

УДК 512.643

О чувствительности канонических углов юнитойдной матрицы

Х.Д. Икрамов¹, А.М. Назари²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМК, Ленинские горы, 1, Москва, 119992

²Университет Эрака, факультет математики, Эрак, Исламская Республика Иран

E-mails: ikramov@cs.msu.su (Икрамов Х.Д.), a-nazari@araku.ac.ir (Назари А.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Икрамов Х.Д., Назари А.М. О чувствительности канонических углов юнитойдной матрицы // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 403–408.

Юнитойдная матрица — это квадратная комплексная матрица, приводимая к диагональному виду посредством эрмитовой конгруэнции. Канонические углы невырожденной юнитойдной матрицы A (с точностью до множителя $1/2$) суть аргументы собственных значений ее коквадрата, под которым понимается матрица $A^{-*}A$. Выводится оценка для производной собственного значения коквадрата по направлению возмущения в $A^{-*}A$, вызванного возмущением, внесенным в A .

DOI: 10.15372/SJNM20220405

Ключевые слова: конгруэнция, юнитоид, коквадрат, канонический угол, циркулянт.

Ikramov Kh.D., Nazari A.M. On the sensitivity of the canonical angles of a unitoid matrix // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 403–408.

A unitoid matrix is a square complex matrix that can be brought to diagonal form by a Hermitian congruence transformation. The canonical angles of a nonsingular unitoid matrix A are (up to the factor $1/2$) the arguments of the eigenvalues of the cosquare of A , which is the matrix $A^{-*}A$. We derive an estimate for the derivative of an eigenvalue of the cosquare in the direction of the perturbation in $A^{-*}A$ caused by a perturbation in A .

Keywords: congruence transformation, unitoid, cosquare, canonical angle, circulant.

1. Юнитойдная матрица, или юнитоид, — это квадратная комплексная матрица, которая может быть приведена к диагональному виду посредством (эрмитовой) конгруэнции, т. е. матричного преобразования типа

$$A \rightarrow P^*AP,$$

где P — произвольная невырожденная матрица. Наиболее известный класс юнитоидов — нормальные матрицы, приводимые к диагональному виду унитарными конгруэнциями (являющимися заодно унитарными подобиями). Существуют и обширные классы не обязательно нормальных юнитоидных матриц, например, матрицы, хаусдорфовы множества которых не содержат нуля.

В дальнейшем мы рассматриваем только невырожденные матрицы. Невырожденной матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A, \quad (1)$$

называемую коквадратом матрицы A . Жорданова форма коквадрата в значительной мере определяет устройство канонической формы матрицы A относительно конгруэнций. Подробные сведения о связи этих двух форм можно найти в книге [1, § 4.5].

Каноническая форма Φ (невырожденной) юнитоидной $n \times n$ -матрицы A есть диагональная матрица. Среди многих диагональных матриц, к которым может быть приведена матрица A , каноническая форма Φ однозначно выделяется тем, что все ее диагональные элементы имеют модуль 1. Пусть этими элементами будут числа $e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}$. Их аргументы $\phi_1, \dots, \phi_n$ называют каноническими углами матрицы A .

Коквадрат матрицы Φ также является диагональной матрицей. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{C}_\Phi = \text{diag} \left(e^{2i\phi_1}, \dots, e^{2i\phi_n} \right). \quad (2)$$

Пусть элементы юнитоидной матрицы A подвергаются малым возмущениям, сохраняющим у возмущенной матрицы $\tilde{A}$ свойство юнитоидности. Нас интересует чувствительность канонических углов к этим возмущениям. Иначе говоря, насколько изменятся вследствие возмущений диагональные элементы матрицы (2)?

Следует отметить, что для исходной матрицы A матрица $\mathcal{C}_\Phi$ есть диагональная форма коквадрата $\mathcal{C}_A$, достигаемая посредством *подобий*. Тем самым числа $e^{2i\phi_1}, \dots, e^{2i\phi_n}$ суть собственные значения матрицы $\mathcal{C}_A$. Следовательно, в поставленном вопросе речь идет о чувствительности собственных значений коквадрата к возмущениям, вносимым в матрицу A и нетривиальным образом изменяющим $\mathcal{C}_A$. Эта ситуация отличается от задачи оценивания индивидуальных чисел обусловленности собственных значений, где возмущения вносятся непосредственно в $\mathcal{C}_A$.

Пусть λ — собственное значение коквадрата $\mathcal{C}_A$. В пункте 2 мы выводим оценку для производной λ по направлению возмущения, получаемого $\mathcal{C}_A$ вследствие возмущения, вносимого в матрицу A . В оценку входит множитель $\|A^{-1}\|$, заставляющий думать, что чувствительность λ тем выше, чем хуже (в смысле обращения) обусловлена A . Чтобы проверить, не является ли присутствие этого множителя просто недостатком нашего способа оценивания, мы провели серию численных экспериментов, описываемых в п. 3. Обсуждение результатов этих экспериментов дано в п. 4.

2. Пусть A — невырожденная юнитоидная матрица с попарно различными каноническими углами $\phi_1, \dots, \phi_n$. Дополнительно предположим, что $\phi_i \neq \phi_j \pmod{\pi}$ при $i \neq j$. Это предположение гарантирует простоту собственных значений коквадрата $\mathcal{C}_A$ (см. (2)).

В последующих рассуждениях удобнее иметь дело не с самой матрицей $\mathcal{C}_A$, а с сопряженной к ней матрицей

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{C}_A^* = A^*A^{-1}. \quad (3)$$

Чувствительности соответствующих собственных значений этих двух матриц одинаковы.

Возмущение dA матрицы A имеет следствием возмущение ее коквадрата. Дифференциал $d\mathcal{D}$ этого возмущения можно найти, дифференцируя соотношение (3):

$$d\mathcal{D} = d(A^*A^{-1}) = (dA)^*A^{-1} + A^*d(A^{-1}).$$

В свою очередь, дифференциал $d(A^{-1})$ определяется посредством дифференцирования тождества $AA^{-1} = I_n$:

$$(dA)A^{-1} + Ad(A^{-1}) = 0,$$

откуда

$$d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1}.$$

Таким образом,

$$d\mathcal{D} = (dA)^*A^{-1} - A^*A^{-1}(dA)A^{-1}. \quad (4)$$

Пусть λ — произвольное собственное значение матрицы $\mathcal{D}_A$. По предположению, все λ просты. Производная λ по направлению возмущения $d\mathcal{D}$ выражается известной формулой

$$\lambda'_{d\mathcal{D}} = \frac{(d\mathcal{D}x, y)}{(x, y)}, \quad (5)$$

где x и y суть правый и левый собственные векторы матрицы $\mathcal{D}_A$ для собственного значения λ . Согласно (4), имеем

$$(d\mathcal{D}x, y) = y^*(dA)^*A^{-1}x - y^*(A^*A^{-1})(dA)A^{-1}x.$$

Произведение $y^*(A^*A^{-1}) = y^*\mathcal{D}_A$ есть $\bar{\lambda}y^*$. Поэтому

$$(d\mathcal{D}x, y) = y^*[(dA)^* - \bar{\lambda}dA]A^{-1}x.$$

Переходя к оценкам, вспомним, что для юнитоида A все собственные значения матрицы $\mathcal{D}_A$ унимодулярны. Следовательно,

$$\begin{aligned} |(d\mathcal{D}x, y)| &\leq \|(dA)^* - \bar{\lambda}dA\|_2 \cdot \|A^{-1}x\|_2 \cdot \|y\|_2 \\ &\leq 2\|dA\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \cdot \|x\|_2 \cdot \|y\|_2. \end{aligned}$$

Перепишывая формулу (5) в виде

$$\lambda'_{d\mathcal{D}} = \frac{\|x\|_2\|y\|_2}{(x, y)} \cdot \frac{(d\mathcal{D}x, y)}{\|x\|_2\|y\|_2} \quad (6)$$

и учитывая, что модуль первой дроби в правой части формулы (6) есть (спектральное) число обусловленности $\text{cond}_2\lambda$ собственного значения λ , окончательно получаем

$$|\lambda'_{d\mathcal{D}}| \leq 2\text{cond}_2\lambda \cdot \|A^{-1}\|_2 \cdot \|dA\|_2. \quad (7)$$

Присутствие множителей $\text{cond}_2\lambda$ и $\|dA\|$ в оценке для λ' вполне ожидаемо. Но насколько оправданно включение в эту оценку множителя $\|A^{-1}\|$? Обсуждению этого вопроса посвящены два следующих пункта статьи.

3. Чтобы проверить оправданность присутствия в оценке (7) множителя $\|A^{-1}\|$, мы провели численные эксперименты, описываемые в данном пункте.

Юнитоиды были представлены в наших экспериментах нормальными матрицами, а еще точнее, циркулянтами. Для нормальной матрицы A сопряженная матрица A^* есть многочлен от A . Это же верно в отношении коквадрата $\mathcal{C}_A$, а потому $\mathcal{C}_A$ также является нормальной матрицей. Кроме того, из формулы (1) следует, что всякому собственному значению $\rho e^{i\phi}$ матрицы A соответствует собственное значение $e^{2i\phi}$ ее коквадрата. Таким образом, нормальная матрица $\mathcal{C}_A$ в действительности унитарна.

Почти любое возмущение dA выводит возмущенную матрицу $\tilde{A} = A + dA$ из класса нормальных матриц; соответственно, матрица $\tilde{A}$ уже не будет унитарной. Однако, если канонические углы матрицы A достаточно хорошо разделены, то при умеренной величине возмущений dA собственные значения коквадрата $\mathcal{C}_{\tilde{A}}$ останутся простыми и будут по-прежнему находиться на единичной окружности. В самом деле, для того чтобы сойти с окружности, каким-то двум собственным значениям λ_i и λ_j прежде нужно слиться, образовав двойное собственное значение.

Матрицей A в наших экспериментах был циркулянт простого порядка n с собственными значениями

$$\mu_j = j e^{i \frac{2\pi}{n}(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Его канонические углы $\frac{2\pi}{n}(j-1)$, $j = 1, \dots, n$, отделены друг от друга оптимальным образом. Числа

$$\lambda_j = e^{i \frac{4\pi}{n}(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

суть собственные значения коквадрата C_A .

Возмущение dA выбиралось в виде $dA = \varepsilon F$, где ε — малое число, например, $\varepsilon = 10^{-7}$, а F — матрица, элементы которой случайным образом распределены в интервале $[-n, n]$.

Выбрав в спектре A конкретное число μ_{j_0} (см. (8)), мы проводим такой процесс: строится последовательность циркулянтов A_k , имеющих те же собственные значения, что и исходная матрица A . Исключением является μ_{j_0} ; в спектре A_k это число заменяется на

$$\mu_{j_0}^{(k)} = \frac{\mu_{j_0}}{10^k}.$$

Тем самым канонические углы всех матриц A_k те же, что у A .

После шага k_0 , на котором $\mu_{j_0}^{(k)}$ становится наименьшим собственным значением матрицы A_k , каждый шаг процесса увеличивает норму $\|A_k^{-1}\|_2$ в 10 раз. Это следует из формулы

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq n} |\mu_j|},$$

справедливой для нормальной матрицы A .

К каждой матрице A_k добавляется одно и то же возмущение dA , выводящее ее из класса нормальных матриц. После этого для возмущенной матрицы $\tilde{A}_k = A_k + dA$ вычисляется спектр ее коквадрата C_k . Траектории по k отдельных собственных значений из этого спектра и представляют для нас главный интерес.

4. Положим $n = 5$, $j_0 = 2$. Число шагов деления на 10 в одном прогоне возьмем равным 6.

В обсуждении результатов мы будем игнорировать возмущение матриц A_k матрицей dA , поскольку, исключая последний шаг, эффект этого возмущения пренебрежимо мал по сравнению с эффектом деления собственного значения на 10. Таким образом, в первом приближении матрицы $\tilde{A}_k$ можно заменить нормальными матрицами A_k , а коквадраты C_k — унитарными матрицами C_{A_k} . Теперь переход от матрицы A_k к матрице A_{k+1} может рассматриваться как возмущение A_k в направлении собственного вектора w_{j_0} для собственного значения $\mu_{j_0}^{(k)}$: прежнее собственное число заменяется числом, в 10 раз меньшим. Это означает, что переход от A_k к A_{k+1} можно описать соотношением

$$\Delta_{k+1} = A_{k+1} - A_k = -0.9 \mu_{j_0}^{(k)} w_{j_0} w_{j_0}^*.$$

Поскольку A_k — циркулянт, собственный вектор w_{j_0} есть столбец j_0 (нормированной) матрицы ДПФ (дискретного преобразования Фурье).

Коквадрат C_{A_k} имеет те же собственные векторы, что и A_k . Однако собственному вектору w_{j_0} отвечает теперь собственное значение $\lambda_{j_0}^{(k)}$, аргумент которого в два раза больше, чем у $\mu_{j_0}^{(k)}$. Для выбранного нами индекса $j_0 = 2$ число $\lambda_2^{(k)}$ есть

$$e^{i \frac{4\pi}{5}}.$$

Таблица 1 показывает траекторию по k собственного значения $\lambda_2^{(k)}$. В табл. 2 вычислены разности чисел $\lambda_2^{(k)}$ для каждой пары соседних шагов. Мы видим, что эти разности, интерпретируемые как возмущения прежнего собственного значения, возрастают с каждым шагом почти точно в 10 раз, т. е. пропорционально росту нормы обратной матрицы. Отсюда мы делаем вывод об оправданности присутствия множителя $\|A^{-1}\|$ в оценке (7).

Таблица 1.

шаг	λ_2
0	$-0.809016952915973 + 0.587785309355853i$
1	$-0.809016579785097 + 0.587785822926027i$
2	$-0.809012848466324 + 0.587790958603834i$
3	$-0.808975534278326 + 0.587842312988023i$
4	$-0.808602292474140 + 0.588355617466480i$
5	$-0.804859987561596 + 0.593464742357383i$
6	$-0.766550826794079 + 0.642183641949247i$

Таблица 2.

шаг	$\lambda_2(k) - \lambda_2(k-1)$
1	$0.000000373130876 + 0.000000513570174i$
2	$0.000003731318773 + 0.000005135677807i$
3	$0.000037314187998 + 0.000051354384189i$
4	$0.000373241804186 + 0.000513304478457i$
5	$0.003742304912544 + 0.005109124890903i$
6	$0.038309160767517 + 0.048718899591864i$

Этот вывод подкрепляется таблицами 3 и 4, соответствующими выбору $j_0 = 3$. Собственное значение μ_3 матрицы A переходит в собственное значение λ_3 , аргумент которого тот же, что у μ_5 . Табл. 3 показывает траекторию по k этого собственного значения. В табл. 4 вычислены разности чисел $\lambda_3^{(k)}$ для каждой пары соседних шагов.

Таблица 3.

шаг	λ_3
0	$0.309017066735619 - 0.951056492783743i$
1	$0.309017717981194 - 0.951056281180927i$
2	$0.309024230390930 - 0.951054165140608i$
3	$0.309089349885821 - 0.951033003521578i$
4	$0.309740084822965 - 0.950821265987352i$
5	$0.316201657699779 - 0.948692000423795i$
6	$0.376459953752118 - 0.926432891928123i$

Таблица 4.

шаг	$\lambda_3(k) - \lambda_3(k-1)$
1	$0.000000651245575 + 0.000000211602816i$
2	$0.000006512409736 + 0.000002116040319i$
3	$0.000065119494891 + 0.000021161619030i$
4	$0.000650734937144 + 0.000211737534226i$
5	$0.006461572876814 + 0.002129265563557i$
6	$0.060258296052339 + 0.022259108495672i$

Литература

1. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. Second edition. — Cambridge, Cambridge University Press, 2013.

Поступила в редакцию 02 февраля 2022 г.

После исправления 24 марта 2022 г.

Принята к печати 25 октября 2022 г.