

УДК 519.652

## Вариационное интерполирование функционалов в обратных задачах теории переноса\*

В.В. Учайкин<sup>1</sup>, В.А. Литвинов<sup>2</sup><sup>1</sup>Ульяновский государственный университет, ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск, 432017<sup>2</sup>Барнаульский юридический институт МВД России, ул. Чкалова, 49, Барнаул, 656038

E-mails: vuchaikin@gmail.com (Учайкин В.В.), lva201011@yandex.ru (Литвинов В.А.)

**Учайкин В.В., Литвинов В.А.** Вариационное интерполирование функционалов в обратных задачах теории переноса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 363–380.

Известно, что двойственное представление задач (через основную и сопряжённую в смысле Лагранжа функции) позволяет сформулировать эффективную версию теории малых возмущений, служащую основой метода последовательных приближений в теории решения обратных задач. Если по предварительным прогнозам решение обратной задачи (например, структура интересующей среды) принадлежит некоторому множеству  $A$ , то выбрав в нём подходящий (пробный, опорный) элемент  $a_0$  в качестве невозмущённого и применив теорию возмущений, можно приближённо описать поведение решения прямой задачи в этой области и найти подмножество  $A_0$ , наилучшим образом согласующееся с данными измерений. Однако с повышением требований к точности область  $A_0$  применимости первого приближения быстро сужается, расширение же её добавлением высших членов разложения усложняет процедуру решения. По этой причине в ряде работ были предприняты поиски непerturbативных подходов. К их числу относятся и метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), в котором в качестве основной (“невозмущённой”) задачи предлагается выбирать не одну, а несколько опорных задач  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , построить из них линейную суперпозицию основных и сопряжённых функций и определить коэффициенты из условия стационарности формы, в которой представлен искомым функционал. В этой статье показано применение ВИ-метода к решению нескольких обратных задач астрофизики космических лучей в простейшей постановке.

DOI: 10.15372/SJNM20190308

**Ключевые слова:** теория возмущений, сопряжённые функции, операторы, стационарный функционал.

**Uchaikin V.V., Litvinov V.A.** Variational interpolation of functionals in transport theory inverse problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 363–380.

It is known that the dual representation of problems (through solutions of the main and the conjugate in the Lagrange sense equations) allows one to formulate the perturbation theory serving as basement for the successive approximation method in the inverse problems theory. If, according to preliminary predictions, the solution of an inverse problem (for example, the structure of the medium of interest) belongs to a certain set  $A$ , then selecting a suitable (trial, reference) element  $a_0$  as an unperturbed one and applying the perturbation theory, one can approximately describe the behavior of the solution of the direct problem in this domain and find a subset  $A_0$  that best matches the measurement data. However, as the accuracy requirements increase, the domain  $A_0$  of the first approximation is rapidly narrowing, expanding it by adding higher terms of the expansion complicates the decision procedure. For this reason, a number of works have been devoted to the search for unperturbed approaches. Among them is the method of variational interpolation (VI-method), in the frame of which not one, but several problems  $a_1, a_2, \dots, a_n$  are used in order to compose from their solutions the desired one. The functional of interest is represented in the stationary form, and the coefficients of the expansion are determined from the condition of stationarity of the bilinear form. This paper demonstrates

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00556, № 18-51-53018).

the application of VI-method to solving inverse problems in the frame of simple model situations associated with cosmic rays astrophysics.

**Keywords:** *perturbation theory, adjoint functions, operators, stationary functional.*

---

## 1. Введение

Традиционным подходом к решению обратных задач теории переноса является решение прямых задач для некоторого “банка” условий (сред) с последующим выбором из них той ситуации, решение для которой оказалось наиболее близким к результату измерений. В книге [1] формулируется следующая последовательность действий (“шагов”) в процессе исследования системы методом решения обратной задачи.

1. *Параметризация системы:* установление минимального числа параметров модели, достаточных для полной характеристики системы.
2. *Прямое моделирование:* установление (проверка) физических законов, позволяющих правильно предсказывать результаты измерений наблюдаемых характеристик.
3. *Обратное моделирование:* используя результаты измерений наблюдаемых параметров, определить значения параметров модели и внести их в её описание (программу, код, уравнения).

Наибольшего развития это направление (по понятным причинам) достигло в геологии и геофизике [2, 3]. Анализ геофизических данных в рамках концепции обратных задач помогает понять геологические процессы и протестировать научные гипотезы о Земле, составляющие информационную основу для эффективного прогнозирования и управления добычей полезных ископаемых. Обработка практически всех геофизических исследований включает решение обратной задачи — вычислительный процесс, в котором измерения (например сигналы во времени и пространстве для сейсмических и электромагнитных данных) переводятся в многомерные изображения физических свойств (сейсмические волны, плотность, электропроводность) или в свойства, имеющие прямое отношение к геологическим приложениям (литотип, пористость, насыщенность грунтовыми водами, приповерхностная неоднородность).

Математическая формулировка обратных задач базируется на теоретическом описании процессов передачи и интерпретации геофизической информации: распространение звуковых волн, гамма-излучения и нейтронов; гравитационные и электромагнитные поля; диффузия в пористых средах; просачивание грунтовых вод; многофазные потоки. Практически весь набор задач математической физики становится ареной действия алгоритмов решения обратных задач. То же можно сказать и о развитии метода обратных задач в физике атмосферы и океана, прогнозировании цунами и торнадо, землетрясений и извержений вулканов и так далее. Однако в практическом отношении обратные задачи обладают специфическими особенностями. Так прямая задача обычно формулируется путём задания уравнения (или иного алгоритма) процесса, включающего в себя постоянные или переменные коэффициенты, решения которых или их характеристики (например функционалы от них с заданными весовыми функциями) должны быть найдены. Решение же обратной задачи, заключающейся в определении этих коэффициентов по итогам измерений экспериментально наблюдаемых характеристик решения (тех же функционалов, например), начинается с выбора наиболее чувствительных к вариациям

искомых коэффициентов функционалов. Эта задача решается в рамках теории чувствительности [4, 5].

Мощный импульс теория переноса получила в середине прошлого века в связи с потребностями ядерно-физической технологии [6, 7]. Принцип дуализма, основанный на концепции лагранжево сопряжённых операторов [8], нашёл эффективное применение в расчётах физических возмущений [9], в оценках точности разного рода приближений, используемых в реакторной физике [10], в вычислительной физике вообще [11] и в анализе сложных систем в особенности [12].

В стандартной постановке обратной задачи, описанной в [11], используется одна пара (основное + сопряжённое) решений задачи, избранной в качестве затравочной (невозмущённой). Оба оператора параметризованы одинаковым набором параметров, изменение которых вкупе с теорией малых возмущений позволяет прозондировать окрестность затравочной модели на предмет совпадения возмущённого функционала с измеренным значением. Набор возмущённых параметров, при котором произойдёт это совпадение, и принимается за решение обратной задачи. Однако погрешность, присущая первому порядку теории возмущений, существенно ограничивает область надёжной аппроксимации, по существу носящей характер *экстраполяции* (из одной точки пространства моделей в её окрестность), а включение высших членов разложения резко увеличивает время вычислений [13]. Выход был предложен в работе [14] и заключался в использовании не одной затравочной задачи, а нескольких, называемых *опорными*. Искомый функционал представлялся в стационарной форме, пробные функции (основная и сопряжённая) получались линейными комбинациями их опорных аналогов, а коэффициенты разложения определялись из условия стационарности. Метод был назван *вариационным интерполированием* (ВИ).

Дальнейшее развитие ВИ-метода было осуществлено применительно к задачам оптики атмосферы [15] и позднее к физике космических лучей [16]. Наряду со светом и радиоволнами корпускулярное излучение, приходящее на Землю из далёкого космоса, несёт нам информацию о свойствах и строении окружающей нас части Вселенной. Частицы космических лучей высоких энергий, падающие на атмосферу Земли, порождают в ней кластеры дочерних частиц, называемые в физике космических лучей *широкими атмосферными ливнями* (ШАЛ) [17]. Пространственно-энергетическое распределение вторичных частиц в ШАЛ зависит от типа первичной частицы (протон, фотон, ядро), её энергии, направлении прихода. При этом процессы взаимодействий адронов высоких энергий с атомными ядрами молекул не только не являются строго определёнными, а и сами нуждаются в экспериментальном уточнении [18]. В отсутствие строгой теории сильных взаимодействий типа электродинамики важную роль играют *модели* таких взаимодействий, позволяющие не столько прояснить физический смысл наблюдаемых процессов, сколько согласовать их последствия с результатами наблюдений тех же, например, ливней и уточнить, тем самым, массовый и спектральный состав первичных космических лучей [17, 20–22]. Показания приборов являются функционалами от этих потоков, а их средние значения в ливне, образованном отдельной частицей, являются их ценностями относительно показаний данного детектора.

Систематическое изложение развиваемого нами метода вариационного интерполирования с определением его места в системе родственных подходов дано в нашем обзоре [23]. В настоящей работе рассматривается применение вариационного интерполирования для восстановления параметров взаимодействия излучений с веществом на примере нескольких модельных задач.

## 2. ВИ-представление функционалов

Напомним основные положения ВИ-метода. Пусть необходимо вычислить функционал

$$J = (D, \Phi)$$

от решения линейного неоднородного уравнения

$$L\Phi = S$$

для семейства операторов  $L \in L$  при фиксированных функциях  $D$  и  $S$ . Если интересующая нас область операторного пространства  $L$  достаточно мала, то решение этой задачи даётся теорией возмущений [7, 11]: выбирается основной оператор  $L_0 \in L$ , находятся основное решение  $\Phi_0$  и соответствующая сопряженная функция  $\Phi_0^+$  и строится известным образом ряд теории возмущений [18]

$$J = J_0 - (\Phi_0^+, V_0\Phi_0) + (\Phi_0^+, V_0G_0V_0\Phi_0) - \dots,$$

где  $V_0 = L - L_0$  — возмущение оператора, а  $G_0 = L_0^{-1}$  — оператор Грина невозмущённой задачи.

Идея вариационного метода заключается в том, что если область  $L$  недостаточно мала для применения теории малых возмущений, то можно выбрать в ней *несколько основных* (“опорных”) операторов  $L_1, L_2, \dots$ , решить задачу для каждого из них (т. е. найти  $\Phi_i$  и  $\Phi_i^+$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ), а затем, воспользовавшись стационарной (т. е. удовлетворяющей вариационному принципу  $\delta J = 0$ ) формой

$$\mathcal{J} = \frac{(\Phi^+, S)(D, \Phi)}{(\Phi^+, L\Phi)},$$

представить входящие в неё  $\Phi$  и  $\Phi^+$  в виде линейных комбинаций опорных решений:

$$\Phi = \sum_i C_i \Phi_i, \quad \Phi^+ = \sum_i C_i^+ \Phi_i^+.$$

В результате получим

$$\mathcal{J} = \frac{\sum_{ij} C_i^+ C_j J_i J_j}{\sum_{kl} C_k^+ C_l L_{kl}},$$

где  $J_i = (\Phi_i^+, S) = (D, \Phi_i)$ ,  $L_{kl} = (\Phi_k^+, L\Phi_l)$ , а постоянные коэффициенты  $C_i^+$  и  $C_j$  находятся из условия стационарности

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial C_n^+} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial C_n} = 0,$$

принимаяющего в этом случае следующий вид:

$$\sum_{ij} C_i^+ C_j [J_n L_{ij} - J_j L_{in}] = 0, \quad \sum_{ij} C_i^+ C_j [J_n L_{ij} - J_i L_{nj}] = 0.$$

В итоге приходим к основной ВИ-формуле

$$\mathcal{J} = \sum C_i J_i + \sum C_j^+ J_j - \sum L_{ij} C_i^+ C_j, \quad (1)$$

где

$$C_i^+ = \sum L_{ki}^{-1} J_k, \quad C_j = \sum L_{jk}^{-1} J_k, \quad (2)$$

а  $L_{ij}^{-1}$  — элементы матрицы, обратной к

$$L_{ij} = (\Phi_i^+, L\Phi_j). \quad (3)$$

### 3. О структуре уравнений переноса

Процесс распространения быстрых частиц (квантов света, ядерных излучений) в веществе описывается кинетическими уравнениями для дифференциальной плотности потока частиц  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , конкретный вид которых определяется составом участвующих в процессе частиц и степенью подробности учёта элементарных процессов взаимодействия. Здесь  $\mathbf{r}$  обозначает одну или несколько координат частицы,  $\mathbf{v}$  — скорость частицы или эквивалентный ей набор переменных (скажем, импульс  $\mathbf{p}$  или единичный вектор направления  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}/v$  и энергия  $E$ ). Основными компонентами, из которых составляется исходный кинетический оператор  $L$ , являются: оператор  $\boldsymbol{\Omega}\nabla$ , отвечающий за свободное движение пакета частиц в направлении  $\boldsymbol{\Omega}$ ; оператор умножения  $\Phi$  на линейный коэффициент взаимодействия  $\Sigma$ , характеризующий убыль частиц пакета как из-за поглощения их средой, так и изменения направления движения и энергии в результате рассеяния; интегральный оператор

$$W\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E) = \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dE' n(E') W(\boldsymbol{\Omega}, E|\boldsymbol{\Omega}', E') \Sigma(E') \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E'), \quad (4)$$

учитывающий прибыль частиц в пакете на единице длины пути за счёт переходов в рассматриваемое состояние  $(\boldsymbol{\Omega}, E)$  из других состояний  $\{(\boldsymbol{\Omega}', E')\}$ . Прибыль частиц из независимого источника задаётся его плотностью  $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E)$ . В этой статье мы ограничиваемся рассмотрением стационарного переноса (поэтому время не входит в число аргументов  $\Phi$ ) частиц одного типа без превращения в другие (по этой причине отсутствует переменная, обозначающая тип частицы).

В отсутствие размножения частиц ядро  $W(E|E')$  представляет собой плотность распределения рассеянной частицы по энергии  $E$  при условии, что до рассеяния она имела энергию  $E'$ . Столкновения адронов высоких энергий, имеющие место в космических лучах, сопровождаются рождением часто довольно большого числа вторичных частиц. В этом случае плотность  $W$ , называемая теперь *инклюзивным распределением*, нормирована уже не на 1, а на среднее число адронов  $n(E')$ , рождаемых протоном с энергией  $E'$ :

$$\int_0^{E'} W(E|E') dE = n(E').$$

При характерных для астрофизики космических лучей высоких энергиях [20–22] рассеянные (или родившиеся в столкновении) частицы движутся практически в том же направлении, что и первичная, и в кинетическом уравнении остаётся лишь одна из пространственных координат

$$\frac{\partial \Phi(x, E)}{\partial x} + \Sigma(E)\Phi(x, E) - \int_E^{\infty} dE' n(E') W(E|E') \Sigma(E') \Phi(x, E') = S(x, E). \quad (5)$$

Если источник распределён равномерно в бесконечной среде или нас интересует полное число частиц безотносительно к их координатам, первый член в уравнении (5) исчезает и остаётся *уравнение для равновесного спектра*

$$\Sigma(E)\Phi(E) - \int_E^{\infty} dE' n(E') W(E|E') \Sigma(E') \Phi(E') = S(E). \quad (6)$$

Уравнение это, впрочем, допускает ещё одну интерпретацию. Если процесс образован единственной частицей, имевшей высокую энергию  $E_0$  в точке  $x = 0$  (при этом в других точках  $S = 0$ ), то сочетание интегрального оператора, описывающего процесс размножения, с оператором  $\Sigma(E)$ , в состав которого может входить оператор поглощения, приводит к характерному поведению  $\Phi(x, \cdot)$  с глубиной  $x$ , называемому *каскадной кривой*. С увеличением  $x$  эта кривая быстро возрастает, достигает максимума и затем медленно спадает. По этой причине решение уравнения (6) с нулевой правой частью рассматривают как приближённую (с точностью до постоянного множителя) оценку спектра частиц каскада в области его максимума.

Макроскопические характеристики типа  $\Sigma$  пропорциональны концентрации атомов, с которыми взаимодействуют частицы, в однородной среде — её плотности. В химически неоднородной среде они определяются процентным составом входящих в неё элементов. Вот эти-то и подобные им характеристики среды, в том числе и те, что характеризуют элементарные взаимодействия частиц, и подлежат определению в ходе решения обратных задач.

Обратная задача — это задача об определении характеристик диагностируемой среды. Характеристики эти входят в оператор  $L$  через плотность, химический состав, сечения взаимодействия и прочие. Вообще говоря, зависимость эта имеет функциональный характер: плотность, сечения и другие характеристики могут зависеть от координат и даже времени, так что  $L = L(\varrho^1(\cdot), \varrho^2(\cdot), \dots)$ , где  $\varrho^i(x)$  — обобщённое обозначение совокупности локальных характеристик. В стационарном случае  $x$  включает координаты точки пространства, энергии частицы до и после взаимодействия и так далее, так что измеряемая величина сама становится функционально зависимой от этих переменных:

$$J = J(\varrho^1(\cdot), \varrho^2(\cdot), \dots).$$

Простейший способ представления среды в теории переноса — это её параметризация. Пусть  $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n$  — набор таких параметров, тогда

$$J = J(\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n)$$

и, соответственно,

$$J_i = J(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

так что теперь  $n$  обозначает число параметров, характеризующих взаимодействие излучения с данной средой, а  $N$  — число опорных операторов (будем полагать  $N \geq n$ , а  $n$  зависит от  $i$ ).

Пусть среда характеризуется единственным параметром  $\sigma$ , линейно входящим в оператор  $L$ , и следовательно, в матричные элементы  $L_{ij}$ . Коэффициенты  $C_j$  и  $C_i^+$  являются

решением системы линейных уравнений с матрицей  $L_{ij}$ . Её определитель — полином размерности матрицы  $N$  по параметру  $\sigma$ , а алгебраическими дополнениями к элементам матрицы служат полиномы  $(N-1)$ -го порядка. Таким образом, зависимость коэффициентов  $C_j$  и  $C_i^+$  от  $\sigma$ , а следовательно, и искомое представление стационарного на точном решении функционала  $\mathcal{J}$  будет выражаться отношением полиномов соответствующих степеней. Здесь важно, что выражения для  $C_j$  и  $C_i^+$  имеют одинаковый знаменатель (опредетитель матрицы  $L_{ij}$ ), поэтому порядок полиномов при вычислении по формуле (1) не изменится.

Из сказанного следует: при двух опорных решениях зависимость функционала от параметра  $\sigma$  оператора  $L$  выражается формулой

$$\mathcal{J} = \frac{A\sigma + B}{C\sigma^2 + D\sigma + 1}, \quad (7)$$

постоянные  $A, B, C$  и  $D$  в которой определяются базисными (опорными) значениями функционала. Продемонстрируем описанную процедуру на следующем примере.

#### 4. Прохождение излучения через слой

Задача о прохождении слоя толщиной  $l = 1$  неоднородного поглотителя падающим на его границу единичным потоком частиц в рамках данного метода формулируется как вычисление функционала

$$J = \int_0^{\infty} \Phi(x) D(x) dx = \Phi(l),$$

где  $D(x) = \delta(x-l)$  — функция чувствительности измерительного прибора, а поток  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{d}{dx} + \Sigma(x) \right] \Phi(x) = S(x)$$

с плотностью источника  $S(x) = \delta(x)$  в правой части и переменным сечением взаимодействия (коэффициентом ослабления)  $\Sigma(x)$  в левой.<sup>1</sup> Его решение имеет вид

$$\Phi(x) = e^{-\tau(x)}, \quad 0 < x < l,$$

где

$$\tau(x) = \int_0^x \Sigma(\xi) d\xi$$

есть оптическая длина пути между положением источника  $x = 0$  и точкой в слое  $x$ . Сопряжённое же уравнение

$$\left[ -\frac{d}{dx} + \Sigma(x) \right] \Phi^+(x) = D(x)$$

имеет своим решением функцию

<sup>1</sup>Оператор  $d/dx$  — это то, что остаётся от  $\Omega \nabla$  в мононаправленном потоке частиц сквозь однородный слой, перпендикулярный оси  $x$ .

$$\Phi^+(x) = e^{-\tau^+(x)},$$

где

$$\tau^+(x) = \int_x^l \Sigma(\xi) d\xi$$

есть оптическое расстояние между точкой в слое  $x$  и положением детектора  $x = l$ . Значение измеряемого функционала  $J = \Phi(l) = \Phi^+(0)$  представляется в виде

$$J = e^{-\tau(x)} e^{-\tau^+(l)} = \exp \left( - \int_0^l \Sigma(x) dx \right).$$

Примем теперь толщину слоя  $l = 1$ , а коэффициент  $\Sigma$  — постоянным в области  $x \in (0, 1)$  и равным  $\sigma$ . Задача (определение  $\sigma$  по известному  $J$ ) в такой примитивной постановке решается в элементарных функциях:  $\sigma = -\ln J$ .

Предположим, что это решение нам неизвестно, но известны решения двух опорных задач, задаваемых операторами той же структуры с коэффициентами  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_2 = 1$ . Под решениями мы, как и выше, понимаем соответствующие значения функционалов ( $J_1$  и  $J_2$ ). Обратная задача теперь может быть сформулирована как задача об определении  $L$  (в данном случае  $\sigma$ , однозначно определяющего  $L$ ) по известным, например экспериментально определённым, значениям  $J_1, J_2$ :

$$L_1 \equiv L(\sigma_1) = \frac{d}{dx}, \quad L_2 \equiv L(\sigma_2) = \frac{d}{dx} + 1.$$

Из формулы (7) следует, что в решении такой задачи задействовано четыре постоянных, подлежащих определению, и можно было бы предположить, что потребуется решение четырёх опорных задач. Однако физический смысл рассматриваемых решений даёт нам возможность наряду со значениями рассматриваемого функционала, имеющего вид экспоненциальной функции, в точках 0 и 1 учесть ещё и её (этой функции) производные в этих точках, что в данном, разумеется модельном, случае вдвое уменьшает требуемое число опорных задач. Впрочем, этот факт в теории обратных задач общеизвестен: любая дополнительная информация, умело вносимая в алгоритм решения обратной задачи, ускоряет этот процесс.

Разрешая систему (1)–(3) относительно постоянных  $A, B, C, D$  с учётом приведённых выше решений и их производных для прямого и сопряжённого уравнений данной задачи в точках  $\sigma_1 = 0$  и  $\sigma_2 = 1$ , получаем результат<sup>2</sup>

$$\mathcal{J} = \frac{1 - 0.28172\sigma}{0.23421\sigma^2 + 0.71828\sigma + 1}, \quad (8)$$

аппроксимирующий точные значения функционала  $J = e^{-\sigma}$  (см. таблицу).

Подчеркнём смысл последнего выражения: оно представляет зависимость функционала  $J$  от параметра  $\sigma$  в дробно-рациональной форме, содержащей решения  $J_i$ , найденные для опорных значений  $\sigma_i$  параметра  $\sigma$ . Это и есть решение *прямой задачи* (определения  $J$ ) методом вариационного интерполирования (по значениям  $J_i$  этого функционала

<sup>2</sup>Отметим, что дробно-полиномиальная интерполяция весьма популярна в численном представлении специальных функций [19].

в “точках”  $\sigma_i$ ). Решение же обратной задачи (определение  $\sigma$  по измеренному  $J$ ) в данном чрезвычайно упрощённом случае получается инверсией функции (8) на отрезках монотонности.

Выше мы применили метод вариационного интерполирования для решения обратной задачи с постоянным, не зависящим от координаты, коэффициентом ослабления  $\sigma$ . С целью определения этого коэффициента мы решили две опорные задачи (с постоянными же коэффициентами), составили из этих решений стационарный функционал  $\mathcal{J}$ , вычислили его значения при разных пробных значениях искомого параметра  $\sigma$  и представили результат в виде таблицы.

**Таблица.** Вариационная интерполяция  $\mathcal{J}$  функционала  $J = e^{-\sigma}$  при двух опорных значениях (в точках  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$ )

$\sigma$	$\mathcal{J}$	$J$	$(\mathcal{J} - J)/J$
0.0	1.000000	1.000000	0.00000
0.1	0.904724	0.904837	-0.00012
0.2	0.818418	0.818731	-0.00038
0.3	0.740346	0.740818	-0.00064
0.4	0.669778	0.670320	-0.00081
0.5	0.606013	0.606531	-0.00085
0.6	0.548391	0.548812	-0.00077
0.7	0.496301	0.496585	-0.00057
0.8	0.449183	0.449329	-0.00033
0.9	0.406528	0.406570	-0.00010
1.0	0.367879	0.367879	-1.3E-06

Она показывает вполне удовлетворительные результаты аппроксимации. Особенно следует подчеркнуть, что речь идёт не о слабо меняющейся в рассматриваемой области функции — в таком случае нет мотивации искать новые алгоритмы интерполяции. Рассматриваемая в примере функция изменяется на взятом отрезке значений параметра в *три раза*, а погрешность ВИ-аппроксимации не превышает десятой доли процента. Это очень хороший результат, и он представляется весьма перспективным в качестве стартовой площадки для разработки метода решения обратных задач. Разумеется, в реальной постановке обратной задачи последний шаг (восстановление параметров по наблюдаемым данным) играет очень важную роль, однако общего рецепта тут пока нет, и приходится полагаться на дополнительную информацию об ожидаемом результате.

И ещё один момент следует принять во внимание: завершение решения обратной задачи в данной постановке предполагает вычисление параметра  $\sigma$  как функции  $\mathcal{J}$  ( $\sigma = \sigma(\mathcal{J})$ ). Здесь, по простоте модели, достаточно лишь обратной интерполяции функции, но и в более общем случае, когда требуется найти несколько параметров, определяющих взаимодействие излучения с веществом, и соответственно используется несколько опорных решений, обратный переход не потребует выхода за пределы стандартных алгебраических операций.

## 5. Восстановление профиля неоднородного слоя

Усложним теперь задачу, взяв слой, как и прежде, толщиной  $l = 1$ , но с переменным коэффициентом ослабления, изменяющимся по закону

$$\Sigma(x) = a \left( x - \frac{3}{2} \right)^2, \quad 0 < x < l. \quad (9)$$

Оптическая толщина такого слоя  $\tau(1) = (13/12)a$ , и, стало быть, точное решение

$$J = \exp\left(-\frac{13}{12}a\right).$$

Возьмём в качестве представителей трёх опорных задач операторы

$$L_k = \frac{d}{dx} + \Sigma_k, \quad \Sigma_k = \sigma_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3,$$

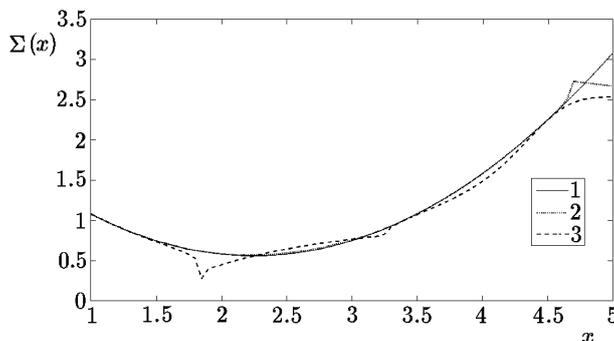
описывающие перенос излучения в однородных слоях разной плотности. Соответствующие им пары решений (прямое и сопряжённое) имеют вид:

$$\Phi_k(x) = e^{-\sigma_k x}, \quad \Phi_k^+(x) = e^{-\sigma_k(1-x)}, \quad 0 < x < 1.$$

Точный оператор

$$L = \frac{d}{dx} + a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2, \quad 0 < x < l.$$

Теперь всё готово для вариационной интерполяции искомого функционала по опорным функционалам. Обозначив через  $\mathcal{J}(\sigma_1, \sigma_2)$  и  $\mathcal{J}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  стационарные функционалы, построенные по двум и трём опорным решениям, указанным в их обозначениях, положим в них  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2.25$ ,  $\sigma_3 = 1.65$  и выполним требуемые вычисления. Результаты, представленные на рисунке 1, можно считать вполне приемлемыми за исключением двух незначительных нерегулярностей, мы видим, что зависимость коэффициента ослабления в *неоднородном слое* с хорошей точностью восстановлена по опорным (двум в одном случае и трём в другом) решениям для *однородных слоёв*.



**Рис. 1.** Пример восстановления зависимости  $\Sigma(x)$  ВИ-методом. 1 — точная функция  $\Sigma(x)$  (9); 2 — восстановленная с использованием трёх опорных решений (при значениях  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2.25$ ,  $\sigma_3 = 1.65$ ); 3 — то же с использованием только двух опорных решений (при  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2.25$ )

## 6. Интегральное уравнение для равновесного спектра

Выше мы рассматривали функционалы от решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего одномерный процесс прохождения излучения (частиц, фотонов) через слой нерассеивающего материала. Если фотоны попадают в среду, которая может их рассеивать (мгновенно изменять направление их движения и их энергию),

то в уравнении переноса появляются соответствующие интегральные операторы, допускающие вероятностную интерпретацию процесса. Так, в случае потерь энергии в бесконечной однородной среде энергетический спектр частиц  $S(E)$ , испускаемых равномерно распределённым в такой среде источником частиц, в результате многократных рассеяний преобразуется в *равновесный спектр*  $\Phi(E)$  наблюдаемых частиц, удовлетворяющий уравнению (6).

К настоящему времени ещё не завершено построение теории адронных процессов высоких энергий, и при анализе экспериментальных результатов пользуются более или менее общепринятыми моделями таких взаимодействий [17], аппроксимируя характеризующие их зависимости простыми аналитическими выражениями типа

$$W(E'|E) = \frac{k\alpha \left(\frac{E'}{E}\right)^{\alpha-2}}{E}. \quad (10)$$

Интеграл по энергии  $E'$  вторичных частиц от этого *инклюзивного* сечения даёт их среднюю множественность, при  $E_* = 1$  ГэВ (энергия частиц в космических лучах измеряется в гигаэлектронвольтах, близких к энергии покоя нуклонов) имеющую вид

$$\int_{E_*=1}^E W(E'|E) dE' = \frac{k\alpha}{1-\alpha} (E^{1-\alpha} - 1),$$

согласующийся со степенным ростом множественности с энергией  $\bar{n}(E) \propto E^\nu$ ,  $\nu = 1 - \alpha > 0$ , параметр  $k$  представляет собой коэффициент неупругости. Сечение взаимодействия примем в виде

$$\Sigma(E) = \sigma \left(\frac{E}{E_0}\right)^\beta, \quad \beta > 0. \quad (11)$$

В качестве опорных приняты равновесные решения, найденные при  $\beta = 0$  в [16]:

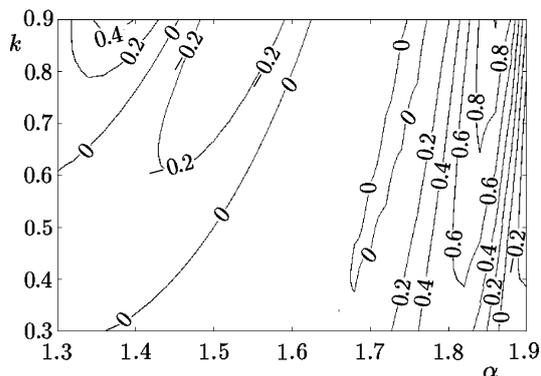
$$\Phi_i(E) = \sigma_i^{-1} \exp[(2 - \alpha_i)y] \frac{\delta(y) + \alpha_i k_i \exp(\alpha_i k_i y)}{E_0}, \quad y = \ln \left(\frac{E_0}{E}\right), \quad (12)$$

$$\Phi_i^+(E) = \sigma_i^{-1} \exp[(2 - \alpha_i)y'] \frac{\delta(y') + \alpha_i k_i \exp(\alpha_i k_i y')}{E_*}, \quad y' = \ln \left(\frac{E}{E_*}\right), \quad (13)$$

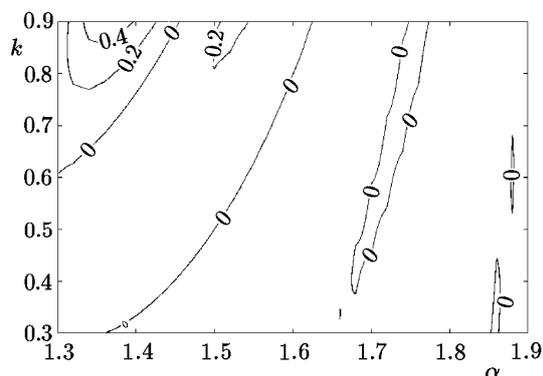
$$J_i = \sigma_i^{-1} \alpha_i k_i E_0^{1-\alpha_i + \alpha_i k_i}. \quad (14)$$

В случае значения  $k$ , отличного от единицы, зависимость функционала от  $\alpha$  существенно нелинейна, но увеличение количества опорных точек позволяет достичь хорошей точности одновременного восстановления обоих неизвестных параметров  $k$  и  $\alpha$  (см. рисунки 2 и 3).

Увеличение числа опорных решений дало возможность одновременного определения сразу двух параметров  $k$  и  $\alpha$  по следующему алгоритму. Выбирались пять (в одном случае) или три (в другом) опорные точки на плоскости  $\{\alpha, k\}$ . Задавались постоянными значения других параметров:  $\beta = 0.3$ ,  $\sigma = 1$ . Далее для двух значений  $y_0 = 5$  и  $y_0 = 7$  вычислялись опорные решения. Затем для значений  $\alpha$  из отрезка  $[1.3, 1.9]$  и  $k$  из отрезка  $[0.3, 0.9]$  с шагом 0.02 вычислялись точные значения функционала, которые использовались в системе двух уравнений с двумя неизвестными для нахождения восстановленных  $\alpha$  и  $k$  таких, чтобы вариационные значения функционалов для двух  $y_0 = 5$  и  $y_0 = 7$  совпадали с точными значениями функционала.

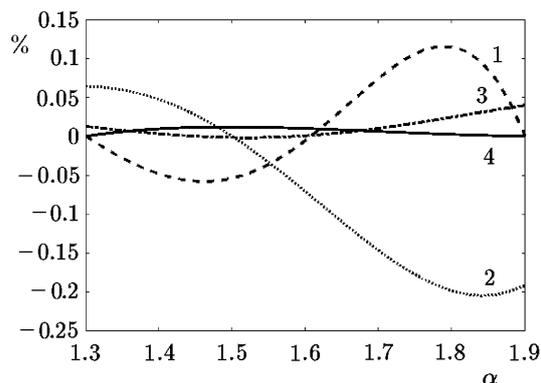


**Рис. 2.** Относительная погрешность в % восстановления параметра  $\alpha$  по тем же пяти точкам, что и на рис. 4

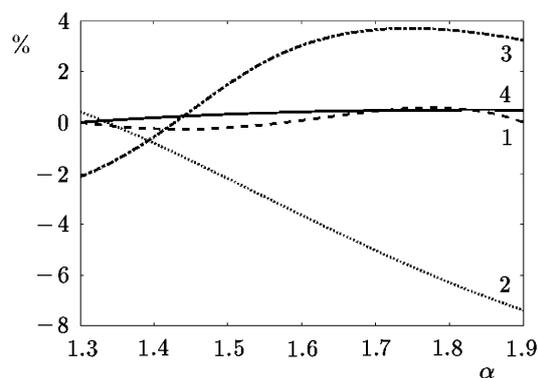


**Рис. 3.** Относительная погрешность восстановления параметра  $k$  по тем же пяти опорным точкам

На рисунках 4 и 5 приведены расчеты для вариантов с пятью и тремя опорными точками. На графиках приводится относительная погрешность восстановленного значения коэффициента  $k$  при разных значениях параметра  $\alpha$  и собственно разных значениях исходного  $k$ .



**Рис. 4.** Относительная погрешность в % восстановления коэффициента неупругости  $k$  при различных значениях параметра  $\alpha$  по пяти опорным точкам  $(\alpha, k) = (1.3, 0.3), (1.3, 0.9), (1.9, 0.3), (1.9, 0.9), (1.5, 0.5)$ . Восстанавливаемое значение  $k$ : 0.3 (линия 1); 0.5 (линия 2); 0.7 (линия 3); 0.9 (линия 4)



**Рис. 5.** Относительная погрешность в % восстановления коэффициента неупругости  $k$  при различных значениях параметра  $\alpha$  по трём опорным точкам  $(\alpha, k) = (1.3, 0.3), (1.3, 0.9), (1.9, 0.3)$ . Восстанавливаемое значение  $k$ : 0.3 (линия 1); 0.5 (линия 2); 0.7 (линия 3); 0.9 (линия 4)

Выше мы имели дело с вариациями одного и двух параметров. Рассмотрим теперь вариации трёх параметров  $\sigma$ ,  $\beta$  и  $\alpha$ , полагая коэффициент неупругости  $k$ , равным единице. В этом случае функционал  $J$  линейно зависит от параметра  $\alpha$ , в то время как оператор  $L$  и его матричные элементы нелинейны по этому параметру:

$$L_{ij} = \sigma_0 \exp[(1 - \beta)y] \times \\ [\alpha_j(\alpha_i - \beta) + \exp((\alpha - \beta)y_0)((\alpha - \alpha_i)(\alpha - \alpha_j) - \beta(\alpha - \alpha_i))] [\sigma_i \sigma_j (\alpha - \beta)]^{-1}.$$

Точное значение функционала, соответствующее “возмущённому” оператору  $L$ , определяется выражением

$$J = \alpha \frac{\exp[(1 + \beta)y_0]}{\sigma_0},$$

где (как и выше)  $y_0 = \ln(E_0/E_*)$ .

В случае одной опорной точки получим следующую оценку функционала:

$$J = \frac{J_1^2}{L_{11}} = \frac{J(\alpha - \beta)}{\alpha_1(\alpha_1 - \beta) + \exp((\alpha - \beta)y) [(\alpha_1 - \alpha)^2 - \beta(\alpha_1 - \alpha)]}.$$

Как и следовало ожидать, при  $\alpha = \alpha_1$  и произвольных значениях  $\sigma_0$  и  $\beta$  данное выражение совпадает с точным значением функционала. Теория возмущений в этом случае даёт приближённое значение

$$J = J_1 - (L_{11} - J_1) \approx \frac{\alpha}{\sigma_1} \left(2 - \frac{\sigma}{\sigma_1}\right) \exp(y).$$

При двух опорных точках имеем

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1^+}{C_2} = \frac{J_1 L_{22} - J_2 L_{12}}{J_2 L_{11} - J_1 L_{21}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\exp[(\alpha - \beta)y](\alpha_2 - \alpha - \beta)\alpha - \alpha_2\beta}{\exp[(\alpha - \beta)y](\alpha - \alpha_1 + \beta)\alpha - \alpha_1\beta}.$$

Воспользовавшись дробно-линейным представлением стационарного функционала (7), получим выражение

$$\mathcal{J} = \frac{\left(J_2 + \frac{C_1}{C_2} J_1\right)^2}{\frac{C_1^2}{C_2^2} L_{11} + \frac{C_1}{C_2} (L_{12} + L_{22}) + L_{22}} = \alpha \frac{\exp[(1 + \beta)y]}{\sigma_0},$$

совпадающее с точным значением функционала при произвольных вариациях  $\sigma_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Заметим, что в рассматриваемом случае  $J$  является функцией трёх переменных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\sigma_0$ , что для стандартных методов, например для интерполяции полиномами Эрмита, доставляет определённые неудобства.

## 7. Уравнение в частных производных

Если энергия заряженных частиц космических лучей меньше критической, её потери энергии перестают быть катастрофическими и представляют собой частую последовательность малых потерь на ионизацию, с точностью до статистических флуктуаций описываемую уравнением непрерывного замедления частиц — дифференциальным уравнением в частных производных по координате и энергии:

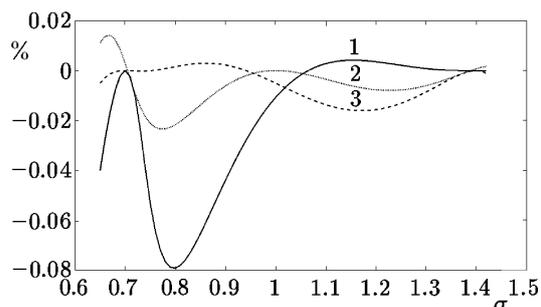
$$L\Phi(z, E) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial[\beta(z, E)\Phi(z, E)]}{\partial E} + \sigma(z, E)\Phi(z, E) = S(z, E),$$

где  $S$  — плотность источника, которую мы примем в виде  $S(z, E) = \delta(z)(E/E_0)^{-\gamma}$ .

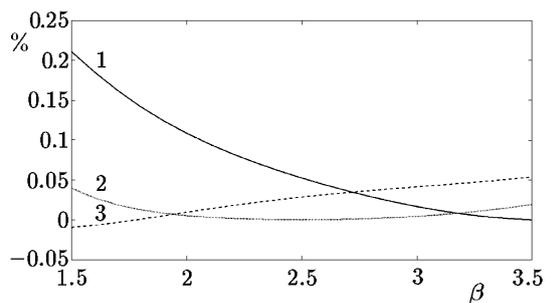
Если  $\sigma$  и  $\beta$  постоянны, выражения для опорных функционалов принимают простой вид

$$J_n = \exp(-\sigma z_n) \left( \frac{E_*}{E_0} + \frac{\beta_n z_0}{E_0} \right)^{-\gamma}.$$

Выбрав набор опорных значений  $(\sigma_n, \beta_n)$  и используя основные уравнения ВИ-метода (1) и (2), мы представили функционал  $\mathcal{J}$  как функцию двух переменных  $\sigma$  и  $\beta$ . На рисунках 6 и 7 показаны результаты одновременного восстановления двух параметров  $\sigma$  и  $\beta$  по пяти опорным решениям, соответствующим точкам  $(0.7, 1.5)$ ,  $(1.4, 1.5)$ ,  $(0.7, 3.5)$ ,  $(1.4, 3.5)$  и  $(1, 2.5)$  на плоскости  $\{\sigma, \beta\}$ . Хотя на графике представлены результаты при фиксированных начальных значениях  $\sigma$  или  $\beta$ , в расчёте обе величины полагались неизвестными.



**Рис. 6.** Относительная погрешность восстановления параметра  $\sigma$  при разных  $\beta$  по пяти опорным решениям:  $\beta = 1.5$  (линия 1),  $\beta = 2.5$  (линия 2),  $\beta = 3.5$  (линия 3)



**Рис. 7.** Относительная погрешность восстановления параметра  $\beta$  при разных  $\sigma$  по пяти опорным решениям:  $\sigma = 0.8$  (линия 1),  $\sigma = 1.0$  (линия 2),  $\sigma = 1.2$  (линия 3)

## 8. Заключение

В работе изложены результаты продолжающегося авторами исследования метода вариационного интерполирования функционалов от решений линейных уравнений применительно к решению обратных задач. Во введении приведены основные принципы решения обратных задач, во втором пункте дано краткое описание ВИ-метода, третий пункт содержит замечания о структуре уравнений переноса. В пункте 4 рассматривалось прохождение частиц через однородный поглощающий слой единичной толщины с коэффициентом ослабления  $\sigma = 1$ . Точное решение задачи:  $J = e^{-1} = 0.367879$ .

Первая задача состояла в определении этого единственного параметра  $\sigma$ . Вариационная интерполяция была выполнена на основе двух опорных решений для слоя той же толщины, но с параметрами  $\sigma = 0$  и  $1$ . Точный функционал при переходе от опорного значения  $\sigma = 0$  к  $\sigma = 1$  уменьшается почти в три раза (см. таблицу), хотя максимальная погрешность ВИ-метода всюду не превосходит десятой доли процента. Таков же порядок точности виден и при переходе от второй колонки таблицы ( $\mathcal{J}$ ) к первой ( $\sigma$ ), имитирующем решение обратной задачи.

Во второй задаче слой был переменной плотности и требовалось восстановить функциональную зависимость, заложенную в задачу в виде  $\Sigma(x) = \sigma_1(x - 3/2)^2$ ,  $0 < x < 1$ . Восстановление это было выполнено дважды: с использованием решений для трёх опорных *однородных* слоёв разной плотности ( $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2.25$ ,  $\sigma_3 = 1.65$ ) и для двух тоже однородных слоёв с параметрами  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2.25$ . Представленные на рис. 1 результаты показывают очень неплохое согласие восстановленной ВИ-методом функциональной характеристики слоя с его “настоящей” характеристикой (7). Отметим, что обе задачи описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянным коэффициентом в первом случае и переменным во втором.

Остальная часть работы связана с астрофизическими приложениями теории переноса, такими как прохождение космических лучей сверхвысоких энергий через атмосферу

Земли. Ввиду отсутствия завершённой теории адронных взаимодействий при высоких энергиях, в расчётах наблюдаемых характеристик космических лучей пользуются набором небольшого числа моделей таких взаимодействий, задаваемых как параметрически, так и функционально и уточняемых на основании измерений характеристик приходящих на поверхность Земли потоков космических лучей. Измерения эти ведутся многие десятилетия и в разных местах поверхности Земли (которую можно рассматривать как очень большой детектор) на уровне гор (Тянь-Шань) и ниже уровня моря (Баксанское ущелье), под водой (Байкал, Иссык-Куль) и подо льдом (IceCube в Антарктиде).

Пункт 5 демонстрирует применение ВИ-метода к неоднородному интегральному уравнению Вольтерра (8), описывающему энергетический спектр размножающихся частиц в максимуме каскада. При коэффициенте неупругости  $k = 1$  оказалось достаточным двух опорных точек, чтобы получить точное описание зависимости результатов от сечения и данного параметра. В отличие от задачи с экспоненциальным ослаблением потока в слое, в оператор  $L$  искомые параметры входят теперь нелинейно, что отражается на матричных элементах и, как следствие, на форме вариационного представления искомого функционала. Показано совместное восстановление двух параметров ( $\alpha$  и  $k$ ), нелинейно входящих в искомый функционал. Из проведённых расчётов видно, что уже при трёх опорных точках удаётся достичь точности в несколько процентов. Добавление же ещё двух опорных точек позволяет получить восстанавливаемые параметры с погрешностью менее 0.3% (см. рисунки 3 и 5). При этом значения функционала в рассматриваемой области изменяются более чем на два порядка. Параметрическое представление оператора  $L$  не привносит в алгоритмы решения обратных задач особой новизны, но использование в работе более точного описания поведения функционала, чем традиционные интерполяционные представления, позволяет получить лучшую точность при достаточно разреженной сетке опорных значений.

Рассмотренные выше примеры показывают, что применение метода вариационного интерполирования позволяет описать при помощи линейных коэффициентов чувствительности вариации функционалов, существенно выходящие за область их линейного изменения, в том случае, когда искомой величиной является линейный параметр оператора переноса  $L$ , задача его отыскания по известному значению функционала сводится к решению степенного уравнения. Отметим, что в сам функционал  $J$  искомый параметр при этом может входить нелинейным образом, например сечение  $\sigma$ . Расчёт же линейных коэффициентов чувствительности, как было отмечено выше, не требует создания дополнительных алгоритмов решения уравнения переноса и основывается на решении стандартного каскадного уравнения с возмущённым оператором  $L$ .

## Литература

1. **Tarantola A.** Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2005.
2. **Banks H.T., Bortz D.M.** Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems // J. Inverse and Ill-posed Problems. — 2005. — Vol. 13. — P. 103–121.
3. **Linde N., Renard P., Mukerji T., and Caers J.** Geological realism in hydrogeological and geophysical inverse modeling: a review // Advances in Water Resources. — 2015. — Vol. 86. — P. 86–101.
4. **Adelman H.M., Haftka R.T.** Sensitivity analysis of discrete structural systems // AIAA Journal. — 1986. — Vol. 24. — P. 823–832.

5. **Banks H.T., Dediu S., and Nguyen H.K.** Sensitivity of dynamical systems to parameters in a convex subset of a topological vector space // *Math. Biosci. and Engineering*. — 2007. — Vol. 4. — P. 403–430.
6. **Усачев Л.Н.** Уравнения для ценности нейтронов, кинетика реакторов и теория возмущений // *Реакторостроение и теория реакторов*. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — С. 251–268.
7. **Марчук Г.И., Орлов В.В.** К теории сопряжённых функций // *Нейтронная физика*. — М.: Госатомиздат, 1961. — С. 30–45.
8. **Льюинс Дж.** Ценность. Сопряжённая функция. — М.: Атомиздат, 1972. Перевод: Lewins J.D. *Importance; the Adjoint Function*. — Oxford: Pergamon, 1965.
9. **Стумбур Э.Ф.** Применение теории возмущений в физике ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1976.
10. **Марчук Г.И.** Методы расчёта ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1961.
11. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. — М.: Наука. Физматлит, 1977. Перевод: Marchuk G.I. *Methods of Numerical Mathematics*. — Springer Verlag, 1982.
12. **Marchuk G.I.** *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*. — Springer-Science+Business Media, B.V., 1995.
13. **Шихов С.Б., Шишков Л.К.** Теория возмущений высших порядков для решения некоторых задач расчёта реакторов // *Теория и физика реакторов / Л.Н. Юровой*. — М.: Атомиздат, 1967. — С. 3–29.
14. **Учайкин В.В.** Вариационный метод интерполирования ядерно-технических расчётов // *Атомная энергия*. — 1989. — Т. 67. — С. 54–55. Перевод: Uchaikin V.V. *Variational interpolation method in nuclear-engineering calculations // Soviet Atomic Energy*. — 1989. — Vol. 67, № 1. — P. 558–560.
15. **Учайкин В.В., Литвинов В.А.** Вариационный метод интерполирования в теории переноса излучений // *Оптика атмосферы*. — 1989. — Т. 2. — С. 36–40. Перевод: Uchaikin V.V., Litvinov V.A. *Variational interpolation method in radiative transfer theory // Atmosphere and Oceanics Optics*. — 1989. — Vol. 2, № 1. — P. 27–30.
16. **Литвинов В.А.** Вариационное интерполирование в проблеме чувствительности характеристик каскадных процессов // *Ядерная физика*. — 1993. — Т. 56, № 2. — С. 244–254.
17. **Учайкин В.В., Рыжов В.В.** Стохастическая теория переноса частиц высоких энергий. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
18. **Кольчужкин А.М., Учайкин В.В.** Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978.
19. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. Перевод: Abramowitz M. and Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions*. — Dover Publications, 1965.
20. **Лагутин А.А., Литвинов В.А., Учайкин В.В.** Теория чувствительности в физике космических лучей. — Барнаул: Изд-во АГУ, 1995.
21. **Учайкин В.В., Лагутин А.А.** Стохастическая ценность. — М.: Энергоатомиздат, 1993.
22. **Лагутин А.А., Учайкин В.В.** Метод сопряжённых уравнений в теории переноса космических лучей высоких энергий. — Барнаул: Изд-во АГУ, 2013.
23. **Uchaikin V.V., Litvinov V.A., Kozhemjakina E.V.** Nonlinear modifications of perturbation theory with applications to complex system analysis // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. — 2018. — Vol. 7, № 3. — P. 327–354.

*Поступила в редакцию 5 июля 2018 г.  
После исправления 20 декабря 2018 г.  
Принята к печати 7 мая 2019 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Tarantola A.** Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2005.
2. **Banks H.T., Bortz D.M.** Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems // *J. Inverse and Ill-posed Problems.* — 2005. — Vol. 13. — P. 103–121.
3. **Linde N., Renard P., Mukerji T., and Caers J.** Geological realism in hydrogeological and geophysical inverse modeling: a review // *Advances in Water Resources.* — 2015. — Vol. 86. — P. 86–101.
4. **Adelman H.M., Haftka R.T.** Sensitivity analysis of discrete structural systems // *AIAA Journal.* — 1986. — Vol. 24. — P. 823–832.
5. **Banks H.T., Dediu S., and Nguyen H.K.** Sensitivity of dynamical systems to parameters in a convex subset of a topological vector space // *Math. Biosci. and Engineering.* — 2007. — Vol. 4. — P. 403–430.
6. **Usachev L.N.** Uravneniya dlya cennosti neitronov, kinetika reaktorov i teoriya vozmuschenii // *Reaktorostroenie i teoriya reaktorov.* — M.: Izd-vo AN SSSR, 1955. — S. 251–268.
7. **Marchuk G.I., Orlov V.V.** K teorii sopryazhyonnykh funktsii // *Neitronnaya fizika.* — M.: Gosatomizdat, 1961. — S. 30–45.
8. **L'yuins Dzh.** Cennost'. Sopryazhyonnaya funktsiya. — M.: Atomizdat, 1972. Perevod: Lewins J.D. Importance; the Adjoint Function. — Oxford: Pergamon, 1965.
9. **Stumbur E.F.** Primenenie teorii vozmuschenii v fizike yadernykh reaktorov. — M.: Atomizdat, 1976.
10. **Marchuk G.I.** Metody raschyota yadernykh reaktorov. — M.: Gosatomizdat, 1961.
11. **Marchuk G.I.** Metody vychislitel'noi matematiki. — M.: Nauka. Fizmatlit, 1977. Perevod: Marchuk G.I. Methods of Numerical Mathematics. — Springer Verlag, 1982.
12. **Marchuk G.I.** Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. — Springer-Science+Business Media, B.V., 1995.
13. **Shihov S.B., Shishkov L.K.** Teoriya vozmuschenii vysshikh poruyadkov dlya resheniya nekotorykh zadach raschyota reaktorov // *Teoriya i fizika reaktorov / L.N. Yurovoi.* — M.: Atomizdat, 1967. — S. 3–29.
14. **Uchaikin V.V.** Variacionnyi metod interpolirovaniya yaderno-tekhnicheskikh raschyotov // *Atomnaya energiya.* — 1989. — T. 67. — S. 54–55. Perevod: Uchaikin V.V. Variational interpolation method in nuclear-engineering calculations // *Soviet Atomic Energy.* — 1989. — Vol. 67, № 1. — P. 558–560.
15. **Uchaikin V.V., Litvinov V.A.** Variacionnyi metod interpolirovaniya v teorii perenosa izlucheniya // *Optika atmosfery.* — 1989. — T. 2. — S. 36–40. Perevod: Uchaikin V.V., Litvinov V.A. Variational interpolation method in radiative transfer theory // *Atmosphere and Oceanics Optics.* — 1989. — Vol. 2, № 1. — P. 27–30.
16. **Litvinov V.A.** Variacionnoe interpolirovanie v probleme chuvstvitel'nosti harakteristik kaskadnykh processov // *Yadernaya fizika.* — 1993. — T. 56, № 2. — S. 244–254.
17. **Uchaikin V.V., Ryzhov V.V.** Stokhasticheskaya teoriya perenosa chastic vysokikh energii. — Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1988.
18. **Kolchuzhkin A.M., Uchaikin V.V.** Vvedenie v teoriyu prohozhdeniya chastic cherez veschestvo. — M.: Atomizdat, 1978.
19. **Abramovic M., Stigan I.** Spravochnik po special'nym funktsiyam. — M.: Nauka, 1979. Perevod: Abramowitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. — Dover Publications, 1965.

20. **Lagutin A.A., Litvinov V.A., Uchaikin V.V.** Teoriya chuvstvitel'nosti v fizike kosmicheskikh luchei. — Barnaul: Izd-vo AGU, 1995.
21. **Uchaikin V.V., Lagutin A.A.** Stohasticheskaya cennost'. — M.: Energoatomizdat, 1993.
22. **Lagutin A.A., Uchaikin V.V.** Metod sopryazhyonnyh uravnenii v teorii perenosa kosmicheskikh luchei vysokih energii. — Barnaul: Izd-vo AGU, 2013.
23. **Uchaikin V.V., Litvinov V.A., Kozhemyjakina E.V.** Nonlinear modifications of perturbation theory with applications to complex system analysis // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. — 2018. — Vol. 7, № 3. — P. 327–354.