

УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ДЖОУЛЕВА НАГРЕВА НА ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЭЙРИНГА — ПАУЭЛЛА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ СОРЕ И ДЮФУРА

Т. Хайат, Ш. Али*, А. Алсаеди**, Х. Х. Олсулэми**

Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

* Институт технических наук и технологии Гулэма Исхака Хана, 44000 Топи, Пакистан

** Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Дждда, Саудовская Аравия

E-mails: fmgpak@gmail.com, ali.qau1987@gmail.com, aalsaedi@hotmail.com,
hhaalsalmi@kau.sa

С учетом эффектов Соре и Дюфура исследуется двумерное магнитогидродинамическое течение в пограничном слое жидкости Эйринга — Пауэлла на растягивающейся поверхности при наличии теплового излучения и джоулева нагрева. Система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой получены в виде рядов. Получены распределения скорости, температуры и концентрации, вычислены коэффициент поверхностного трения, местные числа Нуссельта и Шервуда.

Ключевые слова: жидкость Эйринга — Пауэлла, эффекты Соре и Дюфура, джоулев нагрев, тепловое излучение.

DOI: 10.15372/PMTF20160612

Введение. Исследование течений неньютоновских жидкостей вызывает большой интерес в течение последних десятилетий. Это обусловлено тем, что неньютоновские жидкости используются в научных и технологических приложениях чаще, чем ньютоновские жидкости. Также интерес к задачам неньютоновской гидрогазодинамики обусловлен тем, что наличие дополнительных реологических параметров в определяющих соотношениях для таких жидкостей приводит к появлению дополнительных нелинейных членов более высокого порядка в управляющем уравнении. Кроме того, в силу разнообразия характеристик неньютоновские жидкости не могут быть описаны с помощью одного конститутивного уравнения, как в случае ньютоновских жидкостей, что приводит к необходимости создания различных моделей неньютоновских жидкостей [1–10].

В технике (атомные электростанции, газовые турбины, двигатели самолетов, ракет, спутников и космических кораблей) многие процессы происходят при высокой температуре и тепловом излучении, при этом используются в основном неньютоновские жидкости. Поэтому при конструировании оборудования необходимо учитывать теплоперенос. Джоулев (омический, или резистивный) нагрев является процессом, когда тепло вырабатывается

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке деканата научных исследований Университета короля Абдул-Азиза (Дждда, Саудовская Аравия).

© Хайат Т., Али Ш., Алсаеди А., Олсулэми Х. Х., 2016

электрическим током в проводнике. Это явление используется в быту (электрические кофеварки, утюги, при приготовлении пищи), а также при транспортировке электроэнергии, когда для минимизации потерь необходимо учитывать напряжение.

В работах [11, 12] изучалось влияние омического нагрева на течение в пограничном слое жидкостей Максвелла и Олдройда-Б соответственно. Аналитические приближенные решения для задач теплопереноса микрополярной жидкости в пористой среде при наличии излучения приведены в [13]. В [14] исследовалось воздействие теплового излучения на магнитогидродинамическое течение жидкости с переменной вязкостью. Авторы [15] численно исследовали течение жидкости Эйринга — Пауэлла. В [16] анализировалось течение жидкости Эйринга — Пауэлла при наличии конвективного граничного условия.

Указанные исследования жидкости Эйринга — Пауэлла выполнялись без учета эффектов Соре и Дюфура, так как эти эффекты полагались несущественными по сравнению с эффектами, описываемыми законами Фурье и Фика. Однако такие эффекты имеют большое значение в случае реальных жидкостей. Например, эффект термодиффузии используется для разделения изотопов и в смесях газов с малой (H_2 –He) и средней (N_2 , воздух) молекулярной массой.

Целью настоящей работы является исследование магнитогидродинамического течения жидкости Эйринга — Пауэлла на растягивающейся поверхности с учетом эффектов Соре и Дюфура. С использованием аналитического метода гомотопического анализа (МГА) изучается течение в пограничном слое жидкости Эйринга — Пауэлла при наличии теплового излучения и омического нагрева [17–25].

Постановка задачи. С учетом эффектов Соре и Дюфура исследуется двумерное течение несжимаемой жидкости Эйринга — Пауэлла на растягивающейся поверхности. Оси x , y направлены вдоль и перпендикулярно поверхности соответственно. Магнитное поле B_0 постоянной интенсивности действует в направлении оси y (по нормали к потоку). В силу предположения о малости магнитного числа Рейнольдса влиянием индуцированного магнитного поля пренебрегается. Поверхность линейно растягивается в направлении оси x . Компоненты скорости u , v параллельны осям x и y соответственно. Законы сохранения импульса, энергии и концентрации представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\nu + \frac{1}{\rho \beta_1 C_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2\rho \beta_1 C_1^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Dk_T}{C_s C_p} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p} u^2; \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{Dk_T}{T_m} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - K_1 C. \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость; D — коэффициент диффузии массы; β_1 , C_1 — физические параметры жидкости; σ — электропроводность жидкости; C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; α_m — температуропроводность жидкости; K_1 — скорость реакции; C — концентрация примеси; k_T — коэффициент термодиффузии; C_s — коэффициент восприимчивости концентрации; T_m — средняя температура жидкости; q_r — лучистый тепловой поток:

$$q_r = -\frac{4\sigma^* T^4}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y},$$

σ^* — постоянная Стефана — Больцмана; k^* — средний коэффициент поглощения.

Представим T^4 через ряд Тейлора в окрестности значения T_∞ :

$$T^4 = 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4.$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Dk_T}{C_s C_p} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p} u^2. \quad (5)$$

Граничные условия имеют вид

$$y = 0: \quad u = u_w(x) = ax, \quad v = 0, \quad T = T_w(x) = T_\infty + bx, \quad C = C_w(x) = C_\infty + cx, \quad (6)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty,$$

где a — скорость растяжения; индексы w , ∞ соответствуют условиям на стенке и в свободном потоке. С использованием преобразований

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y, \quad u = ax f'(\eta), \quad v = \sqrt{a\nu} f(\eta), \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}$$

уравнение (1) удовлетворяется тождественно, уравнения (2), (4)–(6) принимают вид

$$(1 + \varepsilon) f''' + f f'' - f'^2 - \varepsilon \delta f''^2 f''' - M f' = 0; \quad (7)$$

$$(1 + 4R_d/3) \theta'' + \text{Pr} (f \theta' - f' \theta) + \text{Pr} D_f \varphi'' + M^2 \text{Pr} \text{Ec} f'^2 = 0; \quad (8)$$

$$\varphi'' + \text{Sc} (f \varphi' - f' \varphi) + \text{Sr} \text{Sc} \theta'' - \text{Sc} \gamma \varphi = 0; \quad (9)$$

$$\eta = 0: \quad f = 0, \quad f' = 1, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1,$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' = 0, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu \beta_1 C}, \quad \delta = \frac{a^3 x^2}{2\nu C^2}, \quad M^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho a}, \quad D_f = \frac{Dk_T(C_w - C_\infty)}{C_s C_p (T_w - T_\infty) \nu}, \quad \gamma = \frac{K_1}{a}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D},$$

$$\text{Ec} = \frac{u_w^2}{C_p (T_w - T_\infty)}, \quad R_d = \frac{4\sigma^* T_\infty^3}{k^* k}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_m}, \quad \text{Sr} = \frac{Dk_T (T_w - T_\infty)}{T_m \nu (C_w - C_\infty)},$$

где ε , δ — материальные параметры жидкости; M — число Гартмана; R_d — параметр излучения; γ — параметр химической реакции; Sc — число Шмидта; Pr — число Прандтля; Ec — число Эккерта; Sr — число Соре; D_f — число Дюфура. Поверхностное трение, локальное число Нуссельта Nu_x и локальное число Шервуда находятся из соотношений

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_w^2}, \quad \text{Nu}_x = \frac{x q_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad \text{Sh} = \frac{x j_w}{D(C_w - C_\infty)}. \quad (10)$$

Здесь q_w , j_w — потоки тепла и массы соответственно:

$$q_w = - \left(k + \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad j_w = -D \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right) \Big|_{y=0},$$

k — теплопроводность. Запишем уравнение (10) в безразмерном виде

$$C_f / \text{Re}_x^{-1/2} = (1 + \varepsilon) f''(0) - (\varepsilon/3) \delta f''^3(0),$$

$$\text{Re}_x^{-1/2} \text{Nu}_x = -(1 + 4R_d/3) \theta'(0), \quad \text{Re}_x^{-1/2} \text{Sh} = -\varphi'(0),$$

где $\text{Re}_x = ax^2/\nu$ — локальное число Рейнольдса.

Решения в виде рядов. Для получения решения с помощью МГА определим линейные операторы:

$$f_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad \varphi_0(\eta) = e^{-\eta}.$$

Вспомогательные линейные операторы для функций f , θ , φ имеют вид

$$L_f = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \quad L_\theta = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} - \theta, \quad L_\varphi = \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \varphi$$

и обладают следующими свойствами:

$$L_f[C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}] = 0, \quad L_\theta[C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}] = 0, \quad L_\varphi[C_6 e^\eta + C_7 e^{-\eta}] = 0$$

(c_i ($i = 1, \dots, 7$) — произвольные постоянные).

Задача деформации нулевого порядка. Задача деформации нулевого порядка формулируется в виде

$$\begin{aligned} (1-p)L_f[\bar{f}(\eta, p) - f_0(\eta)] &= ph_f N_f[\bar{f}(\eta, p), \bar{\varphi}(\eta, p), \bar{\theta}(\eta, p)], \\ (1-p)L_\theta[\bar{\theta}(\eta, p) - \theta_0(\eta)] &= ph_\theta N_\theta[\bar{f}(\eta, p), \bar{\varphi}(\eta, p), \bar{\theta}(\eta, p)], \\ (1-p)L_\varphi[\bar{\varphi}(\eta, p) - \varphi_0(\eta)] &= ph_\varphi N_\varphi[\bar{f}(\eta, p), \bar{\varphi}(\eta, p), \bar{\theta}(\eta, p)], \end{aligned}$$

где нелинейные операторы N_f , N_θ , N_φ в уравнениях (7)–(9) имеют вид

$$N_f = (1 + \varepsilon)\bar{f}'''(\eta, p) - M\bar{f}'(\eta, p) - \bar{f}'^2(\eta, p) + \bar{f}\bar{f}''(\eta, p) - \varepsilon\delta\bar{f}''^2\bar{f}'''(\eta, p),$$

$$N_\theta = (1 + 4R_d/3)\bar{\theta}''(\eta, p) + \text{Pr}(\bar{f}(\eta, p)\bar{\theta}'(\eta, p) - \bar{f}'(\eta, p)\bar{\theta}(\eta, p) + D_f\bar{\varphi}''(\eta, p) + M^2 \text{Ec}\bar{f}'^2(\eta, p)),$$

$$N_\varphi = \bar{\varphi}''(\eta, p) + \text{Sc}(\bar{f}(\eta, p)\bar{\varphi}'(\eta, p) - \gamma\bar{\varphi}(\eta, p) - \bar{f}'(\eta, p)\bar{\varphi}(\eta, p) + \text{Sr}\bar{\theta}''(\eta, p)).$$

Задача деформации m -го порядка. Задача деформации m -го порядка формулируется в виде

$$L[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_{f,m}(\eta); \quad (11)$$

$$L[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_{\theta,m}(\eta); \quad (12)$$

$$L[\varphi_m(\eta) - \chi_m \varphi_{m-1}(\eta)] = h_\varphi R_{\varphi,m}(\eta), \quad (13)$$

$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0, \quad \varphi_m(0) = \varphi_m(\infty) = \theta_m(0) = \theta_m(\infty) = 0,$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

$$R_{f,m}(\eta) = (1 + \varepsilon)f'''_{m-1} - Mf'_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} f_{m-1-k}f''_k - \sum_{k=0}^{m-1} f'_{m-1-k}f'_k - \varepsilon\delta \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^k f''_{m-1-k}f''_{k-l}f'''_l,$$

$$R_{\theta,m}(\eta) = \left(1 + \frac{4}{3}R_d\right)\theta''_{m-1} + \text{Pr} D_f \varphi''_{m-1} + \text{Pr} \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k}\theta'_k - f'_{m-1-k}\theta_k + M^2 \text{Ec} f'_{m-1-k}f'_k),$$

$$R_{\varphi,m}(\eta) = \varphi''_{m-1} + \text{Sc} \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k}\varphi'_k - f'_{m-1-k}\varphi_k) - \text{Sc} \gamma \varphi_{m-1} + \text{Sc} \text{Sr} \theta''_{m-1}.$$

Здесь вспомогательные параметры h_f , h_θ , h_φ не равны нулю; $p \in [0, 1]$ — параметр вложения. При $p = 0$, $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}(\eta, 0) &= f_0(\eta), & \bar{f}(\eta, 1) &= f(\eta), \\ \bar{\theta}(\eta, 0) &= \theta_0(\eta), & \bar{\theta}(\eta, 1) &= \theta(\eta), \\ \bar{\varphi}(\eta, 0) &= \varphi_0(\eta), & \bar{\varphi}(\eta, 1) &= \varphi(\eta), \end{aligned}$$

где $f_0(\eta)$, $\theta_0(\eta)$, $\varphi_0(\eta)$ — начальные значения; $f(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ — решения задачи. Представим разложения в виде рядов Тейлора

$$\bar{f}(\eta, p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) p^m, \quad f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \bar{f}(\eta, p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}; \quad (14)$$

$$\bar{\theta}(\eta, p) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta) p^m, \quad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \bar{\theta}(\eta, p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}; \quad (15)$$

$$\bar{\varphi}(\eta, p) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta) p^m, \quad \varphi_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \bar{\varphi}(\eta, p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}. \quad (16)$$

Сходимость уравнений (14)–(16) существенно зависит от вспомогательных параметров h_f , h_θ , h_φ . Выберем значения h_f , h_θ , h_φ таким образом, чтобы уравнения (14)–(16) сходились при $p = 1$. Получаем

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta), \quad \varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta).$$

Уравнения (11)–(13) решены аналитически с помощью МГА-кода, написанного в вычислительном пакете Mathematica для деформаций порядка $m = 1, 2, 3, \dots$. Общие решения имеют вид

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}, \\ \varphi_m(\eta) = \varphi_m^*(\eta) + C_6 e^\eta + C_7 e^{-\eta},$$

где $f_m^*(\eta)$, $\theta_m^*(\eta)$, $\varphi_m^*(\eta)$ — частные решения; произвольные постоянные имеют следующие значения:

$$C_2 = C_4 = C_6 = 0, \quad C_3 = \left(\frac{\partial^m f_m^*(\eta)}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=0}, \quad C_1 = -C_3 - f_m^*(0), \\ C_5 = -\theta_m^*(\eta) \Big|_{\eta=0}, \quad C_7 = -\varphi_m^*(\eta) \Big|_{\eta=0}.$$

Сходимость рядов решений. Зависимости решений задачи от вспомогательных параметров представлены на рис. 1. Видно, что вспомогательные параметры h_f , h_θ , h_φ имеют следующие интервалы сходимости: $-1,50 \leq h_f \leq -0,25$, $-1,5 \leq h_\theta \leq -1,0$, $-1,4 \leq h_\varphi \leq -0,6$. В табл. 1 показана сходимость решений, полученных с помощью МГА, для $-f''(0)$, $-\theta'(0)$ и $-\varphi'(0)$ в приближениях различного порядка. Из табл. 1 следует, что для полей скорости и температуры достаточно 15-го порядка приближения, для полей концентрации требуется 20-й порядок приближения.

Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим влияние различных параметров вложения на скорость, температуру и концентрацию.

На рис. 2–4 показано поведение жидкости при изменении физических параметров δ , ε и числа Гартмана M . На рис. 2 видно, что скорость и толщина пограничного слоя являются возрастающими функциями M . Аналогичное влияние на поле скорости f' оказывает изменение δ (см. рис. 3). При увеличении параметра жидкости ε скорость и толщина пограничного слоя увеличиваются (см. рис. 4).

На рис. 5–7 показано влияние параметра излучения R_d , числа Прандтля Pr и числа Дюфура D_f на температуру. Видно, что при больших значениях параметра излучения температура и толщина теплового пограничного слоя увеличиваются, а при больших значениях числа Прандтля Pr уменьшаются (см. рис. 6). Увеличение числа Дюфура D_f приводит к увеличению температуры и толщины теплового пограничного слоя.

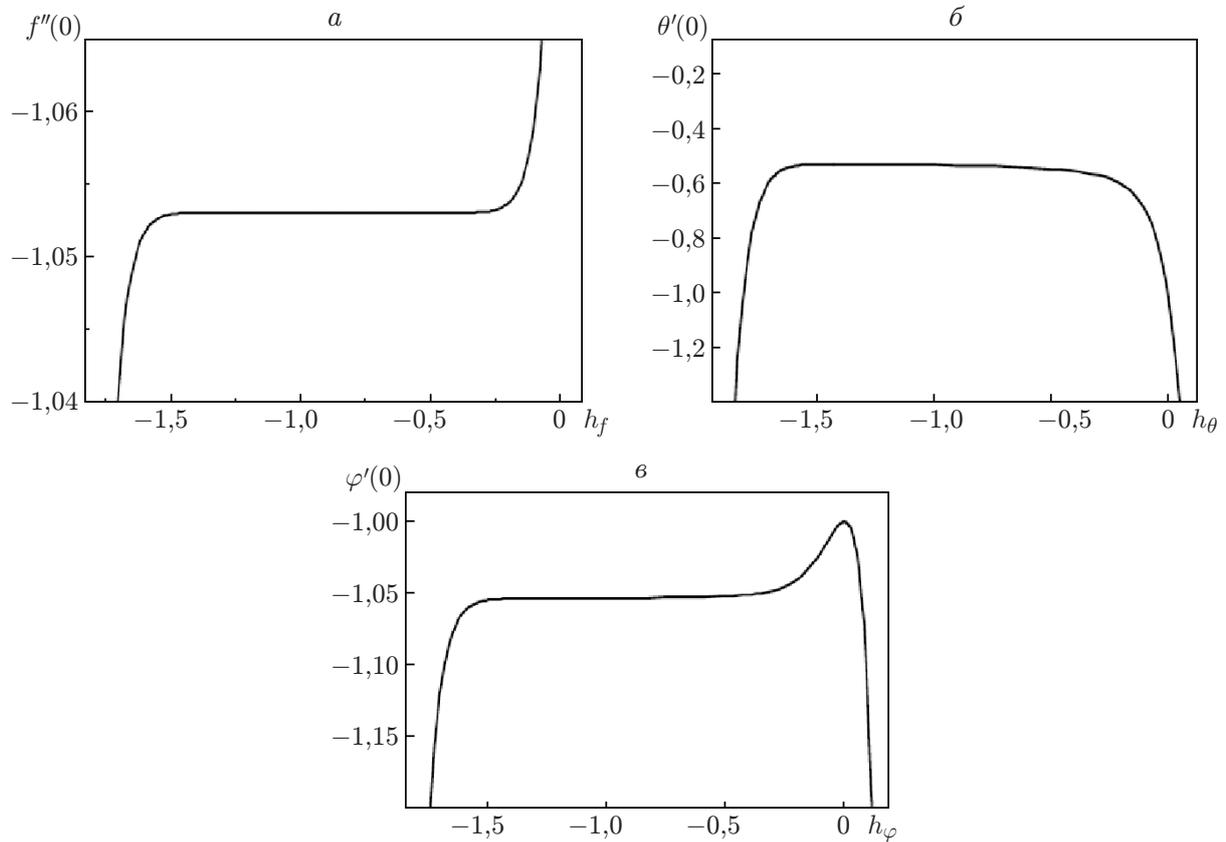


Рис. 1. Зависимость решений задачи от вспомогательных параметров при $\varepsilon = \delta = 0,1$, $R_d = D_f = 0,1$, $\text{Pr} = \text{Ec} = 0,5$, $\text{Sc} = 1,0$, $M = \text{Sr} = \gamma = 0,2$:
a — h_f -кривые, *б* — h_θ -кривые, *в* — h_φ -кривые

Таблица 1

Сходимость решений, полученных с помощью МГА, для приближений различного порядка при $\varepsilon = \delta = R_d = D_f = 0,1$, $\text{Ec} = 0,5$, $\text{Pr} = \text{Sc} = 1,0$, $\gamma = \text{Sr} = M = 0,2$

| Порядок приближения | $-f''(0)$ | $-\theta'(0)$ | $-\varphi'(0)$ |
|---------------------|-----------|---------------|----------------|
| 1 | 1,041 43 | 0,551 843 | 1,043 48 |
| 5 | 1,046 20 | 0,540 495 | 1,052 77 |
| 10 | 1,046 94 | 0,529 440 | 1,054 04 |
| 15 | 1,046 96 | 0,528 420 | 1,054 38 |
| 20 | 1,046 96 | 0,527 820 | 1,054 41 |
| 30 | 1,046 96 | 0,527 820 | 1,054 41 |
| 40 | 1,046 96 | 0,527 820 | 1,054 41 |

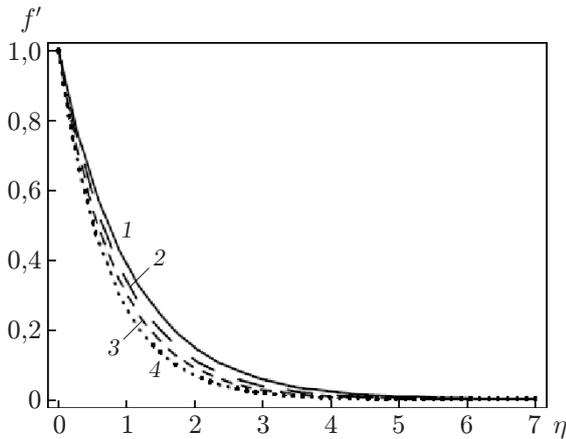


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость f' от η при $\varepsilon = \delta = 0,1$ и различных значениях числа Гартмана M :

1 — $M = 0$, 2 — $M = 0,3$, 3 — $M = 0,6$, 4 — $M = 0,9$

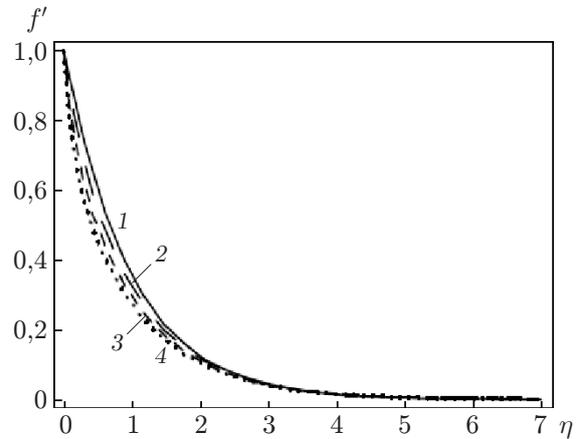


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость f' от η при $\varepsilon = 0,1$, $M = 0,2$ и различных значениях параметра жидкости δ :

1 — $\delta = 0$, 2 — $\delta = 0,5$, 3 — $\delta = 1,0$, 4 — $\delta = 1,5$

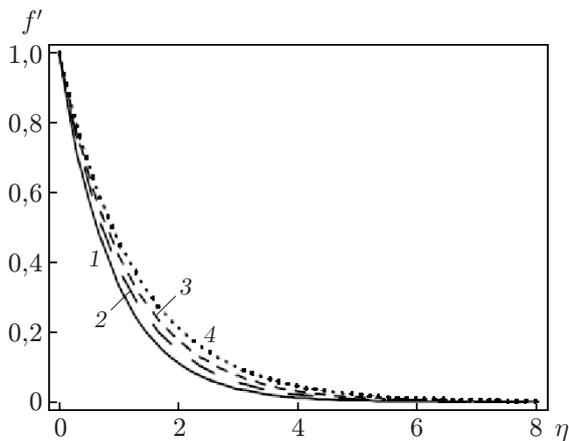


Рис. 4. Зависимость f' от η при $\delta = 0,1$, $M = 0,2$ и различных значениях параметра жидкости ε :

1 — $\varepsilon = 0$, 2 — $\varepsilon = 0,3$, 3 — $\varepsilon = 0,6$, 4 — $\varepsilon = 0,9$

Влияние числа Шмидта Sc , числа Соре Sr и параметра химической реакции γ на концентрацию φ показано на рис. 8–11. Уменьшение концентрации и толщины пограничного слоя наблюдается при увеличении значений числа Шмидта. При увеличении числа Соре концентрация и толщина пограничного слоя увеличиваются. Концентрация жидкости уменьшается при увеличении параметра химической реакции разложения (см. рис. 10) и увеличивается при его уменьшении (см. рис. 11).

В табл. 2 показано влияние различных параметров вложения на поверхностное трение, локальное число Нуссельта и локальное число Шервуда. Поверхностное трение увеличивается при увеличении параметра жидкости δ и уменьшается при больших значениях ε и M . Локальное число Нуссельта увеличивается при увеличении значений δ и Pr и уменьшается при увеличении числа Гартмана M , параметра жидкости ε , числа Соре Sr , числа Дюфура D_f , числа Шмидта Sc и параметра излучения R_d . Значение локального числа Шервуда увеличивается при увеличении ε , D_f , Sc , R_d и уменьшается при увеличении значений δ , M , Pr и Sr .

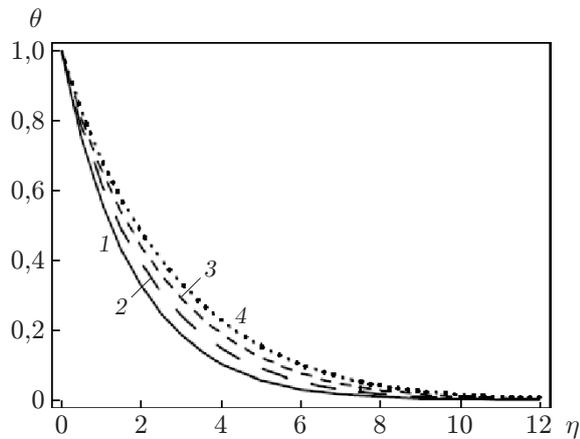


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость θ от η при $\delta = \varepsilon = D_f = 0,1$, $Sr = M = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Ec = Pr = 0,5$ и различных значениях параметра излучения R_d :
 1 — $R_d = 0$, 2 — $R_d = 0,3$, 3 — $R_d = 0,5$, 4 — $R_d = 0,7$

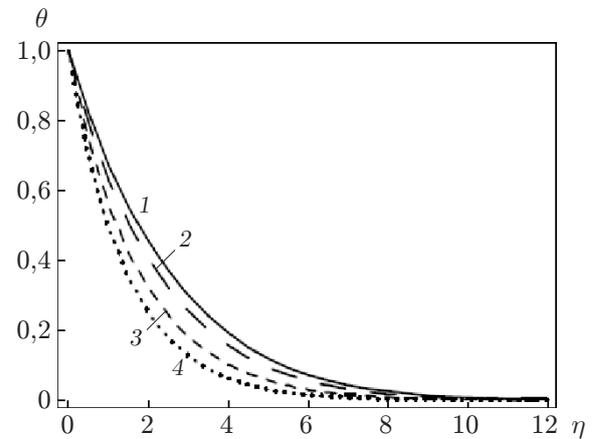


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость θ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = D_f = 0,1$, $Sr = M = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Ec = 0,5$ и различных значениях числа Прандтля Pr :
 1 — $Pr = 0,1$, 2 — $Pr = 0,3$, 3 — $Pr = 0,5$, 4 — $Pr = 0,7$

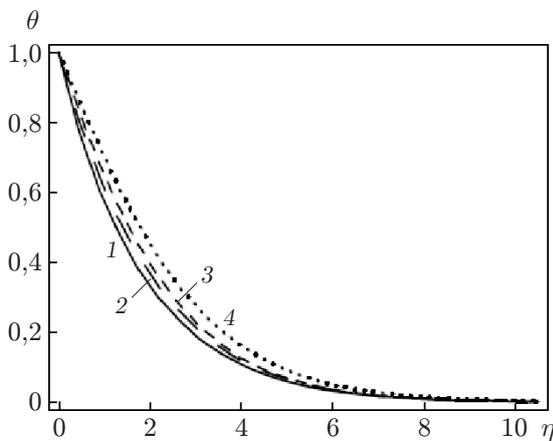


Рис. 7. Зависимость θ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = 0,1$, $Sr = M = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Ec = Pr = 0,5$ и различных значениях числа Дюфура D_f :
 1 — $D_f = 0$, 2 — $D_f = 0,3$, 3 — $D_f = 0,6$,
 4 — $D_f = 0,9$

Заключение. В работе с учетом эффектов Соре и Дюфура исследовано течение жидкости Эйринга — Пауэлла при наличии теплового излучения и омического нагрева. На основе проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

Скорость увеличивается при увеличении параметра жидкости ε и уменьшается при увеличении параметра жидкости δ и числа Гартмана M .

Температура увеличивается с увеличением параметра излучения и числа Дюфура и уменьшается при увеличении числа Прандтля.

Концентрация увеличивается при увеличении числа Соре Sr и уменьшении параметра химической реакции ($\gamma \leq 0$) и уменьшается при больших значениях числа Шмидта Sc и $\gamma \geq 0$.

Поверхностное трение увеличивается с увеличением параметра жидкости δ и уменьшается при увеличении параметра ε и числа Гартмана.

Локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением параметра жидкости δ и числа Прандтля и уменьшается при увеличении чисел Гартмана, Соре, Шмидта, Дюфура, параметров ε и теплового излучения.

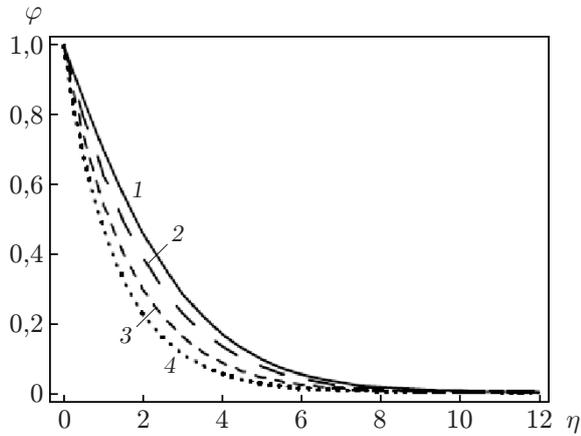


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость φ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = D_f = 0,1$, $Sr = M = 0,2$, $Pr = Ec = 0,5$ и различных значениях числа Шмидта Sc :

1 — $Sc = 0$, 2 — $Sc = 0,2$, 3 — $Sc = 0,4$, 4 — $Sc = 0,6$

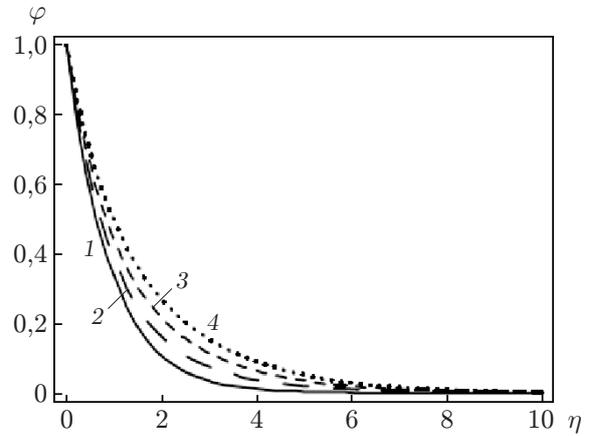


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость φ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = D_f = 0,1$, $M = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Pr = Ec = 0,5$ и различных значениях числа Соре Sr :

1 — $Sr = 0$, 2 — $Sr = 0,4$, 3 — $Sr = 0,8$, 4 — $Sr = 1,2$

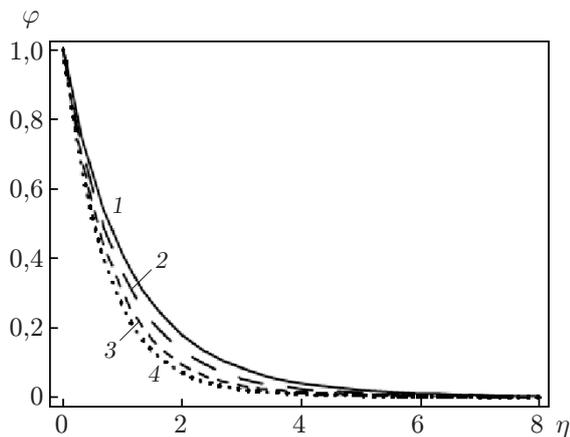


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость φ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = D_f = 0,1$, $M = Sr = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Pr = Ec = 0,5$ и различных значениях параметра химической реакции $\gamma \geq 0$:

1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma = 0,4$, 3 — $\gamma = 0,8$, 4 — $\gamma = 1,2$

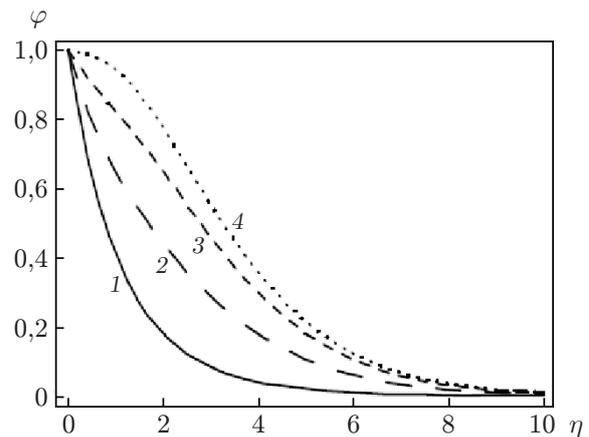


Рис. 11

Рис. 11. Зависимость φ от η при $\delta = \varepsilon = \alpha = D_f = 0,1$, $M = Sr = 0,2$, $Sc = 1,0$, $Pr = Ec = 0,5$ и различных значениях параметра химической реакции $\gamma \leq 0$:

1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma = -0,4$, 3 — $\gamma = -0,8$, 4 — $\gamma = -1,2$

Таблица 2

Безразмерные значения поверхностного трения, числа Нуссельта и числа Шервуда при $\gamma = 0,2$, $Ec = 0,5$ и различных значениях физических параметров

| ε | δ | M | Pr | Sr | D_f | Sc | R_d | $C_f / Re_x^{1/2}$ | $Re_x^{-1/2} Nu_x$ | $Re_x^{-1/2} Sh$ |
|---------------|----------|-----|-----|-----|-------|-----|-------|--------------------|--------------------|------------------|
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,004 030 | 0,615 620 | 1,062 640 |
| 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 0,965 739 | 0,627 625 | 1,069 970 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,049 490 | 0,607 671 | 1,053 920 |
| 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,052 070 | 0,609 463 | 1,053 630 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,089 940 | 0,591 392 | 1,046 650 |
| 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,131 310 | 0,583 301 | 1,039 900 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 1,0 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,958 552 | 1,012 120 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 1,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 1,238 610 | 0,975 757 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,601 312 | 1,028 030 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,4 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,599 831 | 1,018 010 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,2 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,572 675 | 1,059 320 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,529 056 | 1,063 920 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,606 235 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,5 | 0,1 | 1,046 960 | 0,595 402 | 1,336 820 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 2,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,586 713 | 1,574 650 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,1 | 1,046 960 | 0,582 640 | 1,054 410 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,2 | 1,046 960 | 0,493 552 | 1,058 960 |
| 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 1,0 | 0,5 | 1,046 960 | 0,458 736 | 1,062 660 |

Локальное число Шервуда увеличивается с увеличением параметра жидкости ε , чисел Шмидта и Дюфура и параметра теплового излучения и уменьшается при увеличении параметра жидкости δ и чисел Гартмана, Прандтля, Соре.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Jalil M., Asghar S.** Flow of power-law fluid over a stretching surface. A Lie group analysis // Intern. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 48. P. 65–71.
2. **Zheng L., Liu Y., Zhang X.** Slip effects on MHD flow of a generalized Oldroyd-B fluid with fractional derivative // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2012. V. 13. P. 513–523.
3. **Chamkha A. J., Abbasbandy S., Rashad A. M., Vajravelu K.** Radiation effects on mixed convection about a cone embedded in a porous medium filled with a nanofluid // Meccanica. 2013. V. 48. P. 275–285.
4. **Keimanesh M., Rashidi M. M., Chamkha A. J., Jafari R.** Study of a third grade non-Newtonian fluid flow between two parallel plates using the multi-step differential transform method // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 2871–2891.
5. **Li C., Zheng L., Zhang Y., et al.** Helical flows of a heated generalized Oldroyd-B fluid subject to a time-dependent shear stress in porous medium // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 5026–5041.
6. **Wang S., Tan W. C.** Stability analysis of solet-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2011. V. 32. P. 88–94.

7. **Hayat T., Iqbal Z., Mustafa M., Alsaedi A.** Momentum and heat transfer of an upper-convected Maxwell fluid over a moving surface with convective boundary conditions // Nuclear Engng Design. 2012. V. 252. P. 242–247.
8. **Jamil M., Fetecau C., Fetecau C.** Unsteady flow of viscoelastic fluid between two cylinders using fractional Maxwell model // Acta Mech. Sinica (English Ed.). 2012. V. 28. P. 274–280.
9. **Jamil M., Fetecau C.** Starting solutions for the motion of a generalized Burgers' fluid between coaxial cylinders // Boundary Value Problems. 2012. N 14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-14.
10. **Hayat T., Hussain M., Nadeem S., Mesloub S.** Falkner — Skan wedge flow of a power-law fluid with mixed convection and porous medium // Comput. Fluids. 2011. V. 49. P. 22–28.
11. **Hayat T., Qasim M.** Influence of thermal radiation and Joule heating on MHD flow of a Maxwell fluid in the presence of thermophoresis // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 4780–4788.
12. **Hayat T., Alsaedi A.** On thermal radiation and joule heating effects in MHD flow of an Oldroyd-B fluid with thermophoresis // Arab. J. Sci. Engng. 2011. V. 36. P. 1113–1124.
13. **Rashidi M. M., Mohimani pour S. A., Abbasbandy S.** Analytic approximate solutions for heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium with radiation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1874–1889.
14. **Turkyilmazoglu M.** Thermal radiation effects on the time-dependent MHD permeable flow having variable viscosity // Intern. J. Thermal Sci. 2011. V. 50. P. 88–96.
15. **Patel M., Timol M. G.** Numerical treatment of Powell — Eyring fluid flow using method of satisfaction of asymptotic boundary conditions // J. Appl. Numer. Math. 2009. V. 59. P. 2584–2592.
16. **Hayat T., Iqbal Z., Qasim M., Obaidat S.** Steady flow of Eyring — Powell fluid over a moving surface with convective boundary conditions // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 1817–1822.
17. **Hayat T., Ali S., Awais M., Obaidat S.** Stagnation point flow of Burgers' fluid over a stretching surface // Progr. Comput. Fluid Dynam. 2013. V. 13. P. 48–53.
18. **Liao S. J.** On the homotopy analysis method for nonlinear problems // Appl. Math. Comput. 2004. V. 147. P. 499–513.
19. **Maleki M., Tonekaboni S. A. M., Abbasbandy S.** A homotopy analysis solution to large deformation of beams under static arbitrary distributed load // Appl. Math. Modelling. 2013. V. 38, iss. 1. P. 355–368.
20. **Rashidi M. M., Beg O. A., Rastegari M. T., Mehmood A.** Homotopy study of buoyancy-induced flow of non-Newtonian fluids over a non-isothermal surface in a porous medium // Intern. J. Appl. Math. Mech. 2012. N 8. P. 34–52.
21. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Soret and Dufour effects on magnetohydrodynamic (MHD) flow of Casson fluid // Appl. Math. Mech. (English Ed.). 2012. V. 33. P. 1299–1310.
22. **Qian Y., Chen S.** Accurate approximate analytical solutions for multi-degree-of-freedom coupled van der Pol — Duffing oscillators by homotopy analysis method // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 3113–3130.
23. **Arqub O. A., El-Ajou A.** Solution of the fractional epidemic model by homotopy analysis method // J. King Saud Univ. 2013. V. 25. P. 73–81.
24. **Hayat T., Mustafa M., Obaidat S.** Soret and Dufour effects on the stagnation-point flow of a micropolar fluid toward a stretching sheet // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 2011. V. 133. 021202.
25. **Turkyilmazoglu M.** Solution of the Thomas — Fermi equation with a convergent approach // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 4097–4103.

*Поступила в редакцию 24/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 27/XI 2014 г.*