

ДВУХВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

В. Г. Гасенко, В. Е. Накоряков, И. Р. Шрейбер

(Новосибирск)

При распространении звука в жидкости с пузырьками газа имеет место дисперсия скорости звука. Вид дисперсионной кривой широко известен [1]: для пузырьков одного размера имеются две дисперсионные ветви, разделенные областью непрозрачности. В работах [2—4] рассматривалось распространение акустических волн в приближении Бюргера — Кортвега — де-Вриза (БКВ). Это приближение отвечает лишь одной (левой) ветви дисперсионной кривой.

В данной работе предложена модель распространения возмущений, соответствующая обоим ветвям одновременно. Получено уравнение и найдены его нестационарные решения. Установлены области применения низкочастотной и высокочастотной аппроксимаций предложенного уравнения.

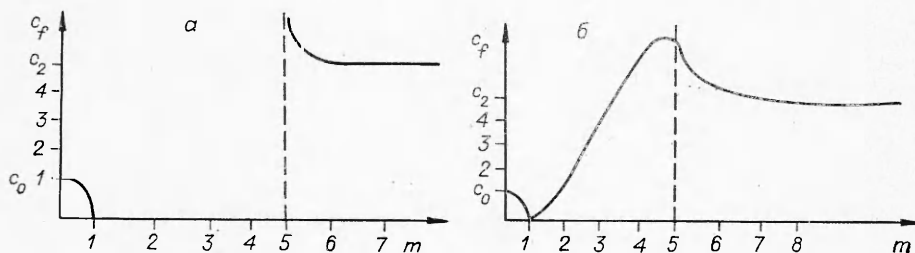
1. При изучении длинноволновых возмущений часто пренебрегают влиянием сжимаемости жидкости, или это влияние сводится к вкладу в диссипацию волны за счет акустического излучения при пульсациях пузырьков в волне [2—6]. Более полный учет сжимаемости жидкости приводит к появлению второй ветви в дисперсионной кривой $c_f = c_f(\omega)$, где $c_f = \omega/k$ — фазовая скорость; ω — частота наложенного возмущения; k — волновое число. Уравнение для дисперсионной кривой имеет вид

$$(1.1) \quad c_f^{-1} = \left(\frac{1}{c_{01}^2 (1 - m^2)} - \frac{m_1^2}{c_2^2 (1 - m_1^2)} \right)^{1/2},$$

$m_1 = \omega/\omega_0$; $\omega_0^2 = 3\gamma p_{02}/R_0^2 \rho_1$ — квадрат резонансной частоты пузырька; p_{02} — давление газа в пузырьке; ρ_1 — плотность жидкости; R_0 — начальный радиус пузырька; γ — показатель адиабаты; $c_{01}^2 = \gamma p_{02}/\rho_0 \Phi_0$ — квадрат низкочастотной аппроксимации скорости звука в жидкости с пузырьками газа; Φ_0 — начальное газосодержание; c_2 — скорость звука в жидкости. График кривой (1.1) показан на фиг. 1, а. Начальный участок левой части дисперсионной кривой отвечает уравнению Кортвега—де-Вриза [2—4]

$$\partial p / \partial t + c_{01} \partial p / \partial x - \beta c_{01} \partial^3 p / \partial x^3 = 0$$

(p — давление в смеси). Правая ветвь дисперсионной кривой соответству-



Ф и г. 1

ет уравнению Клейна—Гордона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{c_2^2}{2\beta} \delta p = -\frac{c_2^2 \omega_0^2}{c_{01}^2} \delta p.$$

Ниже рассматривается вывод уравнения, отвечающего обеим ветвям дисперсионной кривой (фиг. 1, а).

2. Обратимся к уравнениям гидродинамики гомогенной пузырьковой суспензии

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

или эквивалентному системе (2.1), (2.2) одному уравнению

$$(2.3) \quad \partial^2 \rho / \partial t^2 = \partial^2 p / \partial x^2$$

(ρ — плотность смеси, u — возмущение скорости в смеси). Полагаем, что основная нелинейность в рассматриваемой задаче вносится уравнением состояния, которое получается из уравнения для пульсаций одиночного пузырька и элементарных соотношений гомогенной модели [1,4]. В случае пренебрежения диссипацией, включая и диссипацию за счет акустического излучения, появляющуюся при учете сжимаемости, имеем следующее уравнение состояния:

$$(2.4) \quad \delta p = c^2 \delta \rho + \frac{c^2}{\omega_1^2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right).$$

Учет сжимаемости в уравнении состояния (2.4) проведен только при переходе в уравнении Рэлея от R к ρ . В уравнении (2.4) c^2 — квадрат скорости звука, построенный по текущим характеристикам волны:

$$c^{-2} = \rho \phi / \gamma p + (1 - \phi) / c_2^2, \quad \text{при } \phi < 10^{-2} \quad c^{-2} \approx \rho \phi / \gamma p.$$

При небольших амплитудах начального возмущения c^2 можно представить через начальные параметры среды и текущую амплитуду волны

$$(2.5) \quad c^2 = c_{01}^2 + \frac{-2\phi_0 + (\gamma + 1)(1 - c^2/c_2^2)}{\rho_1 \phi_0} c_{01}^2 \delta \rho.$$

Соотношение параметров $c^2/\omega_1^2 = R^2/3\phi(1 - \phi)$ слабо зависит от амплитуды волны и в дальнейшем будет положено равным постоянному значению

$$(2.6) \quad c^2/\omega_1^2 = R_0^2/3\phi_0(1 - \phi_0) = 2\beta,$$

где β — параметр дисперсии в уравнении БКВ [2—4]. Уравнение (2.4) с учетом (2.5), (2.6) может быть записано в виде

$$(2.7) \quad \delta p = c_{01}^2 \delta \rho + 2c_{01}^2 \frac{\Delta p}{p_0} \delta \rho + 2\beta \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right).$$

Дифференцируя дважды соотношение (2.7) по времени и используя уравнение гидродинамики смеси в форме (2.3), получим одно уравнение относительно возмущения давления

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{01}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2 \frac{d^2}{dx^2} c_{01}^2 \frac{(\Delta p)^2}{p_0} = -\frac{2\beta}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right).$$

Замена в нелинейности произведена по соотношению $\delta p = c_{01}^2 \delta \rho$, справедливому в первом приближении. Нелинейность $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\Delta p^2}{p_0} \right) = c_{01}^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{(\Delta p)^2}{p_0} \right)$.

Линеаризованному уравнению (2.8) отвечает дисперсионное соотношение (1.4). Уравнение (2.8) для низких частот $\omega < \omega_0$ переходит в уравнение Буссинеска

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2c_{01}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(\Delta p)^2}{p_0} \right) - 2\beta \frac{\partial^4 p}{\partial t^2 \partial x^2} = 0.$$

Это уравнение содержит в качестве решений волны, идущие вправо и влево, что позволяет на основе этого уравнения рассматривать задачи, связанные с отражением волны. Для волн, идущих в одну сторону, это уравнение переходит в уравнение Кортвега—де-Вриза

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_{01} \frac{\partial p}{\partial x} + c_2 \frac{\Delta p}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \beta c_{01} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = 0.$$

Для частот $\omega \geq \omega_0 c_{01}/c_2$ уравнение (2.8) переходит в нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{c_2^2}{2\beta} (\delta p - 2(\delta p)^2).$$

Распространение волн в жидкости с пузырьками газа в приближении линейного уравнения Клейна — Гордона изучалось в работе [7]. Линеаризованное уравнение (2.9) отвечает правой ветви дисперсионной кривой. В общем случае полученное уравнение (2.8) отвечает обеим ветвям дисперсионной кривой (см. фиг. 1, а) и содержит две характерные скорости звука c_{01} и c_2 . В дальнейшем это уравнение будем называть двухволновым нелинейным уравнением (ДНУ).

Учет диссипации и нелинейности колебаний одиночной полости приводит к более полному уравнению состояния

$$(2.10) \quad \delta p = c^2 \delta \rho + 2\mu_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + 2\beta \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) + 2k_1 (\rho^2/c_{01} \partial \rho / \partial t - \rho^2/c_2^2 \partial \rho / \partial t).$$

где μ_1 — коэффициент диссипации смеси, обусловленный вязкими, акустическими и тепловыми потерями; $k_1 = (1/6)R_0^2/\varphi_0$ — коэффициент высшей нелинейности.

Уравнение состояния (2.10) приводит к более полному двухволновому уравнению, описывающему более точно экспериментальные результаты,

$$(2.11) \quad p_{tt} - c_{01}^2 p_{xx} - 2c_{01}^2 \left(\frac{\Delta p^2}{p} \right)_{xx} = -\frac{2\beta}{c_2^2} \frac{d^2}{dt^2} (p_{tt} - c_2^2 p_{xx}) - \frac{2\mu_1}{c_2^2} \frac{d}{dt} (p_{tt} - c_2^2 p_{xx}) - \frac{2k_1}{c_2^2} \frac{d^2}{dt^2} (\rho_0^2) \left(\frac{dp}{dt} \right)^2.$$

3. Остановимся подробнее на низкочастотной и высокочастотной аппроксимациях уравнения (2.11). Рассмотрим левую ветвь дисперсионной кривой, описывающую дорезонансные частоты, и в первом приближении по $(\Delta p/p_0) \approx \epsilon$ на ней справедливо волновое уравнение

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{01}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = o(\epsilon^2).$$

Уравнение (2.11) в этом случае переходит в уравнение Навье — Стокса — Буссинеска

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{01}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(\Delta p)^2}{p_0} \right) = - \frac{2\beta}{c_2^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{d^2 p}{dx^2} - \\ - \frac{2\mu_1}{c_2^2} \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} - \frac{2k_1}{c_2^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \rho_0^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2.$$

Переход к волне, бегущей в одну сторону, осуществляется следующим образом. Волновой оператор (3.1) представляется в виде

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{01}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + c_{01} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Для определенности выбираем волну, бегущую вправо (характеристика $x - c_0 t = \xi$). В этой волне справедливо соотношение

$$(3.4) \quad \partial/\partial x = -1/c_{01} \cdot \partial/\partial t + o(\varepsilon^2).$$

Используя соотношения (3.3), (3.4), уравнение (3.2) интегрируем один раз по времени и получим уравнение БКВ

$$(3.5) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} + c_{01} \frac{\Delta p}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta c_0 \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \\ + k_1 c_{01} \rho_0^2 \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Последний член в (3.5) можно приближенно записать в виде

$$k_1 c_{01} \rho_0^2 \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \approx k_1 c_{01} \rho_0^2 \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_2^2} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Этот нелинейный член может отвечать за усиление волн и «заострение» волновых структур. Такого рода нелинейность учитывалась при изучении стационарных волн в пузырьковой смеси в работе [8]. На правой ветви, где $\omega > \omega_0 c_{01}/c_2$, справедливо в первом приближении

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = o(\varepsilon^2)$$

и уравнение (2.11) переходит в нелинейное уравнение Клейна — Гордона с диссипацией

$$2\beta \left(\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + \left(1 - \frac{c_{01}^2}{c_1^2} \right) \delta p = \frac{2c_2}{c_{01}^2} \delta p^2 + 2\mu_1 (c_2^2 - c_{01}^2)/c_2^2 c_{01}^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \\ - 2k_1 \rho_0^2 (c_2^2 - c_{01}^2)/c_2^2 c_{01}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2.$$

Дисперсионная кривая, отвечающая линеаризованному уравнению (2.11), показана на фиг. 1, б. Наличие диссипации в системе «замыкает» «окно непрозрачности». Отметим, что учет распределения по размерам R_0 в начальный момент времени в смеси также приводит к непрерывности дисперсионной кривой и появлению в системе затухания. Это явление обсуждалось в работах [3, 6, 9],

4. Численное моделирование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа проводилось на основе уравнения (2.8). Уравнение (2.8) с помощью замены

$$\tau = c_{01} t / \sqrt{\beta}, \quad \xi = x / \sqrt{\beta}, \quad u = 2\Delta p / p_0, \quad V = c_2 / c_{01}$$

можно привести к безразмерной форме

$$(4.1) \quad u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} - (1/2)(u^2)_{\xi\xi} - V^{-2}(u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi})_{\tau\tau} = 0.$$

В уравнение (4.1) входит только один параметр V , поэтому характер решений (4.1) существенно зависит от вида начального возмущения.

В общем случае уравнение (4.1) описывает волны, распространяющиеся в обе стороны. Для выделения волн, распространяющихся только в одну сторону, решалась краевая задача: начальные условия выбирались нулевыми, а граничное условие на левом конце интервала интегрирования $[0, L]$ задавалось в виде

$$(4.2) \quad u(0, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ u_0 \exp[-(\tau/\tau_0)^2], & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Это соответствует появлению финитного сигнала с предельно крутым передним фронтом. Для выявления характера решений уравнения (4.1) от параметров V , u_0 , τ_0 решались также предельные случаи уравнения (4.1), соответствующие:

а) низкочастотной ветви

$$(4.3) \quad u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} - (1/2)(u)_{\xi\xi}^2 - u_{\xi\xi\tau\tau} = 0;$$

б) высокочастотной ветви

$$(4.4) \quad V^2 u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} + u(1 - V^{-2}) - 2V^{-2}u^2 = 0.$$

Отметим, что в газожидкостных смесях для газосодержаний $\varphi \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ параметр $V^2 = 10 - 10^2$. Поэтому нелинейностью в (4.4) можно пренебречь и пользоваться на высокочастотной ветви линейным уравнением Клейна — Гордона

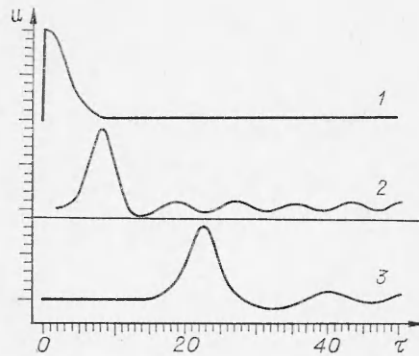
$$(4.5) \quad V^2 u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} + u = 0.$$

Случай «а». Поскольку уравнение (4.3) для волн, распространяющихся в одну сторону, приводится к уравнению Кортевега — де-Вриза, следует ожидать, что характер решения этих уравнений будет зависеть от амплитуды u_0 и длительности τ_0 начального сигнала, т. е. определяется параметром подобия $\sigma \approx \tau_0 \sqrt{u_0}$ [10, 11] нелинейных процессов с дисперсией. При $\sigma > \sigma_1$, где σ_1 — некое критическое значение, в решении будут преобладать солитоны, а при $\sigma < \sigma_1$ — образуется волновой пакет.

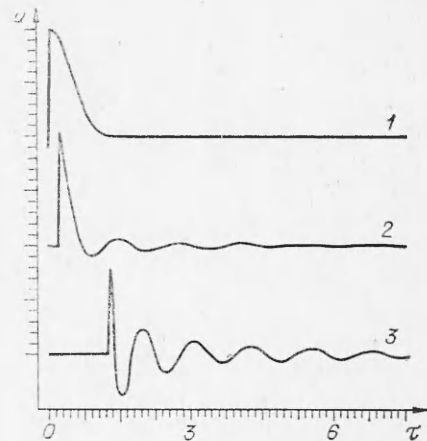
Решение уравнения (4.3) получено с помощью численного интегрирования по трехслойной явно- неявной разностной схеме второго порядка точности по $\Delta\tau$ и $\Delta\xi$ и в полной мере подтверждает этот вывод. На фиг. 2 показана эволюция сигнала (4.2) (1 — $\xi = 0$; 2 — $\xi = 7,5$; 3 — $\xi = 25$) при $\sigma = 5,6$, $u_0 = \sqrt{2}$, $\tau_0 = 4$. Можно видеть, что в этом случае образуется один солитон. Величина σ_1 как верхней по σ границе односолитонных решений лежит в интервале $11,2 > \sigma_1 > 5,6$, что примерно совпадает с σ для уравнения КДВ, для которого эта $\sigma_1 \approx 8$ [10]. Необходимо отметить, что крутизна переднего фронта начального сигнала никак не влияет на результат.

Таким образом, эволюция сигнала на левой ветви практически повторяет известную картину исследований на основе КДВ. Характер распространения волн может быть предсказан для любых σ или u_0 и τ_0 .

Случай «б». Эволюция сигнала, отвечающего правой ветви дисперсионной кривой, изучалась на основе уравнения (4.5). Это уравнение линейно, и решение его не зависит от u_0 , а зависит только от длительности сигнала τ_0 . Сравнение характера решений уравнений (4.1), (4.3), (4.5) имеет смысл только при одинаковой величине τ_0 , а не σ , так как σ — это параметр подобия нелинейного процесса. Решение уравнения (4.5) при $V = 5$ нахо-



Фиг. 2

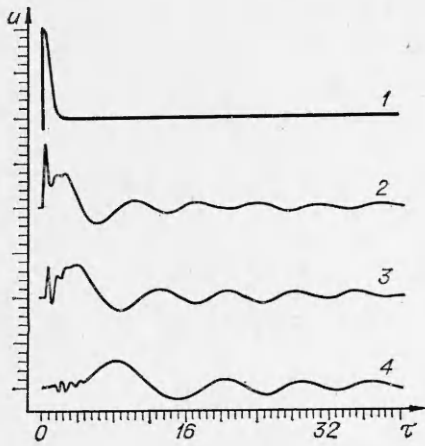


Фиг. 3

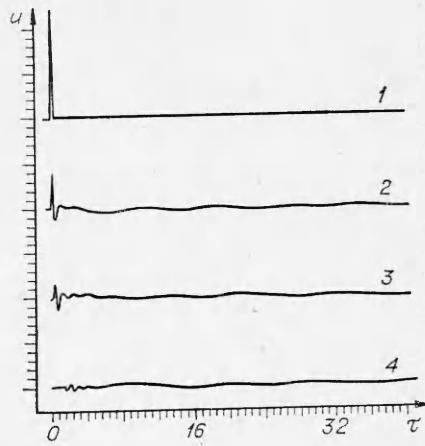
дилось с помощью численного интегрирования по трехслойной явной разностной схеме порядка точности $o(\Delta\tau^2, \Delta\xi^2)$. На фиг. 3 показана эволюция сигнала (4.2) при $\tau_0 = 1$. Кривые 1—3 соответствуют временной эволюции сигнала (4.2) в точках $\xi = 0; 1; 2,5$. Можно видеть, что решения уравнений (4.3), (4.5) качественно отличаются друг от друга: уравнение (4.5) не трансформирует низкочастотную часть спектра начального сигнала, и поэтому все сигналы с крутым передним фронтом, но различными длительностями эволюционируют качественно одинаково. Напомним, что в случае «а» крутизна фронта никак не влияла на эволюцию сигнала, в то время как различная длительность начального импульса приводит к совершенно различным картинам эволюции сигнала: волновым пакетам, либо к солитонам [10, 12].

Общий случай «в». Численное интегрирование непосредственно уравнения (4.2), проведенное по пятислойной неявной разностной схеме порядка точности $o(\Delta\tau, \Delta\xi^2)$, показало, что характер решения этого уравнения не определяется однозначно только одной величиной σ либо только τ_0 . Для достаточно большой величины, в частности $V = 5$, эволюция сигнала вида (4.2) с крутым передним фронтом при любых σ и τ_0 имеет следующую картину: впереди основного сигнала (основным сигналом здесь называем часть начального возмущения, распространяющуюся со скоростью звука в смеси, в данном случае она равна единице) выделяется предвестник, движущийся со скоростью звука в жидкости. В рассматриваемом случае эта скорость равна 5. Качественно структура этого предвестника совпадает с решением уравнения (4.5). Эволюция же основной, низкочастотной составляющей сигнала определяется так же, как и для уравнения (4.3), величиной параметра σ . При $\sigma < \sigma_1$ (величина σ_1 здесь имеет практически те же значения, что и для уравнения (4.3), т. е. $\sigma_1 \approx 8$) основной сигнал представляет собой волновой пакет, а при $\sigma > \sigma_1$ — солитоны.

Динамика выделения предвестника для случая $u_0 = \sqrt{2}$, $\tau_0 = 1$, ($\sigma = 1, 4 < \sigma_1$) показана на фиг. 4, где кривые 1—4 соответствуют временной развертке сигнала вида (4.2) в точках $\xi = 0; 1; 2,5; 7,5$. Отметим, что наблюдаемое затухание предвестника здесь связано только с численной вязкостью, проявляющейся на правой ветви, обусловленной появлением в конечно-разностном аналоге уравнения (4.1) аппроксимационного члена $\sim \Delta\tau_{\tau\tau\tau}$, присущего выбранной разностной схеме. Фактически рассматриваемый волновой процесс отвечает дисперсионной кривой, показан-



Фиг. 4



Фиг. 5

ной на фиг. 1, б, учитывающей диссипацию, имеющую место в реальном процессе распространения волны. Дальнейшее сокращение величины σ за счет длительности сигнала приводит к уменьшению амплитуды волнового пакета основного сигнала, так что при величине $\tau_0 \sim 1/V(\omega = \omega c_2/c_{01})$ амплитудой волнового пакета основного сигнала можно пренебречь, и в этом случае эволюция возмущения с большой степенью точности описывается уравнением (4.5). Критическое значение σ^* , начиная с которого сигнал ведет себя по уравнению (4.5), определяется конкретной величиной начальной амплитуды u_0 и для умеренных амплитуд в рамках развиваемого приближения ($u_0 = 1-10$) $\sigma^* \ll \sigma_1$. Эволюция сигнала вида (4.2) для уравнения (4.1) (при $u_0 = \sqrt{2}$, $\tau_0 = 0,05$, $\sigma = 0,07$), соответствующего этому случаю, приведена на фиг. 5, где кривые 1—4 соответствуют временной развертке сигнала в точках $\xi = 0; 1; 2,5; 7,5$. Все приведенные графики дают распределение сигнала по времени в фиксированных значениях ξ , что соответствует условиям физического эксперимента (в определенном месте устанавливается датчик давления, записывающий во времени сигнал). Частота предвестника равна $\omega = \omega_0 c_2/c_{01}$, а частота основного сигнала $\omega \leq \omega_0$. Отметим, что такое разделение на основной сигнал и предвестник по указанному выше способу возможно только по временной развертке. Разделение по длинам волн в x -представлении невозможно. Волны, отвечающие высокочастотной ветви, также удовлетворяют требованиям длинноволновости (в рамках этих требований и записаны исходные уравнения). Длина волн всех осцилляций по-прежнему превосходит расстояние между пузырьками и естественно много больше размеров пузырьков. Для всех волн справедливо приближение гомогенности среды.

5. Рассмотрим результаты численного интегрирования уравнений (4.1)—(4.5) и опишем эволюцию возмущений в жидкости с пузырьками газа, следующую из двухволновой модели. Полученное двухволновое уравнение хорошо описывает эволюцию возмущений с любой крутизной начального сигнала и протяженностью по τ_0 . Для финитных сигналов протяженностью и крутизной нарастания больше $1/V$ результаты расчетов по ДНУ (4.1) и уравнения Буссинеска (4.3) практически совпадают. Для финитных сигналов протяженностью $\tau_0 \sim 1/V$ расчеты по ДНУ совпадают с результатами интегрирования уравнения Клейна — Гордона (4.5). Чаще всего в экспериментах реализуются возмущения, крутизна нарастания τ_0 передних фронтов которых много меньше единицы, а про-

тяженность этих импульсов значительно превосходит единицу. В этом случае правильную картину эволюции сигнала дает только ДНУ. На фиг. 4 представлены результаты расчета ДНУ, отвечающие именно такому случаю. Основная часть импульса эволюционирует по законам низкочастотного звука: в данном случае трансформируется в волновой пакет, период колебаний которого порядка 1 и скорость $c_{01} = 1$, а высокочастотная часть импульса выделяется в предвестник — знакопеременный пучок волн, движущийся со скоростью $c_2 = 5$, а период колебаний этого пучка $\tau V = 1$.

В настоящий момент имеются в основном экспериментальные результаты по изучению динамики возмущений в жидкости с пузырьками газа, отвечающие условиям левой ветви дисперсионной кривой [12, 13]. Однако имеющиеся экспериментальные результаты по распространению возмущений с крутыми передними фронтами, выполненные в ИТФ СО АН СССР [13], позволяют сказать о качественном соответствии общей картины, следующей из двухволновой модели частоты образующегося предвестника в эксперименте, с частотой, следующей по расчетам. Имеющийся предвестник движется со скоростью c_2 и имеет частоту $\omega = \omega_0 c_2 / c_{01}$, построенную по параметрам смеси, исследуемой в эксперименте [13].

Впервые экспериментально предвестник в пузырьковой смеси обнаружен в работе [6] при исследовании ударных волн, инициируемых взрывом. В работе [7] представлены также результаты исследования ударных волн с крутыми фронтами различной протяженности. Содержащаяся в этой работе попытка описать все эти эксперименты на основе приближения Клейна — Гордона представляется неоправданной. Большая часть этих экспериментов может быть описана только на основе ДНУ.

Поступила 2 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. — Сб. пер. Механика, 1968, № 3.
2. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 5.
3. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа. — В кн.: Реология суспензий. М., «Мир», 1975.
4. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Волны конечной амплитуды в двухфазных системах. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных средах. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.
5. Нигматуллин Р. И., Ивандаев А. И., Губайдуллин А. А. Численное моделирование нестационарных волновых процессов в двухфазных дисперсных средах. — В кн.: Труды III Всесоюзного семинара по моделям механики сплошной среды. Новосибирск, 1976.
6. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. — ПМТФ, 1968, № 4.
7. Малых Н. В., Огородников И. А. О применении уравнения Клейна — Гордона для описания структуры импульсов сжатия в жидкости с пузырьками газа. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 29. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики. СО АН СССР, 1977.
8. Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа. — ПМТФ, 1976, № 6.
9. Рютов Д. Д. Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа. — «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 22, вып. 9.
10. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
11. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Приближение Бюргерса — Кортевега — де-Вриза в волновой динамике газожидкостных систем. — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.

12. Kuznetsov V. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. R. Propagation of perturbations in a gas liquid mixture. — «J. Fluid mech.», 1978, vol. 85.
13. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р., Кузнецов В. В., Малых Н. В. Экспериментальное исследование ударных волн в жидкости с пузырьками газа. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОИЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УПРОЧНЕНИЕМ

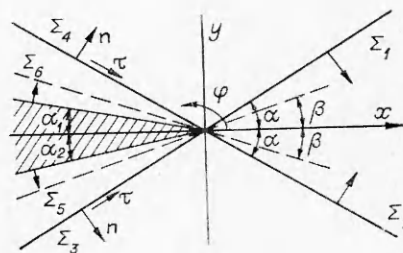
В. А. Баскаков

(Воронеж)

Изучаются закономерности и характер деформирования упругопластического материала после прохождения в нем ударных волн, вызванных довольно интенсивными источниками возмущений. На достаточно далеком расстоянии от источников фронты волн в окрестности точки их взаимодействия можно считать плоскими. Модель среды предполагает учет механизмов упрочнения [1]: кинематического и изотропного. С использованием аппарата теории разрывов [2] и методики [3—5] строятся сначала упругое, а затем упругопластическое автомодельные решения задачи. Основная трудность при этом состоит в отыскании заранее неизвестных линий раздела областей упругого и пластического деформирования материала, на которых ставятся граничные условия для решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений в диссипативных областях. Изучается вопрос о влиянии параметра упрочнения на качественную сторону взаимодействия волн. Основные соотношения исследуются при помощи ЭЦВМ; получены конкретные числовые результаты. Представленные решения являются естественным развитием работ [5—7].

Пусть в недеформированную упругопластическую среду под углом $0 < 2\alpha < \pi$ (фиг. 1) распространяются со скоростью G две плоские ударные волны в виде ступеньки Σ_1 и Σ_2 . В рамках теории малых упругопластических деформаций предполагается, что общая деформация e_{ij} складывается из упругой e_{ij}^e и пластической e_{ij}^p частей и выражается через перемещения u_i формулами Коши ($i, j = 1, 2, 3$). Оси x_1, x_2, x_3 ортогональны, все искомые величины считаются не зависящими от x_3 . Решение задачи ищется в подвижной системе координат ($x = x_1 - St, y = x_2$), связанной с точкой взаимодействия волн ($S = G(\sin \alpha)^{-1}, t$ — время). В дальнейшем появляющиеся упругие и нейтральные области назовем бездиссипативными в отличие от пластических, в которых происходит диссипация энергии. В бездиссипативных областях изменения напряжений и деформаций определяются упругими зависимостями, в то время как в пластических областях следует привлекать условие пластичности и ассоциированный закон пластического течения.

В процессе взаимодействия волн может оказаться, что бездиссипативная область заполняет все пространство за исходными волнами. В системе координат x, y поле напряжений, скоростей и деформаций будет тогда стационарным за фронтами этих волн, и решение можно считать автомодельным, т. е. можно положить, что компоненты тензора напряжений σ_{ij} , деформации



Фиг. 1