ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Эмрих, Р. И. Солоухин. ФГВ, 1972, 8, 1.
2. Ю. В. Лапин. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970.

УДК 536.46

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТА ПЛАМЕНИ В СЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЕ

А. С. Плешанов

(Москва)

Неустойчивость фронта пламени в несжимаемой идеальной (недиссипативной) среде была теоретически доказана в [1, 2]. Исследование устойчивости ударных волн в произвольной идеальной среде было проведено в [3] с последующим уточнением в [4, 5]. Общий обзор устойчивости фронта пламени дается в [6, 7]. Данная работа посвящена получению одного из возможных критериев неустойчивости фронта пламени в сжимаемой произвольной идеальной среде.

Система гидродинамических уравнений имеет обычный вид

$$D\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0,$$
$$\rho D\vec{v}+\nabla p=0, \qquad Ds=0, \tag{1}$$

где $D=\partial/\partial t+(\vec{v}\nabla)$ (остальные обозначения см. в работе [8]). На поверхности разрыва должны соблюдаться условия непрерывности потока массы

$$\{j\}\equiv\{\rho v_\perp\}=0, \tag{2}$$

нормальной компоненты потока импульса

$$\{g_\perp\}\equiv\{p+pv_\perp^2\}=0, \tag{3}$$

его тангенциальной компоненты

$$\{\vec{g}_\parallel\}\equiv\{j\vec{v}_\parallel\}=0 \tag{4}$$

и нормальной компоненты потока энергии

$$\{q_\perp\}\equiv\{j(w+v^2/2)\}=0 \tag{5}$$

Здесь и далее индексы $\perp$ и $\parallel$ относятся к векторам, нормальным и тангенциальным к поверхности разрыва соответственно.

Выписанные уравнения следует проварьировать. Вариации векторных величин на поверхности разрыва включают возмущение его формы

$$\delta v_\perp=v'_\perp-D_\parallel\xi'=v'_\perp-[-i\omega+i(\vec{k}_\parallel\vec{v}_\parallel)]\,\xi'\equiv v'_\perp-\Omega\xi' \tag{6}$$

для нормальной компоненты скорости,

$$\delta\vec{v}_\parallel=\vec{v}'_\parallel+v_\perp\nabla_\parallel\xi'=\vec{v}'_\parallel+i\vec{k}_\parallel v_\perp\xi', \tag{7}$$

для тангенциальной компоненты скорости, где $\vec{k}_\parallel$ — волновой вектор возмущения разрыва, координата поверхности которого ξ'; ω — угловая частота; штрих относится собственно к возмущениям. Предполагается, что возмущение любой величины пропорционально $\exp\left[k_\perp r_\perp + i(\vec{k}_\parallel \vec{r}_\parallel) - i\omega t\right]$.

Беря дивергенцию по поверхности разрыва от проварьированного векторного условия непрерывности (4) и используя (1), (6), (7), получим окончательные граничные условия для $v'_\perp$, p' и ρ'

$$\{\delta_j\} = \{j'\} = \{\rho\delta v_\perp \rho' v_\perp + \rho' v_\perp\} = 0; \tag{8}$$

$$\{\delta g_\perp\} = \{p' + 2j\delta v_\perp + \rho' v_\perp^2\} = 0, \tag{9}$$

$$\{(\vec{k}_\parallel \vec{\delta g}_\parallel)\} = \{\delta_j(\vec{k}_\parallel \vec{v}_\parallel) + ijk_\perp v'_\perp + iv_\perp(\Omega + k_\perp v_\perp)\rho' + ijk_\parallel^2 v_\perp \xi'\} = 0; \tag{10}$$

$$\{\delta q_\perp\} = \{\delta_j(w + v^2/2) + j\left[w' + v_\perp \delta v_\perp + (\vec{v}_\parallel \vec{\delta v}_\parallel)\right]\} = 0. \tag{11}$$

Эта система граничных условий замыкается кинетическим уравнением для j', которое в данном гидродинамическом рассмотрении естественно взять в виде

$$j' = (\partial j/\partial p_1)_{T_1} p'_1 = j_{p1} p'_1. \tag{12}$$

Здесь и далее индексы $\alpha = 1, 2$ относятся к средам до и после разрыва соответственно.

Уравнения (1)—(3) имеют вид:

$$D\rho' + \rho(\vec{k}\vec{v}') = 0;$$
$$\rho D\vec{v}' + \vec{k}p' = 0, \quad Ds' = 0, \tag{13}$$

откуда

$$D^2 - k^2 p'/\rho' = 0.$$

Здесь и далее $D = \Omega + k_\perp v_\perp$.

Энтопийно-вихревым возмущением ($s \neq 0$, $p' = 0$) соответствует дисперсионное уравнение

$$D_e \equiv \Omega + k_{e\perp} v_\perp = 0, \tag{14}$$

акустическим ($s' = 0$, $p' \neq 0$)

$$D_a^2 - (k_a c)^2 \equiv (\Omega + k_{a\perp} v_\perp)^2 - c^2(k_{a\perp}^2 - k_{\text{II}}^2) = 0, \tag{15}$$

где c — скорость звука. Величина w' имеет вид [3]

$$w' = w'_e + w'_a \equiv Ts' + Vp' = T\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_p V'_e + Vp'_a, \tag{16}$$

где V — удельный объем.

Энтропийно-вихревые возмущения, совокупность которых ввиду условия $(\vec{k}_e \vec{v}'_e) = 0$ может трактоваться как несжимаемая жидкость, являются вмороженными, поперечными и могут быть только после разрыва. Для этих возмущений имеем

$$k_{e2\perp} = -\Omega/v_{2\perp}, \quad V'_{e1} = v'_{e1\perp} = 0. \tag{17}$$

Акустические возмущения являются невмороженными продольными и могут быть и до, и после разрыва. Для этих возмущений волновые векторы $k_{a\alpha\perp}$ определяются из уравнений (19) и

$$p'_{a\alpha} = c_\alpha^2 \rho'_{a\alpha} = -\rho_\alpha \frac{D_{a\alpha}}{k_{a\alpha\perp}} v'_{a\alpha\perp}. \tag{18}$$

Исключая $\delta v_\perp$ из (9) и (11), с помощью (8) и (12) получим

$$\{p'_a + 2v_\perp j_{p1} p'_{a1} - v_\perp^2 \rho'\} = 0, \tag{19}$$

$$\{(Ts_V V'_e + V'_{pa}) + V(v_\perp j_{p_1} p'_{a1} - v_\perp^2 \rho')\} = 0.$$

Система уравнений (18), (19) является замкнутой относительно отношений величин p'_{a1}, V'_{0_1}, V'_{e_2}, p'_{a2}, V'_{a2}, и, в частности, для отношения $\varphi = j^2 V'_{2}/p'_{a2}$, введенного в [3], получим

$$-\frac{1+\varphi}{M_2^2+\varphi}\frac{p_1-p_2}{T^2 s_{V2}}=1+\left(1-\frac{1-M_1^2}{p_1-p_2}\frac{j}{j_{p1}}\right)^{-1}, \tag{20}$$

где M — число Маха. Соответствующий результат для ударных волн, полученный в [9], имеет вид

$$-\frac{1+\varphi}{M_2^2+\varphi}\frac{p_1-p_2}{T_2 s_{V2}}=2.$$

С помощью параметра φ удобно заменить условие (11) более компактным соотношением

$$p'_{a2}=c_H^2\rho'_2=-v_{2\perp}^2\rho'_2/\varphi, \tag{21}$$

где c_H— эффективная скорость звука на адиабате Гюгонио.

Из (20) следует, что для пламени, когда $p_1>p_2$, в среде с нормальным тепловым расширением, т. е. при

$$\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_p=\frac{c_p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p>0,$$

имеет место

$$-1<\varphi<-M_2^2 \text{ или } M_2<M_H=v_{2\perp}/c_H<1, \tag{22}$$

в то время как для ударных волн сжатия, когда $p_1<p_2, -1<-M_2^2<\varphi$ или $M_H<<M_2<1$. При этом предполагается, что знак правой части (20) не меняется.

Выражая все величины через ξ' из (8), (9), (18), (21), используя (17) и подставляя результаты в (10), получим характеристические уравнение

$$\Omega\left(\left\{1-\Omega\frac{D_{a1}}{k_{\parallel}^2 v_{1\perp}^2}v_{1\perp}j_{p1}-\frac{v_{2\perp}}{v_{1\perp}}\frac{\left(1-M_1^2\right)-2\left(v_{2\perp}-v_{1\perp}\right)j_{p1}}{1-M_H^2}\frac{D_{a1}}{D_{a2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left[1+\Omega\frac{\left(1-M_H^2\right)D_{a2}-\Omega}{k_{\text{II}}^2 v_{2\perp}^2}\right]\right\}=\left[\left(v_{1\perp}j_{p1}+1-M_1^2\right)D_{a1}-\Omega\right]\cdot\left[\left(\frac{v_{2\perp}}{v_{1\perp}}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Omega^2}{k_{\text{II}}^2 v_{1\perp}v_{2\perp}}\right]. \tag{23}$$

Это уравнение 4-го порядка по Ω, причем ($k_{a\alpha\perp}$ определяются из квадратных уравнений (15). Полное его исследование весьма сложно. Ограничимся поэтому указанием одного простого критерия неустойчивости, который получается из рассмотрения линейной (по Ω) части (23). Он аналогичен критерию [3] для неустойчивости ударных волн вида $\varphi<-1$ и может быть получен при рассмотрении линейной (по Ω) части характеристического уравнения [3], соответствующего (23). Критерий соответствует условию обращения в нуль свободного члена (23), т. е. условию $\Omega=0$, что является частным случаем общего условия $\operatorname{Re}\Omega=0$, на кривых устойчивости. Критерий имеет вид

$$v_{1\perp}j_{p1}+1-M_1^2>0$$

или если $j\sim p_1^n$, то

$$n>-\frac{p_1}{\rho_1 v_{1\perp}^2}\left(1-M_1^2\right)=-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{M_\perp^2}-1\right), \tag{24}$$

где последнее выражение приведено для идеального газа. Из (24) следует, что при $n>0$ фронт пламени заведомо неустойчив, а при $n<0$ устойчивость возможна лишь при M_1 близких к 1, т. е. в режимах около дефлаграции Чепмена — Жуге, и достаточно больших $|n|$, что является весьма исключительной ситуацией.

Таким образом, учет сжимаемости среды и зависимости массовой скорости горения от давления в свежей смеси, как правило, не стабилизирует фронт пламени.

В заключение отметим, что при полном анализе уравнения (23), который может дать и верхнюю границу для n, следует использовать неравенства (22), что позволит сделать выводы о знаках коэффициентов развернутого характеристического уравнения при переходе в собственную систему отчета, как это осуществлено в [3]. При этом, разумеется, должны быть отброшены физически нереальные решения с $\operatorname{Re} k_{a1\perp} < 0$ и $\operatorname{Re} k_{a2\perp} > 0$, как это сделано в [3], где из трех корней характеристического уравнения один корень отбрасывается, так как он соответствует решению с $\operatorname{R} k_{a2\perp} > 0$

Необходимости в одновременном рассмотрении обеих ветвей решений (15), как это предлагалось в [10], нет, поскольку эти ветви при соответствующем переопределении волнового вектора эквивалентны.

Поступила в редакцию
14/X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Darrieus. La Mechanigue des fluides. Paris, Dunod, 1941.
2. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1944, **14**, 240.
3. С. П. Дьяков. ЖЭТФ, 1954, **27**, 288.
4. С. В. Иорданский. ПММ, 1957, **21**, 4, 465.
5. В. М. Конторович. ЖЭТФ, 1957, **33**, 6, 1525.
6. Нестационарное распространение пламени. Под. ред. Д. Г. Маркштейна. М., «Мир», 1968.
7. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. Устойчивость пламен. Гидромеханика. М., 1966.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
9. А. С. Плешанов. ФГВ, 1968, **41**, 95.
10. С. К. Асланов. Докл. АН СССР, 1966, **169**, 2. 303.