раздела фаз к $i$-й фазе; $\mathbf{q}_1 = -\lambda_2 \nabla T_1$;

$$i_1 = \frac{c}{m}\Delta h + \left(1 - \frac{c}{m}\right) i_{\text{в}} + \frac{c}{m} i_{(21)} \quad \text{(согласно [6])}; \qquad \Delta h = \Delta h(T_1, c) -$$

теплота растворения при концентрации насыщения; $i_{\text{в}} = \Delta H_{\text{в}(298)} +$

$$+ \int_{298}^{T_1} c_{\text{в}} dT_1; \quad i_{(21)} = \Delta H_{2(298)} + \int_{298}^{T_1} c_2 dT_1; \quad i_2 = \Delta H_{2(298)} + \int_{298}^{T_2} c_2 dT_2; \quad \Delta H_{\text{в}(298)},$$

$\Delta H_{2(298)}$ —стандартные энтальпии воды и твердого вещества; $c_{\text{в}}$, $c_2$ — удельные теплоемкости воды и вещества частиц соответственно.

Если пренебречь величиной $D_2 u_\sigma^1 / Dt$, то уравнение притока тепла к поверхности раздела фаз переходит в конечное алгебраическое уравнение относительно $T_\sigma$

$$4\pi a^2 f [\beta_1 (T_1 - T_\sigma) + \beta_2 (T_2 - T_\sigma)] - \rho_2^\circ f \eta (i_2 - i_1) = 0.$$

*Поступила 21 II 1977*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Нигматулин Р. И.** Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред.— ПММ, 1971, т. 35, № 3.
2. **Нигматулин Р. И.** Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.— ПММ, 1970, т. 34, № 6.
3. **Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И.** Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепломассопереноса.— ПММ, 1975, т. 39, № 3.
4. **Эпштейн П. С.** Курс термодинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. **Матусевич Л. Н.** Кристаллизация из растворов в химической промышленности. М., «Химия», 1968.
6. **Мищенко К. П., Полторацкий Г. М.** Вопросы термодинамики и строения водных и неводных растворов электролитов. Л., «Химия», 1968.


УДК 532.135 : 532.546

# О ТЕЧЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ НЬЮТОНОВСКОЙ И БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТЕЙ В КОЛЬЦЕВОМ КАПИЛЛЯРЕ

*И. Б. Муратов*

*(Душанбе)*

Закономерности движения ньютоновской [1, 2], вязкопластической [3—5] и неньютоновской [6] жидкостей в кольцевом капилляре (в зазоре между двумя соосными цилиндрическими трубками) были получены ранее. В данной работе решена задача об установившемся горизонтальном течении обобщенных ньютоновской и бингамовской жидкостей [7—9] в кольцевом капилляре.

Пусть $R_1$ и $R_2$ — соответственно внутренний и внешний радиусы трубок, образующих кольцевой капилляр; $r$ — радиальная цилиндрическая координата частицы жидкости в сечении потока.

Течение обобщенной ньютоновской жидкости в капилляре под действием гидравлического градиента напора $I$ происходит внутри расширяющегося кольца $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ так, что скорость $v(r)$ при некотором промежуточном $r = r_0$ максимальна и, несимметрично убывая в направлении стенок, при $r = r_1$ и $r = r_2$ минимальна. В соответствии с этим в сечении потока выделяются две зоны течения с закономерностями изменения скорости $v_j(r)$. В первой зоне ($j = 1$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_0$) градиент скорости $dv_1(r)/dr \geqslant 0$ и во второй ($j = 2$, $r_0 \leqslant r \leqslant r_2$) $dv_2/dr \leqslant 0$.

Рассмотрев в каждой зоне равновесие сил, приложенных к элементарному кольцевому слою жидкости, имеем

$$d\tau_j(r)/dr + \tau_j(r)/r = (-1)^j \rho g I, \tag{1}$$

где

$$\tau_j(r) = -(-1)^j \eta\, dv_j(r)/dr + \eta N_j(r) \tag{2}$$

— касательное напряжение сдвига с его предельной величиной $\tau_0 = \eta N_j(r)$ в данном слое [7]; $\rho$ и $\eta$ — плотность и вязкость жидкости; $g$ — ускорение свободного падения.

Проинтегрировав (1) с учетом (2) при граничных условиях

$$\text{а)}\quad v_j(r_j) = 0, \quad \text{б)}\quad \left.\frac{dv_j(r)}{dr}\right|_{r=r_j} = 0, \quad \text{в)}\quad v_1(r_0) = v_2(r_0),$$

$$\text{г)}\quad \left.\frac{dv_1(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{dv_2(r)}{dr}\right|_{r=r_0} = 0,$$

для скорости частиц жидкости в каждой зоне находим выражение

$$v_j(r) = -\frac{\rho g I}{4\eta}\left(r^2 - r_j^2 - 2r_0^2 \ln\frac{r}{r_j}\right) - (-1)^j \left[r_0 N_0 \ln\frac{r}{r_j} - \int\limits_{r_j}^{r} N_j(r)\,dr\right] \quad (N_0 = N_j(r_0)). \tag{3}$$

Здесь для определения $r_j$ и $r_0$ при известной закономерности изменения $N_j(r)$ можно воспользоваться условиями б) и в). Кроме того, условие б) позволяет получить соотношение, связывающее внутреннюю картину течения с внешними усилиями:

$$I = (-1)^j (2\eta/\rho g)\,[r_j N_j(r_j) - r_0 N_0]/(r_j^2 - r_0^2) \tag{4}$$

Отсюда при $r_j \to r_0$ и $r_j \to R_j$ можно установить верхний и нижний пределы действующих градиентов $I_0$ и $I_R$, при которых соответственно движение жидкости в капилляре отсутствует и расширение сечения более не происходит. А дальнейшее возрастание $I$ ($I > I_R$), обусловливая течение практически во всем объеме капилляра, ограничено критическим значением градиента напора $I_*$, выше которого ламинарное течение переходит в турбулентное.

Расход жидкости $Q$ в кольцевом капилляре равен

$$Q = 2\pi \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \int_{r_0}^{r_j} r v_j(r)\, dr.$$

Подставив сюда выражение $v_j(r)$ из (3) и проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{kI}{R_2^4}\left[r_2^4 - r_1^4 - 4r_0^2\left(r_2^2 - r_1^2 - r_0^2 \ln\frac{r_1}{r_2}\right) + 2\pi \sum_{j=1}^{2} \int_{r_0}^{r_j} r\,dr \int_{r_j}^{r} N_j(x)\, dx + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2} r_0 N_0 \left(r_2^2 + r_1^2 - r_0^2 \ln\frac{r_0^2}{r_1 r_2}\right)\right], \quad k = \pi\rho g R_2^4/(8\eta). \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые случаи представления $N_j(r)$

$$N_j(r) = M_j\left(\frac{r - r_0}{R_j - r_0}\right)^n, \quad n > 1; \quad N_j(r) = \alpha_j r\left(\frac{r^2 - r_0^2}{R_j^2 - r_0^2}\right)^m, \tag{6}$$
$$m > 0 \ (N_0 = 0, \ N_j(R_j) = M_j),$$

где $n$, $m$ и $M_j$, $\alpha_j$ — соответственно параметры, характеризующие неньютоновское поведение жидкости в объеме и на границе контакта.

Подставив в (4) выражение $N_j(r)$ из (6) и вычислив соответствующие пределы, находим

$$I_0 = 0, \quad I_R = (-1)^j (2\eta R_j M_j/\rho g)/(R_j^2 - r_0^2). \tag{7}$$

Здесь имеют место соотношения

$$N_1(r_1) = N_2(r_2), \quad r_0^2 = s r_2^2 \ \text{при} \ I_0 \leqslant I \leqslant I_R,$$
$$r_0^2 = \theta R_1 R_2 \ \text{при} \ I_R \leqslant I < I_*, \tag{8}$$

где

$$s = r_1/r_2; \ \theta = (c + \mu)/(1 + c\mu); \ c = R_1/R_2; \ \mu = M_1/M_2.$$

Теперь, внося (6)—(8) в (5) и выполнив интегрирование под знаком суммы, получим выражения для расхода $Q$ обобщенной ньютоновской жидкости в кольцевом капилляре

$$Q = kI \times \tag{9}$$
$$\times \begin{cases} \left(\dfrac{r_2}{R_2}\right)^4 (1 - \sqrt{s})^2 (1 - s^2)\left[(1 + \sqrt{s})^2 - \dfrac{4}{n+3}\left(\dfrac{1 + s^2}{1 + s} + \dfrac{n+3}{n+1}\dfrac{s}{1+s} + \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \dfrac{n+4}{n+2}\sqrt{s}\right)\right], \quad 0 \leqslant I \leqslant I_R, \\ 1 - c^4 - 4\theta c(1 - c^2 + \theta c \ln c) - \dfrac{4I_R/I}{n+3}\left[c^2(\theta - c)(\sqrt{c} - \sqrt{\theta})^2 (1 + \right. \\ \left. + \dfrac{n+4}{n+2}\sqrt{\theta/c} + (1 - \theta c)(1 - \sqrt{\theta c})^2\left(1 + \dfrac{n+4}{n+2}\sqrt{\theta c}\right)\right], \quad I_R \leqslant I < I_*, \end{cases}$$

где

$$s = c\left(\frac{1 + \sqrt{\theta c}}{\sqrt{\theta} + \sqrt{c}}\right)^2 \left(\frac{\theta - c}{1 - \theta c}\right)^{2(n-1)/n}; \qquad r_2 = R_2 \frac{1 - \sqrt{\theta c}}{1 - \sqrt{s}}\left(\frac{I}{I_R}\frac{1 + \sqrt{s}}{1 + \sqrt{\theta s}}\right)^{1/(n-1)};$$

(10)

$$Q = kI \cdot \begin{cases} (r_2/R_2)^4 (1 - s^2)(1 - s)^2 m/(m+2), & 0 \leqslant I \leqslant I_R, \\ 1 - c^4 - 4\theta c(1 - c^2 + \theta c \ln c) - \dfrac{2I_R/I}{m+2}[(1 - \theta c)^3 - (\theta - c)^3], & \\ & I_R \leqslant I < I_*, \end{cases}$$

где

$$s = c\left(\frac{\theta - c}{1 - \theta c}\right)^{(m-1)/(m+1)}; \quad r_2 = R_2 (I/I_R)^{1/(2m)} \left(\frac{1 - \theta c}{1 - s}\right)^{(m-1)/(2m)}.$$

Полученные закономерности интересны тем, что они позволяют учесть особенность межфазных явлений $\theta$ на границе контакта жидкости с твердой стенкой (или с любой другой компонентой потока) и являются более общими для течений в капиллярах с круглым и кольцевым сечениями.

Например, из (9), (10) как частные случаи следуют формулы для расхода: обобщенной ньютоновской жидкости в круглом капилляре [8] при $s \to 0$ $(c \to 0)$; ньютоновской жидкости в кольцевом капилляре [1] при $n$ и $m \to \infty$ $(\theta \to (c^2 - 1)/(2c \ln c))$; воды в пристеночном кольцевом пространстве круглой трубки, когда ее центральная цилиндрическая область занята воздухом [10], при $n$ и $m \to \infty$ и $\theta \to c$.

Отметим, что если будет установлена связь между параметрами межфазных характеристик в виде $\theta = \mathrm{const}$ $(0 \leqslant \mu \leqslant \infty)$, то расход жидкости в формулах (9), (10) будет выражаться только в зависимости от градиента напора $I$ и внутренней реологической характеристики жидкости $n$, $m$; и, наоборот, на основе (9), (10) по опытно-установленным закономерностям течения можно вести поиски величин $n$, $m$ и $\theta$.

Течение обобщенных бингамовских жидкостей под действием внешних усилий $I \geqslant 0$, превосходящих силы сцепления частиц жидкости с твердой стенкой, начинается сразу же во всем объеме капилляра и при $I \geqslant I_0$ обусловлено постепенным расслоением движущейся массы внутри расширяющихся областей $R_1 \leqslant r \leqslant r_1$ и $r_2 \leqslant r \leqslant R_2$. При этом промежуточная область $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ жидкости движется как одно целое, т. е. как твердое тело, а с достижением $I$ величины $I_*$ жидкость в кольцевом зазоре полностью расслаивается, и при $I \geqslant I_*$ течение становится вязким [9].

В данном случае скорость частицы жидкости $v_j(r)$ в каждой зоне определяется формулой

(11)
$$v_j(r) = -\frac{\rho g I}{4\eta}\left(r^2 - R_j^2 - 2r_j^2 \ln\frac{r}{R_j}\right) - (-1)^j\left[r_j N_j(r_j) \ln\frac{z}{R_j} - \int\limits_{R_j}^{r} N_j(r)\,dr\right] \quad (j = 1; 2), \quad I_0 \leqslant I < I_*,$$

которая аналогично (3) получена интегрированием уравнения (1) при граничных условиях

$$\text{а)}\quad v_j(R_j) = 0, \quad \text{б)}\quad \left.\frac{dv_j(r)}{dr}\right|_{r=r_j} = 0, \quad \text{в)}\quad v_1(r_1) = v_2(r_2).$$

Заметим, что при $N_j(r) = \tau_0/\eta = \mathrm{const}$ из (11) приходим к соответствующим уравнениям, полученным ранее для течения вязкопластической жидкости в кольцевом пространстве [5].

Для данной модели течения, приняв $N_j(r)$ в виде первого представления из (6), имеем $M_j = M$, $r_0 = (R_2 r_1 - R_1 r_2)/(R_2 - r_2 + r_1 - R_1)$ и

$$N_j(r_j) = M\left(\frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1}\right)^n, \quad -\infty \leqslant n \leqslant 1.$$

Теперь, записав условие равновесия

$$\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)\rho g I=2\pi\left(r_2+r_1\right)\eta M\left(\frac{r_2-r_1}{R_2-R_1}\right)^n$$

в соответствии с установившимся режимом течения для начального и действующего градиентов напора, получим

$$I_0=\frac{2\eta M}{\rho g\left(R_2-R_1\right)}, \quad I=I_0\left(\frac{r_2-r_1}{R_2-R_1}\right)^{n-1}.$$

Для определения $r_j$ (затем и $r_0$) обычно рассматривают [5] последнюю зависимость совместно с граничным условием в).

Согласно проведенным выше рассуждениям, расход $Q$ обобщенной бингамовской жидкости в кольцевом капилляре определяется в виде

$$Q=2\pi\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\int_{r_j}^{R_j} r v_j(r)\,dr+\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)v_1\left(r_1\right)= \tag{12}$$

$$=\frac{\pi\rho g I}{8\eta}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[(-1)^j\left(R_j^2-r_j^2\right)^2+2r_j\left(r_2-r_1\right)\left(R_j^2-r_j^2\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4\left(r_2-r_1\right)\left(R_2-r_0\right)^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left[F_n\left(r_1, r_2, I\right)-F_n\left(R_1, R_2, I_0\right)\left(I_0/I\right)^{n/(n-1)}\right]\right\},$$

$$I_0 \leqslant I<I_*,$$

где

$$F_n\left(r_1, r_2, I\right)=(n+2)(n+3)\frac{r_2^2-\lambda r_1^2}{\left(R_2-r_0\right)^2}\left(\frac{I}{I_0}\right)^{1/(n-1)}-$$

$$-2(n+3)\frac{r_2+\lambda^2 r_1}{R_2-r_0}\left(\frac{I}{I_0}\right)^{2/(n-1)}+2\left(1+\lambda^3\right)\left(\frac{I}{I_0}\right)^{3/(n-1)},$$

а $F_n(R_1, R_2, I_0)$ получим отсюда заменой $r_1$, $r_2$ и $I$ соответственно на $R_1$, $R_2$ и $I_0$; $\lambda=(R_1-r_0)/(R_2-r_0)$.

После несложных преобразований из (12) при $n=0$ получим формулу для расхода вязкопластической жидкости в кольцевом пространстве между двумя соосными цилиндрическими трубками [5]

$$Q=\frac{\pi\rho g I}{24\eta}\left\{3\left[\left(R_2^2-r_2^2\right)^2-\left(R_1^2-r_1^2\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+2\left(r_2-r_1\right)\left[3\left(r_1R_1^2+r_2R_2^2\right)-2\left(R_1^3+R_2^3\right)-r_1^3-r_2^3\right]\right\}.$$

При $r_1\to 0$ $(R_1\to 0)$ из (12) следует формула расхода обобщенной бингамовской жидкости в круглом капилляре [8].

Полученные выше модели течения сложных жидкостей при выборе определенных функций $N_j(r)$ могут быть использованы для описания и объяснения аномальных фильтрационных процессов в неоднородных пористых материалах.

Автор выражает благодарность М. А. Саттарову за внимание к работе.

*Поступила 18 I 1977*

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лейбензон Л. С.** Руководство по нефтепромысловой механике. Ч. 1. М., ГНТИ 1931, с. 25.
2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М., Физматгиз, 1963.
3. **Воларович М. П., Гуткин А. М.** Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между двумя коаксиальными трубками.— ЖТФ, 1946, т. 16, вып. 3.
4. **Воларович М. П., Гуткин А. М.** К вопросу о течении вязкопластичных дисперсных систем в зазоре между двумя соосными трубами.— «Коллоидный журн.», 1963, № 25.
5. **Мирзаджанзаде А. Х.** Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, «Азернефтнешр», 1959.
6. **Мовсумов А. А., Гурбанов Р. С., Гасан-Заде И. А., Искендеров Р. К.** Исследование движения глинистого раствора в кольцевом пространстве.— «Изв. высш. учеб. заведений. Нефть и газ», 1974, № 4, с. 29—31.
7. **Саттаров М. А.** Некоторые модели фильтрации в пористых средах.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 1.
8. **Саттаров М. А.** К изучению особенностей течения жидкостей через пористые среды.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, 5.
9. **Саттаров М. А.** Гидродинамический способ классификации жидкостей в пористых средах.— «Докл. АН ТаджССР», 1976, т. 19, № 11.
10. **Аверьянов С. Ф.** Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха.— «Докл. АН СССР», 1949, т. 69, № 2.

---

УДК 539.893 : 62—98

# КОНЦЕНТРИЧЕСКИЙ УДАР ЗАОСТРЕННЫХ ТЕЛ

*И. Е. Забабахин*

*(Челябинск)*

В работе [1] описана схема концентрического пресса, а в [2] сделан его расчет для предельного случая, когда он представляет собой шар, состоящий из множества узких пирамидок, которые заполняют его не сплошь, а с некоторой пористостью $K > 1$ ($K$ — отношение объема шара к суммарному объему пирамидок). В отличие от [2], где рассмотрено статическое действие такого пресса, в данной работе получена динамическая картина сжатия при сближении пирамидок с некоторой скоростью. Вопрос об этом возник как естественное продолжение [2]. Как и раньше, все явление автомодельно, сжатие материала в центре такого устройства неограниченно велико и сохраняется конечное время (до прихода разгрузки снаружи). Чтобы детали в центре не разрушались, достаточно слабое линейное упрочнение материала пресса давлением; эксперименты [3] показывают, что прочность под давлением значительно возрастает.

Схема устройства в начальный и более поздний моменты приведена на фиг. 1, *а*, *б*. Пирамидки движутся в центр со скоростью $u_0$. В центре образуется сферическая зона сплошного сжатия, граница которой движется наружу со скоростью $v$, и за ней из центра распространяется ударная волна со скоростью $w$. Заметим, что пористость $K = (\beta/\alpha)^2$, где $\alpha$ — угол при вершине несжатой пирамидки; $\beta$—угол при вершине сжатой пирамидки.