re = 5 \cdot 10^5$ ,  $D = 0,05$  м на теле с турбулизатором, 3а — тем же  $Re$  и  $D$  на теле без турбулизатора, а линия 3б —  $Re = 10^7$ ,  $D = 1$  м, т. е. тем же условиям, что и кривые 1 и 1а на рис. 3.

Из-за указанных выше явлений можно наблюдать при одних и тех же значениях  $\{\sigma, Re, We\}$  кавитацию на теле без турбулизатора и ее исчезновение при его наличии. При дальнейшем увеличении  $Re$ , поскольку для одного и того же тела нельзя независимо менять  $Re$  и  $We$ , вследствие чего с ростом  $Re$  происходят попутное утоньшение головных частей и уменьшение минимальных длин каверн, кавернам удается подняться вверх по потоку в зону меньших  $C_p$  (см. рис. 6), а зависимость  $\sigma_c(Re)$  оказывается снова возрастающей и, как видно из рис. 3, кавитация существует и при  $\sigma > 0,6$ .

Представленные результаты позволяют отметить, что квазиплоская квазилинейная теория кавитационных течений вязкой и капиллярной жидкости может служить для описания обтекания тел плавных очертаний в режиме частичной кавитации.

Авторы признательны Г. Ю. Степанову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Arakeri V. H. Viscous effects on the position of cavitation separation from smooth bodies // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68.— P. 4.
2. Izumida Y., Tamiya S. et al. The cavitation characteristic of two-dimensional hydrofoils // J. Soc. Nav. Arch. Japan.— 1979.— V. 146.
3. Иванов А. И. Гидродинамика развитых кавитационных течений.— Л.: Судостроение, 1980.
4. Arakeri V. H., Acosta A. J. Cavitation inception observation on axisymmetric bodies at supercritical Reynolds numbers // J. Ship Res.— 1946.— V. 20.— P. 40.
5. Амромин Э. Л. К расчетам кавитационных течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 6.
6. Гогин Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.
7. Амромин Э. Л., Иванов А. И. Определение положения точек отрыва кавитационной каверны от тела с учетом вязкости и капиллярности жидкости // ДАН СССР.— 1982.— Т. 262, № 4.
8. Амромин Э. Л., Александров К. В., Левковский Ю. Л. Определение условий возникновения кавитации на телах, обтекаемых с отрывом и присоединением пограничного слоя // НМТФ.— 1986.— № 2.
9. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1973.

10. Бавин В. Ф., Завадовский П. Ю. и др. Гребные винты. Современные методы расчета. — Л.: Судостроение, 1983.
11. Yamaguchi H., Kato H. Non-linear theory for partially cavitating hydrofoils // J. Soc. Nav. Arch. Japan. — 1983. — V. 152.
12. Numachi F., Tsunoda K., Chida I. Cavitation tests on hydrofoil profiles of simple form // Rep. Inst. High. Speed Mech. Japan. — 1959. — N 9.
13. Oossanen van P. Method for the assessment of the cavitation performance of marine propellers // Intern. Shipbuilding progress. — 1975. — V. 22, N 245.

Поступила 20/VII 1987 г.

УДК 532.529

## МЕТОД РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПАРОКАПЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТОВ ДРОБЛЕНИЯ И ИСПАРЕНИЯ

Т. Р. Аманбаев, А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматуллин

(Чимкент, Тюмень)

При обтекании тел потоками газок капельных смесей (смесей газа с большим количеством жидких капель) капли из-за разности скоростей фаз в потоке деформируются и дробятся. Появившиеся в результате дробления исходных крупных капель вторичные мелкие капли быстро испаряются и в связи с этим в значительно большей степени влияют на характер обтекания тела, чем твердые частицы. Проведению расчета обтекания тел парок капельными потоками и посвящена настоящая работа. Дана постановка задачи, выписаны основные уравнения, обсуждаются особенности численного алгоритма. Приведены некоторые результаты расчетов. Влияние взвешенных в газе твердых инертных частиц на условия обтекания тел исследовано в [1—3].

**1. Основные допущения.** Будем полагать, что смесь монодисперсная, капли несжимаемые и не сталкиваются друг с другом, эффекты вязкости и теплопроводности существенны лишь в процессах взаимодействия фаз, дробление капель имеет место при определенных условиях и происходит по механизму обдирки поверхностного слоя, скорости и температуры сорванных мелких капель и пара совпадают, часть срывающихся мелких капель испаряется в газовом потоке, при этом их испарение происходит равновесно (температуры мелких капель и пара равны температуре насыщения), фазовые превращения на поверхности крупных капель могут происходить только в том случае, если обдирка поверхностного слоя отсутствует. Ниже параметры среды, представляющей собой односкоростную и однотемпературную смесь пара и мелких капель («эффективный пар»), отмечены индексом 1, параметры компонентов смеси — пара и мелких капель — соответственно индексами 1v и 12 внизу, а крупных капель — индексом 2 внизу.

Истинные  $\rho_1^0, \rho_{1v}^0, \rho_2^0$  и приведенные (размазанные по всему объему смеси)  $\rho_1, \rho_{1v}, \rho_{12}, \rho_2$  плотности, а также объемные содержания  $\alpha_1, \alpha_{1v}, \alpha_{12}, \alpha_2$  эффективного пара, ее парового и жидкого компонентов и крупных капель связаны соотношениями

$$(1.1) \quad \rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2 = n \pi d^3 / 6,$$

$$\rho_{1v} = \alpha_{1v} \rho_{1v}^0, \quad \rho_{12} = \alpha_{12} \rho_{12}^0, \quad \rho_{1v} + \rho_{12} = \rho_1, \quad \alpha_{1v} + \alpha_{12} = \alpha_1$$

( $n, d$  — число крупных капель в единице объема смеси и их диаметр).

**2. Дифференциальные уравнения движения.** В рамках принятых допущений уравнения сохранения масс эффективного пара и крупных капель, а также уравнение сохранения числа крупных капель для двумерного нестационарного движения с плоской симметрией имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y} = n j_2^s + n j_2^v,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial y} = -n j_2^s - n j_2^v, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_2}{\partial x} + \frac{\partial n v_2}{\partial y} = 0$$

( $u_i, v_i$  — компоненты вектора скорости  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) эффективного пара и