УДК 539.3

ОСРЕДНЕНИЕ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ШАРНИРАМИ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

При помощи метода осреднения Н. С. Бахвалова построена формальная асимптотика решения сформулированной в заглавии задачи. Осредненное уравнение имеет эллиптический тип; при малой жесткости шарнира оно сингулярно возмущено и при нулевой жесткости шарнира меняет свой тип на составной. Для первой краевой задачи доказана сходимость решения исходной задачи к решению предельной. Рассмотрена ситуация, в которой для уравнения составного типа заданы естественные граничные условия. Показано, что пространство решений однородной задачи бесконечномерно.

Введение. Методом Н. С. Бахвалова [1] построена формальная асимптотика решения сформулированной в заглавии задачи. В предположении идеального контакта составляющих материалов этим методом решено достаточно большое количество задач; работ, в которых контакт предполагается неидеальным, значительно меньше. В теории упругости задача осреднения для композиционного материала, если в элементарной ячейке на поверхности раздела волокна и матрицы присутствует вязкое трение, изучалась в [2]. В предположении, что периодические шарниры имеют нулевую жесткость, в [3] для частного случая построено осредненное уравнение составного типа. Отметим, что условия сопряжения в [3] сформулированы неточно: отсутствует требование равенства нулю скачка перерезывающей силы. Как показано ниже, при осреднении пластин, ослабленных шарнирами конечной жесткости, возникает уравнение эллиптического типа; при малой жесткости шарнира оно сингулярно возмущено, а при нулевой меняет свой тип на составной. Ранее подобные уравнения встречались в работах автора (см., например, [4]). Для первой краевой задачи доказана сходимость решения исходной задачи к решению предельной. Изучена ситуация, в которой для уравнения составного типа заданы естественные граничные условия. Показано, что в отличие от эллиптического случая пространство решений однородной задачи бесконечномерно.

1. Предположим, что сечение плоской области Q осью x представляется в виде отрезка $[0, l]$. Здесь (x, y) — ортогональные декартовы координаты на плоскости. Разделим отрезок $[0, l]$ на n равных частей и положим $\varepsilon = l/n$. Если n велико, то ε — малый параметр. В результате ячейка периодичности станет равной отрезку $[0, 1]$. В предположении справедливости гипотез Кирхгофа — Лява и ортотропии материала примем соотношения между моментами и кривизнами в виде

$$M_{11} = -\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big), \qquad M_{22} = -\Big(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big), \qquad M_{12} = -2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь $w(x, y)$ — прогиб пластины (предположение об ортотропии материала принимается только для упрощения формул, последующие вычисления можно провести и без этого предположения); $D_{ij} = D_{ij}(x/\varepsilon)$ $(i, j = 1, 2, 6)$ — функции быстрой переменной $\eta = x/\varepsilon$, имеющие период, равный единице. Кроме того, предполагается существование положительной постоянной γ такой, что справедливы неравенства (условие положительной определенности матрицы жесткостей)

$$D_{11}D_{22} - D_{12}^2 > \gamma > 0, \quad D_{66} > \gamma > 0.$$

Прогиб определяется из уравнения

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) - 4\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big) = f. \quad (1.1)$$

Зададим при $\eta = 1/2$ условия сопряжения:

$$-M_{11}(x,y,1/2+0) = \frac{\alpha}{\varepsilon}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}\Big], \qquad -M_{11}(x,y,1/2-0) = \frac{\alpha}{\varepsilon}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}\Big]; \quad (1.2)$$

$$[w] = 0, \qquad [N_{11}] = 0. \quad (1.3)$$

Условия (1.3) означают, что прогиб и перерезывающая сила $N_{11} = -\partial M_{11}/\partial x - \partial M_{12}/\partial y$ непрерывны при переходе через границу раздела. Предполагается, что ячейка периодичности прямой $\eta = 1/2$ разделена на два слоя, механические характеристики которых могут и совпадать. Коэффициент α положителен, его называют коэффициентом жесткости шарнира [1]. В дальнейшем квадратные скобки в формулах означают скачок функции при $\eta = 1/2$. Ищем асимптотику решения в виде

$$w^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w^n(x,y,\eta). \quad (1.4)$$

Заменим в (1.1) частную производную $\partial/\partial x$ на полную производную

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

так как вычисляется производная от сложной функции. При этом вторая производная по x запишется следующим образом:

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},$$

а уравнение (1.1) — в виде

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)\Big(D_{11}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)w^\varepsilon + D_{12}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial y^2}\Big) +$$

$$+4\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(D_{66}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2}\Big) +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(D_{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)w^\varepsilon + D_{22}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial y^2}\Big) = -f. \quad (1.5)$$

При подстановке (1.4) в (1.5) получим рекуррентно связанную систему уравнений для определения функций $w^n(x,y,\eta)$. Для построения осредненного уравнения необходимо знать только несколько первых членов разложения. Приравнивая нулю коэффициент при степени ε^{-4}, получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta^2}\Big) = 0,$$

из которого следует, что $w^0(x,y,\eta)=w^0(x,y)$. Функция $w^1(x,y,\eta)$ определяется из условия равенства нулю коэффициента при степени ε^{-3}

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^1}{\partial\eta^2}\Big)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(2D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial\eta}\Big)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\Big)=0.$$

Отсюда следует, что w^1 не зависит от η. Аналогичным образом уравнение для определения функции $w^2(x,y,\eta)$ следует из требования равенства нулю коэффициента при степени ε^{-2}

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^2}{\partial\eta^2}\Big)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(2D_{11}\frac{\partial^2 w^1}{\partial x\partial\eta}\Big)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2}\Big)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta^2}\Big)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta^2}\Big)+4\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\Big(D_{66}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta\partial y}\Big)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta^2}\Big)=0.$$

Поэтому функция $w^2(x,y,\eta)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big(D_{11}\frac{\partial^2 w^2}{\partial\eta^2}+D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\Big)=0. \qquad (1.6)$$

Подставим теперь функцию w^ε из формулы (1.4) в условия сопряжения, в частности в условие (1.2). При введении быстрой переменной η оно приобретает вид

$$D_{11}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)+D_{12}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial y^2}\Big|_{\eta=1/2}=\frac{\alpha}{\varepsilon}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)w^\varepsilon\Big].$$

Приравнивая коэффициенты при совпадающих степенях ε в левой и правой частях последнего равенства, для функций w^0, w^1, w^2 получим соотношения на скачках

$$D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial\eta^2}\Big|_{\eta=1/2}=\alpha[w^0],\qquad D_{11}\frac{\partial^2 w^1}{\partial\eta^2}+2D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial\eta}\Big|_{\eta=1/2}=\alpha\Big[\frac{\partial w^0}{\partial x}+\frac{\partial w^1}{\partial\eta}\Big],$$
$$\Big[D_{11}\frac{\partial^2 w^2}{\partial\eta^2}+D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\Big]\Big|_{\eta=1/2}=\alpha\Big[\frac{\partial w^2}{\partial\eta}+\frac{\partial w^1}{\partial x}\Big]. \qquad (1.7)$$

Из уравнения (1.6) и условия сопряжения (1.7) следует, что

$$D_{11}\frac{\partial^2 w^2}{\partial\eta^2}+D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}=\eta\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y),$$

где функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ неизвестны.

Из непрерывности прогиба и перерезывающей силы на границе раздела следует, что $\varphi_1(x,y)$ можно считать равной нулю, а функция $\varphi_2(x,y)$ равна

$$\varphi_2(x,y)=\frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}\Big(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\Big).$$

Здесь

$$\lambda_{11}=\int_0^1\frac{1}{D_{11}(s)}\,ds,\quad \lambda_{12}=\int_0^1\frac{D_{12}(s)}{D_{11}(s)}\,ds,\quad \mu=\int_0^1\Big(D_{22}(s)-\frac{D_{12}(s)^2}{D_{11}(s)}\Big)\,ds,\quad \lambda_{66}=\int_0^1 D_{66}(s)\,ds.$$

Приравняв нулю коэффициент при степени ε^0 в уравнении (1.5), получим осредненные соотношения, связывающие моменты и кривизны:

$$M_{11}^0=-\Big(\frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+\frac{\alpha\lambda_{12}}{1+\alpha\lambda_{11}}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\Big),$$

$$M_{22}^0 = -\left[\frac{\alpha\lambda_{12}}{1+\alpha\lambda_{11}}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \left(\mu + \frac{\alpha\lambda_{12}^2}{1+\alpha\lambda_{11}}\right)\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right],$$

$$M_{12}^0 = -2\lambda_{66}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y},$$

и осредненное уравнение

$$\frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right) + \mu\frac{\partial^4 w^0}{\partial y^4} + 4\lambda_{66}\frac{\partial^4 w^0}{\partial x^2\partial y^2} = -f. \tag{1.8}$$

2. Уравнение (1.8) сохраняет свойство эллиптичности исходного уравнения (1.1). При малом α оно сингулярно возмущено. Если в (1.8) формально перейти к пределу при $\alpha \to +0$, обозначив предел через u, то получим уравнение

$$\mu\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 4\lambda_{66}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = -f. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) имеет составной тип с двукратным семейством вещественных характеристик $x = \text{const}$ и парой комплексно-сопряженных. Подобные уравнения изучались, например, в [4]. Положим в (1.8) $w^0 = u^\alpha$ и поставим для него первую краевую задачу:

$$u^\alpha\Big|_{\partial Q} = 0, \qquad \frac{\partial u^\alpha}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0. \tag{2.2}$$

Нетрудно доказать сходимость решения исходной задачи (1.8), (2.2) к решению предельной. Перейдем к точным формулировкам. Пусть Q — ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей ∂Q. С краевой задачей (1.8), (2.2) естественным образом ассоциируется симметричная билинейная форма

$$a_\alpha(u^\alpha, v) = \int_Q \frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}\left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)dx\,dy +$$
$$+ \int_Q \left(\mu\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\lambda_{66}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)dx\,dy. \tag{2.3}$$

Очевидно, что (2.3) можно представить в виде

$$a_\alpha(u^\alpha, v) = \frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}a_1(u^\alpha, v) + a_0(u^\alpha, v),$$

где

$$a_1(u^\alpha, v) = \int_Q \left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)dx\,dy,$$

$$a_0(u^\alpha, v) = \int_Q \left(\mu\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\lambda_{66}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)dx\,dy.$$

Пусть $f \in L^2(Q)$. Краевая задача (1.8), (2.2) допускает вариационную постановку: определить функцию $u^\alpha \in H_0^2(Q)$, такую что для каждой $v \in H_0^2(Q)$

$$a_\alpha(u^\alpha, v) = (f, v). \tag{2.4}$$

Здесь (f, v) — скалярное произведение в $L^2(Q)$. Известно [5], что функция u^α определяется из (2.4) единственным образом. При $\alpha = +0$ получим билинейную симметричную форму

$a_0(u^0, v)$ и соответствующую ей квадратичную форму $a_0(u^0, u^0)$. Введем гильбертово пространство V, пополнив множество функций класса $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|u\|_V = \left[\int\limits_Q \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u^2\right) dx\, dy\right]^{1/2}. \tag{2.5}$$

Слабым решением первой краевой задачи для уравнения (2.1) называется функция $u^0 \in V$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$a_0(u^0, v) = (f, v) \tag{2.6}$$

для каждой $v \in V$, $f \in L^2(Q)$. На функциях из V справедливо неравенство типа Пуанкаре [4]

$$\int\limits_Q v^2\, dx\, dy \leqslant C \int\limits_Q \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\, dy.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для производной по y. (Здесь и ниже постоянные C, с индексами или без них, не зависят от функций.) Отсюда следует, что при $v \in C_0^\infty(Q)$ полунорма

$$|v|_V^2 = \int\limits_Q \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

эквивалентна норме (2.5). Более того, существует единственная функция u^0, являющаяся слабым решением задачи (2.6). Действительно, билинейная форма (u^0, f) при фиксированной $f \in L^2(Q)$ определяет на V непрерывный линейный функционал. В то же время справедливо неравенство $a_0(u^0, u^0) \geqslant C_0|u^0|_V^2 \geqslant C_1\|u^0\|_V^2$, где положительные постоянные C_0, C_1 не зависят от u^0, и потому по лемме Лакса — Мильграма существует единственный элемент $u^0 \in V$, такой что $a_0(u^0, v) = (f, v)$ для любой функции $v \in V$, являющийся искомым решением. При этом $u^0(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u^0\Big|_{\partial Q} = 0, \qquad \frac{\partial u^0}{\partial y}\Big|_{\partial Q^*} = 0.$$

Здесь ∂Q^* — нехарактеристическая часть границы. Рассмотрим теперь вопрос о сходимости u^α к u^0. Имеет место

Теорема. *При* $\alpha \to +0$ *слабое решение задачи* (1.8), (2.1) *сходится к слабому решению задачи* (2.6).

Действительно, имеем цепочку неравенств

$$a_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) = a_0(u^\alpha, u^\alpha) + \frac{\alpha}{1 + \alpha\lambda_{11}} a_1(u^\alpha, u^\alpha) = (f, u^\alpha) \leqslant \|f\|_0\|u^\alpha\|_0 \leqslant \|f\|_0\|u^\alpha\|_V. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что

$$\|u^\alpha\|_V \leqslant C_2, \qquad \alpha\left\|\left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} + \lambda_{12}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y^2}\right)\right\|_0^2 \leqslant C_3. \tag{2.8}$$

Здесь под $\|u\|_0$ понимается норма в $L^2(Q)$. Из оценки (2.8) следует, что последовательность u^α принадлежит ограниченному подмножеству пространства V, и потому из последовательности u^α можно выделить слабо сходящуюся в V подпоследовательность, для которой сохраним прежнее обозначение. Из второй оценки (2.8) следует, что для любой $v \in C_0^\infty(Q)$

в интегральном тождестве (2.1) член с α сходится к нулю. Действительно, для произвольной функции из $C_0^\infty(Q)$ имеем

$$\frac{\alpha}{1+\alpha\lambda_{11}}\left|\int\limits_Q\left(\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)dx\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha C\left\|\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2u^\alpha}{\partial y^2}\right\|_0\left\|\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right\|_0\leqslant\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha\lambda_{11}}}C_3\left\|\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\lambda_{12}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right\|_0.$$

Здесь постоянные C, C_3 от функций v, u^α не зависят. Последнее неравенство позволяет перейти к пределу по выбранной подпоследовательности в интегральном тождестве (2.4), поэтому предельная функция удовлетворяет интегральному тождеству (2.6). Поскольку решение предельной задачи единственно, то и вся последовательность имеет тот же предел.

3. Аналогичную теорему о сходимости можно доказать и для смешанной задачи (на одной части границы заданы прогиб и угол поворота, на другой — моменты и перерезывающие силы). Однако, если в предельной задаче поставлены естественные граничные условия, аналогичную теорему доказать не удается, так как пространство решений однородной задачи, в отличие от эллиптического случая, бесконечномерно. Так как коэффициенты в уравнении (2.1) постоянны, то, введя подходящие растяжения координат, их можно принять равными единице. Положим $w^0 = u$ и запишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$\frac{\partial^4u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}=f. \tag{3.1}$$

Пусть $f = 0$. Общее решение однородного уравнения (3.1) имеет вид

$$u(x,y)=y\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+W(x,y),$$

где $W(x,y)$ — гармоническая функция; функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ произвольны. Рассмотрим сначала частный случай, когда область представляет собой верхнюю полуплоскость: $Q = \{(x,y), y \geqslant 0\}$. Естественные граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial y}(x,+0)=f_1(x),\qquad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}(x,+0)=f_2(x). \tag{3.2}$$

Здесь Δu — лапласиан функции u. Предположим, что f_1, f_2 имеют компактный носитель. Тогда

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)|x-t|\,dt,$$

а $W(x,y)$ представляется в виде свертки:

$$W(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t,y)f_2(t)\,dt,$$

где ядро $K(x-t,y)$ вычисляется по формуле

$$K(x-t,y)=y\ln[(x-t)^2+y^2]+2y-2(x-t)\operatorname{arctg}\frac{y}{x-t}.$$

При этом $W(x,y)$ удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial^2W}{\partial y^2}(x,+0)=f_2(x)$$

и потому определена с точностью до слагаемого $ax + b$, где a, b — произвольные постоянные. По граничным условиям (3.2) функцию $\varphi_2(x)$ определить нельзя; следовательно, пространство решений однородной задачи бесконечномерно. Если область Q произвольна, то естественные граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\partial Q} = f_1(s), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Delta u\cos(n,y)\Big|_{\partial Q} = f_2(s).$$

Здесь $f_1(s)$, $f_2(s)$ — заданные функции длины дуги. Общее решение однородного уравнения при однородных естественных граничных условиях представляется как $u = d_1x + d_2y + \varphi(x)$ и потому определено только с точностью до произвольной функции $\varphi(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. **Lene F., Leguillon D.** Etude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un materiau composite sur ses coefficients de comportement effectifs // J. Méc. Théor. et Appl. 1981. V. 20, N 3. P. 509–536.
3. **Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.** Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985.
4. **Боган Ю. А.** Об одной сингулярно возмущенной краевой задаче в плоской теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 61. С. 19–24.
5. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 28/IV 1997 г.