УДК 517.956.4+517.958:531.3-1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИСТЕЧЕНИЯ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ ГОРЯЧЕГО ГАЗА В ПОКОЯЩИЙСЯ ГАЗ С БОЛЕЕ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

С. Н. Антонцев, Х. И. Диас*

Университет Лиссабона, 1649-003 Лиссабон, Португалия
* Университет Комплутенс, 28040 Мадрид, Испания
E-mails: anton@ptmat.fc.ul.pt, diaz.racefyn@insde.es

Исследуется приближение пограничного слоя классической математической модели, описывающей истечение ламинарной струи горячего газа в покоящийся газ с более низкой температурой. Доказано существование и единственность решений невырожденной задачи в областях, не содержащих застойных зон. Исследовано асимптотическое поведение этих решений.

Ключевые слова: нелинейные вырождающиеся уравнения параболического типа, диффузия, горячие газовые струи, асимптотическое поведение решения.

Введение. Рассматривается математическая модель, описывающая истечение ламинарной струи горячего газа в покоящийся газ, имеющий более низкую температуру. Эта задача является классической в теории динамики сжимаемой жидкости и важна для исследования явлений, связанных с горением. Рассматривается приближение пограничного слоя (при котором можно пренебречь влиянием давления). При использовании приближения пограничного слоя моделирование плоских струй в безразмерных переменных сводится к нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных (см. [1–7])

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial (r^i \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^i \rho v)}{\partial r} = 0, \\
r^i \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + r^i \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^i \mu \frac{\partial u}{\partial r}\Big) + G\Big(1 - \frac{\varepsilon}{T}\Big), \qquad (1) \\
r^i \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + r^i \rho v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\Pr} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^i \mu \frac{\partial T}{\partial r}\Big),
\end{gathered}
$$

где $\Pr$ — число Прандтля; G — величина, обратная квадрату числа Фруда (заданные положительные числа); $i = 0$ в случае плоской конфигурации, $i = 1$ в случае осесимметричной струи. Система замыкается уравнениями состояния $\rho = 1/T$, $\mu = T^\sigma$ $(0 < \sigma < \infty)$. Неизвестными величинами в задаче являются компоненты вектора скорости v, u и температура T.

Работа выполнена в рамках исследовательских проектов POCI/MAT/61576/2004, FCT (Португалия) и SAB-2005-0017 (Испания).

Система (1) рассматривается в области $\Omega = \{(x,r) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < \infty,\, 0 < r < l \leqslant \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial r} = v = \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \qquad r = 0, \quad x > 0, \\ u = \delta, \quad T = \varepsilon, \qquad r = l, \quad x > 0 \end{gathered} \tag{2}$$

и “начальным” условием

$$u(0,r) = u_0(r) \geqslant \delta, \qquad T(0,r) = T_0(r) \geqslant \varepsilon, \qquad x = 0, \quad r \in [0,l]. \tag{3}$$

Следует отметить, что несмотря на стационарный характер задачи, эта система является системой параболического типа и условие (3) можно интерпретировать как начальное условие, если рассматривать переменную x в качестве фиктивного времени. В [7] задача (1)–(3) рассмотрена для случая

$$T \to \varepsilon, \quad u \to \delta \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Там же изучены автомодельные решения и проведено их численное моделирование.

В данной работе доказывается существование и единственность решений невырожденной задачи (в предположении $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что означает отсутствие застойных зон). Также исследуется асимптотическое поведение решений по x и l.

Для доказательства существования и единственности решений используются так называемые переменные Мизеса x, ψ (ψ — “функция тока”), в которых система уравнений (1) после исключения неизвестной v преобразуется в чисто диффузионную систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big(r^{2i} T^{\sigma-1} u \,\frac{\partial u}{\partial \psi}\Big) + \frac{TG}{ur^i}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{T}\Big), \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\Big(r^{i} T^{\sigma-1} u \,\frac{\partial T}{\partial \psi}\Big).$$

Отметим, что системы такого типа возникают в различных областях, например в биологии, при изучении явлений фильтрации.

1. Преобразование к переменным Мизеса x, ψ. Введем функцию тока $\psi(x,r)$ с помощью формул

$$\psi_r = r^i \rho u, \qquad \psi_x = -r^i \rho v,$$

а также новые независимые переменные (переменные Мизеса)

$$(X = x,\ \psi = \psi(x,r)) \leftrightarrow (x,r), \qquad \frac{D(X,\psi)}{D(x,r)} = \psi_r = r^i \rho u > 0, \tag{4}$$

определяющие гомеоморфизм $(x,r) \leftrightarrow (X = x,\ \psi = \psi(x,r))$. В дальнейшем для упрощения записи сохраним обозначение $X = x$. Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} - r^i \rho v \,\frac{\partial}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial r} = r^i \rho u \,\frac{\partial}{\partial \psi}$$

и исключая неизвестную v, преобразуем систему (1) в систему уравнений для неизвестных u, T

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big(r^{2i} a(u,T)\,\frac{\partial u}{\partial \psi}\Big) + r^{-i} c(u,T), \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big(r^{2i} b(u,T)\,\frac{\partial T}{\partial \psi}\Big), \tag{5}$$

где

$$a = T^{\sigma-1} u, \qquad c = \frac{G}{u}\,T\Big(1 - \frac{\varepsilon}{T}\Big), \qquad b = \frac{a}{\mathrm{Pr}}. \tag{6}$$

Здесь $r = r(x, \psi)$ определяется с помощью нелокального оператора:

$$r^{i+1}(x, \psi) = (i+1) \int\limits_0^{\psi} \frac{T(x, s)}{u(x, s)}\, ds.$$

Как сказано выше, системы, аналогичные (5), возникают также в других областях, например в биологии, при изучении явлений фильтрации (см., например, [8–11]).

Отметим, что при $\sigma = 1$, $i = 0$, $G = 0$ система (5) распадается на два независимых параболических уравнения. В этом случае первое уравнение совпадает с известным "уравнением пористой среды" для функции u (см., например, [12–17]). Второе уравнение можно рассматривать как "обобщенное уравнение пористой среды" для функции T при заданной функции u.

2. Существование и единственность решений невырожденных задач $(0 < \varepsilon \leqslant 1,\ 0 < \delta \leqslant 1)$**.** В плоском случае ($i = 0$) рассмотрим две различные задачи для системы (5).

Задача 1. При заданном $0 < l < \infty$ найти решение (u, T) системы (5) в области $\Omega = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < \infty,\ 0 < \psi < l < \infty\}$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \qquad \text{при} \quad \psi = 0, \quad x > 0,$$
$$u = \delta, \qquad T = \varepsilon \qquad \text{при} \quad \psi = l, \quad x > 0$$

и "начальными" условиями

$$u = u_0(\psi), \quad T = T_0(\psi) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant l. \tag{7}$$

Система (5) является системой параболического типа, поэтому условие (7) можно интерпретировать как начальное условие, если переменная x рассматривается в качестве фиктивного времени. В (7) $u_0(\psi) = u_0(r(0, \psi))$; $T_0(\psi) = T_0(r(0, \psi))$; функция $r(0, \psi)$ задается следующим образом:

$$r(0, \psi) = \int\limits_0^{\psi} \frac{T_0(s)}{u_0(s)}\, ds.$$

Предполагается, что

$$u_0(l) = \delta, \quad T_0(l) = \varepsilon, \quad 0 < \delta \leqslant u_0(\psi) \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant T_0(\psi) \leqslant 1. \tag{8}$$

Задача 2. Найти решение (u, T) системы (5) в области $\Omega = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < \infty,$ $0 < \psi < f(x) = \psi(x, l)\}$ при $r(x, f(x)) = l = \text{const}$ с граничными и "начальными" условиями

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \qquad \text{при} \quad \psi = 0, \quad x > 0, \\ u = \delta, \qquad T = \varepsilon \qquad \text{при} \quad \psi = \psi(x, l) = f(x), \quad x > 0, \\ u = u_0(\psi), \qquad T = T_0(\psi) \qquad \text{при} \quad x = 0, \quad 0 \leqslant \psi < l. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\psi(x, l) = f(x)$ — неизвестная функция, определяемая уравнением

$$r(x, \psi) = l, \qquad 0 < l < \infty$$

с заданной положительной постоянной l. Отметим, что при $l = \infty$ задачи 1 и 2 совпадают.

2.1. *Существование и единственность решений задачи* 1. Докажем следующий "принцип максимума" для задач 1, 2. Предположим, что $G = 0$. Тогда

$$\delta \leqslant u(x,\psi) \leqslant 1, \qquad \varepsilon \leqslant T(x,\psi) \leqslant 1. \tag{10}$$

Кроме того, если $G > 0$, то при $x \in [0, X]$

$$\delta \leqslant u(x,\psi) \leqslant \inf_{\lambda>0} [\max(\mathrm{e}^{\lambda X}\sqrt{G}/\sqrt{\lambda}, 1)] = C_0(X), \qquad \varepsilon \leqslant T(x,\psi) \leqslant 1. \tag{11}$$

При выполнении условий (8), (9) это утверждение следует из классического принципа максимума (см., например, [18, гл. 1]). Из оценок (10), (11) вытекают неравенства

$$0 < a_0(\varepsilon,\delta) \leqslant a = b\,\mathrm{Pr} \leqslant a_1(\varepsilon,\delta) < \infty, \qquad 0 \leqslant c \leqslant c_0(\varepsilon,\delta) < \infty. \tag{12}$$

Теорема 2.1. *Пусть функции* $(u_0, T_0) \in C^\alpha[0,l]$, $0 < \alpha < 1$ *и выполнены условия* (8) *при* $0 < \varepsilon$, $0 < \delta$. *Тогда при любом заданном значении* $0 < X < \infty$ *задача* 1 *имеет, по крайней мере, одно классическое решение* $(u,T) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}) \cap C^{2m+\alpha,m+\alpha/2}(\Omega')$ $(\Omega = (0,X)\times(0,l)$, $\Omega' = \Omega \cap (x > 0)$, $m \geqslant 1)$. *Более того, решение является единственным, если* $(u_\psi, T_\psi) \in L^4(0,X; L^{2q}(0,l))$ *при* $q > 1$.

Доказательство. В соответствии с (12) при $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ система (5) является равномерно параболической системой с регулярными ограниченными коэффициентами. Поэтому существование решения следует из известных результатов (см., например, [18, гл. 5]).

Единственность решения доказывается обычным путем. Пусть $\boldsymbol{w}_i = (u_i, T_i)$ $(i = 1,2)$ — два различных решения и

$$\boldsymbol{w} = (u,T) = (u_1 - u_2, T_1 - T_2).$$

Тогда легко заметить, что u, T удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big(A\,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \psi} + B\boldsymbol{w}\Big) + C\boldsymbol{w}, \tag{13}$$

где A, B, C — матрицы:

$$A = \{A_{ij}\}, \qquad A_{11} = a_{11}, \qquad A_{22} = b_{11}, \qquad A_{12} = A_{21} = 0,$$

$$B = \{B_{ij}\}, \qquad B_{11} = \frac{a_{11} - a_{21}}{u_1 - u_2}\,u_{2\psi}, \qquad B_{12} = \frac{a_{21} - a_{22}}{T_1 - T_2}\,u_{2\psi},$$

$$B_{21} = \frac{b_{11} - b_{21}}{u_1 - u_2}\,T_{2\psi}, \qquad B_{22} = \frac{b_{21} - b_{22}}{T_1 - T_2}\,T_{2\psi},$$

$$C = \{C_{ij}\}, \qquad C_{11} = \frac{c_{11} - c_{21}}{u_1 - u_2}, \qquad C_{12} = \frac{c_{21} - c_{22}}{T_1 - T_2}, \qquad C_{21} = C_{22} = 0,$$

$$a_{ij} = a(u_i, T_j), \qquad b_{ij} = b(u_i, T_j), \qquad c_{ij} = c(u_i, T_j).$$

Нетрудно проверить, что

$$0 < a_0(\varepsilon,\delta) \leqslant A_{11}, \qquad A_{22} \leqslant b_0(\varepsilon,\delta),$$

$$|B| \leqslant K|\boldsymbol{w}_{2\psi}|, \qquad |C_i| \leqslant K, \qquad K = \max(|a_{\boldsymbol{w}}|, |b_{\boldsymbol{w}}|, |c_{\boldsymbol{w}}|).$$

Умножая (13) на $\boldsymbol{w}$ и интегрируя по $(0,x)\times(0,l)$, получаем неравенство

$$\int_0^l |\boldsymbol{w}(x,s)|^2\,ds + \int_0^x\int_0^l |\boldsymbol{w}_\psi|^2\,ds\,dt \leqslant CI, \qquad x > 0, \tag{14}$$

где

$$I = \int_0^x \int_0^l |\boldsymbol{w}(x,s)|^2 |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^2 \, ds \, dt, \qquad C = C(K)$$

и

$$I \leqslant \int_0^x \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}(x,s)|^{2q/(q-1)} \, ds \Big)^{(q-1)/q} \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^{2q} \, ds \Big)^{1/q} dt, \qquad 1 < q < \infty.$$

Введем функцию

$$Y(x) = \int_0^l |\boldsymbol{w}(x,s)|^2 \, ds$$

и используем следующие неравенства:

$$|\boldsymbol{w}(x,s)|^2 \leqslant 4Y^{1/2}(x) \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_\psi|^2 \, ds \Big)^{1/2},$$

$$\Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}(x,s)|^{2q/(q-1)} \, ds \Big)^{(q-1)/q} \leqslant 4l^{(q-1)/q} Y^{1/2}(x) \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_\psi|^2 \, ds \Big)^{1/2},$$

$$I \leqslant \int_0^x 4l^{(q-1)/q} Y^{1/2}(x) \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_\psi|^2 \, ds \Big)^{1/2} \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^{2q} \, ds \Big)^{1/q} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(K)}{2} \int_0^x \int_0^l |\boldsymbol{w}_\psi|^{2q} \, ds \, dt + C(K,l,q) \int_0^x Y(t) \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^{2q} \, ds \Big)^{2/q} dt.$$

С учетом (14) и последних неравенств получаем интегральное неравенство

$$Y(x) \leqslant C \int_0^x Y(s) \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^{2q} \, dt \Big)^{2/q} ds,$$

которое имеет только тривиальное решение, если

$$\int_0^x \Big(\int_0^l |\boldsymbol{w}_{2\psi}|^{2q} \, dt \Big)^{2/q} ds \leqslant C < \infty, \qquad q > 1. \tag{15}$$

Это означает, что любое решение, удовлетворяющее неравенству (15), является единственным.

Замечание 1. Построенное решение $\boldsymbol{w} = (u(x,\psi), T(x,\psi))$ определяет гомеоморфизм между областью в плоскости физических переменных $\Omega_{X,r} = \{(x,\psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < X, 0 < r < r(x,l)\}$ и областью $\Omega_{X,l} = \{(x,\psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < X, 0 < \psi < l\}$ с якобианом

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{D(X,\psi)}{D(x,r)} = \psi_r = \rho u = \frac{T}{u} \leqslant \frac{1}{\delta} < \infty.$$

Это решение определяет также форму линии тока $r = r(x,l) = g(x)$ $(g'(x) = v(x,l)/u(x,l))$ в физической области. Вторая компонента вектора скорости $v(x,\psi)$ задается формулой

$$v(x,\psi) = u(x,\psi)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\psi \frac{ds}{\rho(x,s)u(x,s)}. \tag{16}$$

Согласно (4), (10), (11) классическое решение $\boldsymbol{w} = (u(x,\psi), T(x,\psi))$ определяет классическое решение $(v(x,r), u(x,r), T(x,r))$ системы (1), удовлетворяющее условиям (2).

Замечание 2. Аналогично можно доказать существование решений в осесимметричном случае ($i = 1$), но при этом возникает ряд технических трудностей.

Исследуем асимптотическое поведение решений задачи 1 по переменной x. Введем энергетические функции

$$\eta_l(x) = \int\limits_0^l (u(x,\psi)-\delta)^2\,d\psi, \qquad \mu_l(x) = \int\limits_0^l (T(x,\psi)-\varepsilon)^2\,d\psi$$

и положительные числа (см. (6)):

$$\lambda = a_0/(2l^2\,\mathrm{Pr}), \qquad \nu = a_0/(2l^2) \quad (\nu = \lambda\,\mathrm{Pr}).$$

Сначала рассмотрим случай $0 < l < \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\boldsymbol{w} = (u,T)$ *— решение задачи* 1 *и* $0 < l < \infty$. *Если* $G = 0$, *то*

$$\eta_l(x) = \int\limits_0^l (u(x,\psi)-\delta)^2\,d\psi \leqslant \eta(0)\,\mathrm{e}^{-\nu x}; \tag{17}$$

$$\mu_l(x) = \int\limits_0^l (T(x,\psi)-\varepsilon)^2\,d\psi \leqslant \mu(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}. \tag{18}$$

Если $G > 0$ *и* $\lambda > \nu$ *(последнее неравенство соответствует* $\mathrm{Pr} < 1$*), то* (17) *нужно заменить на неравенство*

$$\eta_l(x) = \int\limits_0^l (u(x,\psi)-\delta)^2\,d\psi \leqslant 2\eta(0)\Big(1 + \frac{4G^2\,\mathrm{e}^2}{\delta^2\varepsilon^2}\Big)\,\mathrm{e}^{-\nu x}. \tag{19}$$

Доказательство. Умножая первое уравнение системы (5) на $u-\delta$, второе уравнение — на $T-\varepsilon$ и интегрируя их по ψ в интервале $(0,l)$, получаем следующие энергетические соотношения:

$$\frac{d\eta_l(x)}{2dx} + \int\limits_0^l a u_\psi^2\,d\psi = \int\limits_0^l \frac{G}{uT}\,(T-\varepsilon)(u-\delta)\,d\psi; \tag{20}$$

$$\frac{d\mu_l(x)}{2dx} + \int\limits_0^l \frac{a}{\mathrm{Pr}}\,T_\psi^2\,d\psi = 0. \tag{21}$$

Предположим, что $G = 0$. Тогда, используя неравенства

$$\eta_l(x) \leqslant 4l^2 \int\limits_0^l u_\psi^2\,d\psi, \qquad \mu_l(x) \leqslant 4l^2 \int\limits_0^l T_\psi^2\,d\psi, \tag{22}$$

получаем дифференциальные неравенства

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l \leqslant 0, \qquad \frac{d\mu_l}{dx} + \lambda\mu_l \leqslant 0 \qquad \Big(\nu = \frac{a_0}{2l^2}, \quad \lambda = \frac{\nu}{\mathrm{Pr}}\Big).$$

Интегрируя эти неравенства, имеем оценки (17), (18).

Теперь предположим, что $G > 0$. С учетом (18) из (20) следует

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l \leqslant \gamma\sqrt{\eta_l}\,\sqrt{\mu_l} \leqslant \gamma\sqrt{\eta_l}\,\sqrt{\mu_l(0)}\,\mathrm{e}^{-\lambda x/2} = \omega\sqrt{\eta}\,\mathrm{e}^{-\lambda x/2}, \tag{23}$$

где $\gamma = 2G/(\delta\varepsilon)$; $\omega = \gamma\sqrt{\mu_l(0)}$. Интегрируя (23) при $\lambda > \nu$, получаем неравенство

$$2\sqrt{\mu_l(x)\,\mathrm{e}^{\nu x}} - 2\sqrt{\mu_l(0)} \leqslant \omega \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-(\lambda-\nu)s/2}\,ds \leqslant \omega\,\frac{2\,\mathrm{e}}{\lambda-\nu} = 2\beta < \infty,$$

из которого и следует оценка (19). Теорема доказана.

Замечание 3. В теореме 2.2

$$\lambda = a_0/(2l^2\,\mathrm{Pr}) \to 0, \qquad \nu = a_0/(2l^2) \to 0 \qquad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Получим некоторые оценки, не зависящие от l, сделав дополнительное предположение, что $G = 0$, начальные функции u_0, T_0 определены при $\psi \in [0,\infty]$ и

$$\int\limits_0^\infty |u_0 - \delta|\,d\psi \leqslant C_u < \infty, \qquad \int\limits_0^\infty |T_0 - \varepsilon|\,d\psi \leqslant C_T < \infty. \tag{24}$$

Далее используем известные оценки (см., например, [2, 19, 20])

$$\int\limits_0^l |u - \delta|\,d\psi \leqslant \int\limits_0^l |u_0 - \delta|\,d\psi \leqslant C_u, \qquad \int\limits_0^l |T - \varepsilon|\,d\psi \leqslant \int\limits_0^l |T_0 - \varepsilon|\,d\psi \leqslant C_T \tag{25}$$

для решений системы (5) при $i = G = 0$. Из (24), (25) с учетом (10) следует

$$\eta_\infty(x) = \int\limits_0^\infty |u_0 - \delta|^2\,d\psi \leqslant C_u < \infty, \qquad \mu_\infty(x) = \int\limits_0^\infty |T_0 - \varepsilon|^2\,d\psi \leqslant C_T < \infty.$$

Теорема 2.3. *Пусть $\boldsymbol{w} = (u,T)$ — решение задачи* 1 *с начальными данными* (24) *и $G = 0$. Тогда*

$$\eta_l(x) = \int\limits_0^l (u-\delta)^2\,d\psi \leqslant \frac{\eta_\infty(0)}{\sqrt{1 + 2x\nu\eta_\infty^2(0)}}, \qquad \nu = \frac{8a_0}{9C_u^4}; \tag{26}$$

$$\mu_l(x) = \int\limits_0^l (T-\varepsilon)^2\,d\psi \leqslant \frac{\mu_\infty(0)}{\sqrt{1 + 2x\lambda\mu_\infty^2(0)}}, \qquad \lambda = \frac{8a_0}{9C_T^4\,\mathrm{Pr}}. \tag{27}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы вновь используем энергетические соотношения (20), (21) при $G = 0$, но в данном случае вместо (22) применим интерполяционное неравенство

$$\eta_l^3(x) = \Big(\int\limits_0^l (u-\delta)^2\,d\psi\Big)^3 \leqslant \Big(\frac{3}{2}\Big)^2 \Big(\int\limits_0^l |u-\delta|\,d\psi\Big)^4 \int\limits_0^l |u_\psi|^2\,d\psi.$$

Тогда из (20), (25) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l^3 \leqslant 0, \qquad \nu = \frac{8a_0}{9C_u^4}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\eta_l(x) = \int\limits_0^l (u-\delta)^2\,d\psi \leqslant \frac{\eta(0)}{\sqrt{1+2x\nu\eta^2(0)}} \leqslant \frac{\eta_\infty(0)}{\sqrt{1+2x\nu\eta_\infty^2(0)}}.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, завершаем доказательство оценки (26). Доказательство оценки (27) идентично. Теорема доказана.

Замечание 4. Предположим, что $G = 0$ и $\boldsymbol{w}$ — решение задачи 1. Тогда

$$\int\limits_0^\infty |\boldsymbol{w}(x,\psi) - \boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon}|^4\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \psi \to \infty, \tag{28}$$

где $\boldsymbol{w} = (u,T)$; $\boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon} = (\delta,\varepsilon)$. Из (20), (21) следует, что

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\infty} \int\limits_0^\infty |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon}|^2\,d\psi + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |\boldsymbol{w}_\psi|^2\,d\psi\,dx \leqslant C_0(\varepsilon,\delta)\int\limits_0^\infty |\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon}|^2\,d\psi.$$

Используя мультипликативное неравенство

$$\int\limits_0^\infty |\boldsymbol{w}(x,\psi) - \boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon}|^4\,dx \leqslant 4\Big(\sup_{0\leqslant x\leqslant\infty}\int\limits_\psi^\infty |\boldsymbol{w}(x,\psi) - \boldsymbol{w}_{\delta,\varepsilon}|^2\,d\psi\Big)\int\limits_0^\infty\int\limits_\psi^\infty |\boldsymbol{w}_\psi|^2\,d\psi\,dx$$

и теорему Лебега, получаем (28).

2.2. *Существование и единственность локальных решений задачи* 2. Введем новые переменные $x = x$, $\eta = \psi/f(x)$. Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{D(x,\eta)}{D(x,\psi)} = \frac{1}{f(x)},$$

приводим задачу 2 к задаче

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f(x)}\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{1}{f^2(x)}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(a\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big) + c, \\ &\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f(x)}\frac{\partial T}{\partial\eta} = \frac{1}{f^2(x)}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(a\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big); \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\partial T}{\partial\eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad x > 0, \qquad u = \delta, \quad T = \varepsilon, \quad \eta = 1, \quad X > 0, \\ u = u_0(\eta f(0)), \quad T = T_0(\eta f(0)) \qquad \text{при} \quad x = 0, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1 \end{gathered} \tag{30}$$

в полуполосе $\Omega = \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < \infty,\ 0 < \eta < 1\}$. Здесь

$$f(0) = \int\limits_0^l \frac{u_0(s)}{T_0(s)}\,ds > 0$$

является заданной константой, а неизвестная функция $f(x)$ определяется с помощью нелокального оператора по u, T и их производных по η выражением

$$
\begin{gathered}
f(x)f'(x) = \Xi(u, T, u_\eta, T_\eta),\\
\Xi =: \Big(T^{\sigma-1}u_\eta - \frac{uT^{\sigma-2}T_\eta}{\Pr}\Big)\Big|_{\eta=1} + \frac{u(x,1)}{T(x,1)} \int\limits_0^1 \Big(- T^{\sigma-1}T_\eta u_\eta\Big(\frac{1}{u} + \frac{1}{\Pr}\Big) + \frac{2}{u^2}\, T^{\sigma-1}u_\eta^2\Big)\, ds.
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Для доказательства теоремы существования в дополнение к (10), (11) применим некоторые априорные оценки решения. Используя определение функции тока, получаем

$$
\begin{gathered}
\psi(x,r) = \int\limits_0^r \rho(x,r)u(x,r)\, dr,\\
\frac{l}{C_0} \leqslant l \min{(\rho u)} \leqslant \psi(x,l) = f(x) \leqslant l \max{(\rho u)} \leqslant C_0 l.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Умножая первое уравнение системы (29) на $f(x)(u-\delta)$, второе уравнение — на $f(x)(T-\varepsilon)$ и интегрируя их по η и x, получаем соотношения

$$
f(x) \int\limits_0^1 (u(x,\eta) - \delta)^2\, d\eta + 2 \int\limits_0^x \int\limits_0^1 \frac{a}{f(x)} \Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)^2\, d\eta\, dx = f(x) \int\limits_0^1 (u_0(\eta f(0)) - \delta)^2\, d\eta + \int\limits_0^x f I_c\, dx,
$$

$$
f(x) \int\limits_0^1 (T(x,\eta) - \varepsilon)^2\, d\eta + 2 \int\limits_0^x \int\limits_0^1 \frac{a}{f(x)\Pr} \Big(\frac{\partial T}{\partial \eta}\Big)^2\, d\eta\, dx = f(x) \int\limits_0^1 (T_0(\eta f(0)) - \varepsilon)^2\, d\eta,
$$

где

$$
I_c = \int\limits_0^1 \frac{G}{uT}\, (u-\delta)(T-\varepsilon)\, d\eta.
$$

С учетом (10), (11), (32) из этих соотношений следует оценка

$$
\int\limits_0^x \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2\, d\eta\, dx \leqslant C(l, \varepsilon, \delta).
$$

Умножив первое уравнение системы (29) на $u_{\eta\eta}$, второе уравнение — на $T_{\eta\eta}$, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^1 u_\eta^2\, d\eta + \frac{1}{f^2(x)} \int\limits_0^1 a u_{\eta\eta}^2\, d\eta = I + I_1 + \Lambda_1,\\
\frac{1}{2}\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^1 T_\eta^2\, d\eta + \frac{1}{f^2(x)\Pr} \int\limits_0^1 a T_{\eta\eta}^2\, d\eta = I_2 + \Lambda_2,
\end{gathered}
\tag{33}
$$

где

$$
I = \int\limits_0^1 c u_{\eta\eta}\, d\eta, \qquad I_1 = -\frac{f'(x)}{f(x)} \int\limits_0^1 \eta u_\eta u_{\eta\eta}\, d\eta,
$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{f^2(x)} \int\limits_0^1 (a_u u_\eta^2 + a_T u_\eta T_\eta) T_{\eta\eta} \, d\eta,$$

$$I_2 = -\frac{f'(x)}{f(x)} \int\limits_0^1 \eta T_\eta T_{\eta\eta} \, d\eta, \qquad \Lambda_2 = \frac{1}{f^2(x) \, \mathrm{Pr}} \int\limits_0^1 (a_T T_\eta^2 + a_u u_\eta T_\eta) u_{\eta\eta} \, d\eta.$$

Легко проверить, что

$$|I| \leqslant \epsilon \int\limits_0^1 u_{\eta\eta}^2 \, d\eta + C \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}|^2 \, d\eta,$$

$$(|\Lambda_1|, |\Lambda_2|) \leqslant C \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}| \, d\eta \leqslant \epsilon \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta + C \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^4 \, d\eta, \quad \epsilon \in (0,1) \tag{34}$$

при некотором $C = C(\epsilon, \varepsilon, \delta, l)$. Используя (31), получаем оценки

$$(|I_1|, |I_2|) \leqslant \epsilon \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta + C f'^2(x) \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 \, d\eta, \qquad \epsilon \in (0,1),$$

где

$$f'^2(x) \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 d\eta \leqslant C \Big[|\boldsymbol{w}_\eta(x,1)|^2 + \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^4 \, d\eta \Big] \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 \, d\eta.$$

Введя функцию

$$Y(x) = \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 \, d\eta$$

и используя мультипликативные неравенства

$$|\boldsymbol{w}_\eta(x,\eta)|^2 \leqslant 2 Y^{1/2}(x) \Big(\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta \Big)^{1/2}, \qquad \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}|^2 \, d\eta \leqslant 4 Y(x), \tag{35}$$

$$\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^4 \, d\eta \leqslant 2 Y^{31/2}(x) \Big(\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta \Big)^{1/2},$$

имеем

$$f'^2(x) \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 \, d\eta \leqslant \epsilon \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta + C Y^5. \tag{36}$$

С учетом (33)–(36) и выбирая подходящее значение $\epsilon > 0$, получаем неравенство

$$\frac{dY}{dx} + \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta \leqslant C Y^5.$$

Отсюда следует

$$Y(x) \leqslant \Big(\frac{Y^4(0)}{1 - xCY^4(0)}\Big)^{1/4} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant X_0 < X^* = \frac{1}{CY^4(0)} \tag{37}$$

и

$$Y(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_{\eta\eta}|^2 \, d\eta \, dx \leqslant C(Y(0), X_0) \qquad \text{при} \quad x \leqslant X_0 < X^*. \tag{38}$$

Последняя оценка справедлива для любого значения X^*, если $Y(0) = \int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta(0, \eta)|^2 \, d\eta$ удовлетворяет неравенству $X^* C Y^4(0) < 1$. Оценка (38) обеспечивает большую гладкость решения. Действительно, используя (31), (35), получаем

$$|f'(x)|^4 \leqslant C\big(|\boldsymbol{w}_\eta(x, 1)|^4 + Y^4\big) \leqslant C\Big(Y \int\limits_0^1 \boldsymbol{w}_{\eta\eta}^2 \, d\eta + Y^4\Big) \in L^1(0, X_0).$$

Следовательно,

$$\|f'(x)\|_{L^4(0, X_0)} \leqslant C(l, \delta, \varepsilon, X_0). \tag{39}$$

Рассмотрим уравнения системы (29) как независимые с заданными коэффициентами $f'(x)$, $f(x)$, a, b и применим теорию параболических уравнений [18].

Для доказательства теоремы существования решения построим вполне непрерывный оператор, поскольку далее используется теорема Шаудера о неподвижной точке.

Используя (31), определим однопараметрическое семейство операторов

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_\eta) = \frac{1}{2}\, \lambda \Xi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_\eta | x) \Big/ \Big(2\lambda \int\limits_0^1 \Xi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_\eta | s) \, ds + f^2(0)\Big), \qquad \lambda \in [0, 1].$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x} - \eta g'(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\, \mathrm{e}^{2g(x)}\, a \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big), \\ \frac{\partial T}{\partial x} - \eta g'(x) \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\, \mathrm{e}^{2g(x)}\, b \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big); \end{gathered} \tag{40}$$

$$g'(x) = \Phi_\lambda(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_\eta), \qquad g(0) = \ln f(0) \tag{41}$$

с граничными и начальными условиями (30). Отметим, что при $\lambda = 0$ эта задача рассмотрена в подп. 2.1. Полученные выше априорные оценки остаются справедливыми для любого $\lambda \in [0, 1]$. С учетом (32), (39) определим семейство функций $\varphi \in M$, таких что

$$\varphi(0) = g(0), \qquad \ln{(l/C_0)} \leqslant \varphi(x) \leqslant \ln lC_0, \qquad \varphi' \in L^2.$$

Пусть $\varphi \in M$ — произвольная заданная функция. Подставим φ в (40) вместо g. Тогда соответствующая задача имеет, по крайней мере, одно решение $\boldsymbol{w} = (u, T)$, которое определяет нелинейный оператор $\boldsymbol{\Pi}_\lambda$: $\varphi \to \boldsymbol{w}$. Далее, используя (41), можно определить оператор

$$F_\lambda\colon \varphi \to g = \int\limits_0^x \Phi_\lambda(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_\eta) \, ds + g(0).$$

Согласно приведенным выше априорным оценкам и теории параболических уравнений оператор F_λ является вполне непрерывным и удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Поэтому уравнение $\varphi = F_\lambda(\varphi)$ имеет, по крайней мере, одно решение, которое определяет функции $\boldsymbol{w} = (u, T)$. Таким образом, доказана

Теорема 2.4. *Пусть функции $(u_0, T_0) \in C^{2+\alpha}[0,1]$ $(0 < \alpha < 1)$ удовлетворяют соответствующим условиям совместности. Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение $\boldsymbol{w} = (u(x,\eta), T(x,\eta))$ на интервале $x \in [0, X_0] \subset [0, X^*)$, где величина $X^* = X^*(Y(0)) > 0$ определена в (37). Более того, решение существует для любого конечного значения X_0 при условии, что $Y(0) = \int\limits_0^1 (u_{0\eta}'^2 + T_{0\eta}'^2)\, d\eta$ достаточно мало.*

Докажем единственность классических решений.

Теорема 2.5. *Классическое решение задачи 2 является единственным.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w}_i = (u_i, T_i)$ $(i = 1, 2)$ — два различных классических решения и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2$. Тогда векторная функция $\boldsymbol{w}$ является решением задачи

$$\boldsymbol{w}_x = A\boldsymbol{w}_{\eta\eta} + B\boldsymbol{w}_\eta + C\boldsymbol{w} + D\boldsymbol{w}_\eta(x,1) + \int\limits_0^1 E\boldsymbol{w}_\eta\, d\eta; \tag{42}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad x > 0, \qquad \boldsymbol{w} = 0, \quad \eta = 1, \quad x > 0,$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \qquad x = 0, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

с ограниченными матрицами

$$|A, B, C, D, E| \leqslant C < \infty \tag{43}$$

и положительной матрицей A

$$a_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant (A\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2. \tag{44}$$

Умножая уравнение (42) на $\boldsymbol{w}_{\eta\eta}$ и проводя интегрирование, получаем интегральное соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2\, d\eta + \int\limits_0^1 (A\boldsymbol{w}_{\eta\eta}, \boldsymbol{w}_{\eta\eta})\, d\eta = I, \tag{45}$$

где

$$I = -\int\limits_0^1 \Big(B\boldsymbol{w}_\eta + C\boldsymbol{w} + D\boldsymbol{w}_\eta(x,1) + \int\limits_0^1 E\boldsymbol{w}_\eta\, d\eta\Big)\boldsymbol{w}_{\eta\eta}\, d\eta.$$

С учетом (35), (43), (44) величину I можно оценить следующим образом:

$$|I| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (A\boldsymbol{w}_{\eta\eta}, \boldsymbol{w}_{\eta\eta})\, d\eta + C\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 d\eta.$$

С учетом (45) и последней оценки получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 d\eta \leqslant C\int\limits_0^1 |\boldsymbol{w}_\eta|^2 d\eta,$$

которое завершает доказательство теоремы.

Замечание 5. Построенное решение определяет гомеоморфизм между областью $\Omega_{x,r} = \{(x,\psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < X^*,\ 0 < r < l\}$ в физических переменных и областью $\Omega_{X,\psi} = \{(x,\psi) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < X^*,\ 0 < \psi < f(x,l)\}$. Это классическое решение $\boldsymbol{w} = (u,T)$ определяет классическое решение $(v(x,r), u(x,r), T(x,r))$ системы (1), удовлетворяющее условиям (2) (см. замечание 1). Вторая компонента вектора скорости v определяется формулой (16).

Авторы выражают благодарность А. Линьяну за поддержку данной работы и полезные обсуждения физических аспектов обсуждаемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere // Book of abstr. Intern. conf. "Differential equations and related topics". M.: Moscow State Univ., 2007. P. 19–20.
2. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere // Revista Real Acad. Cien. Exact. Ser. Appl. Math. 2007. V. 101, N 1. P. 119–124.
3. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** On thermal and stagnation interfaces generated by the discharge of a laminar hot gas in a stagnant colder atmosphere // J. Interface Free Boundar. (В печати.)
4. **Pai S.** Fluid dynamics of jets. Toronto; N. Y.; L.: D. Van Nostrand Comp., Inc., 1954.
5. **Pai S.** Two-dimensional jet mixing of a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. 1949. V. 16. P. 463–469.
6. **Pai S.** Axially symmetrical jet mixing of a compressible fluid // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. P. 141–148.
7. **Sánchez-Sanz M., Sánchez A., Liñán A.** Front solutions in high-temperature laminar gas jets // J. Fluid Mech. 2006. V. 547. P. 257–266.
8. **Chen L., Jüngel A.** Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion // J. Different. Equat. 2006. V. 224, N 1. P. 39–59.
9. **Chen L., Jüngel A.** Analysis of a parabolic cross-diffusion semiconductor model with electron-hole scattering // Comm. Partial. Different. Equat. 2007. V. 32, N 1/3. P. 127–148.
10. **Hill A.** Double-diffusive convection in a porous medium with a concentration based internal heat source // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2005. V. 461, N 2054. P. 561–574.
11. **Shepherd R., Wiltshire R. J.** An analytical approach to coupled heat and moisture transport in soil // Transport Porous Media. 1995. V. 20, N 3. P. 281–304.
12. **Antontsev S. N.** Energy methods for free boundary problems: Applications to non-linear PDEs and fluid mechanics. Progress in nonlinear differential equations and their applications. V. 48 / S. N. Antontsev, J. I. Díaz, S. Shmarev. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 2002.
13. **Баренблатт Г. И., Вишик М. И.** О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости или газа // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. С. 411–417.
14. **Vazquez J.** An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation // Shape optimization and free boundaries (Montreal, 1990), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. V. 380. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 347–389.
15. **Vazquez J.** Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations. Equations of porous medium type. Lecture series in mathematics and its applications. V. 33. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006.
16. **Vazquez J.** The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press: Oxford Univ. Press, 2007.

17. **Zeldovič Y. B., Kompaneec A. S.** On the theory of propagation of heat with the heat conductivity depending upon the temperature // Collection in honor of the 70th birthday of acad. A. F. Ioffe. M.: Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1950. P. 61–71.
18. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967.
19. **Bénilan P., Kruzhkov S. N.** Conservation laws with continuos flux function // Nonlinear Different. Equat. Appl. 1996. V. 3, N 4. P. 395–419.
20. **Кружков С. Н.** Квазилинейные уравнения первого порядка с несколькими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 123. С. 228–255.

Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.