Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3

УДК 517.95+519.46

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 1 УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается система уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа:

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + \frac{2}{3}(\mu(2u_x - v_y))_x + (\mu(u_y + v_x))_y; \tag{1}$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + (\mu(u_y + v_x))_x + \frac{2}{3}(\mu(2v_y - u_x))_y; \tag{2}$$

$$\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0; \tag{3}$$

$$p_t + up_x + vp_y + \gamma p(u_x + v_y) = \frac{\gamma - 1}{R} k_0 \Big(\Big(\mu\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_x\Big)_x + \Big(\mu\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_y\Big)_y \Big) +$$
$$+ (\gamma - 1)\mu\Big(\frac{4}{3}(u_x^2 + v_y^2 - u_x v_y) + (v_x + u_y)^2\Big). \tag{4}$$

Здесь u, v — координаты вектора скорости; ρ — плотность; p — давление; $\mu = (p/\rho)^\omega$ — коэффициент вязкости; $k_0\mu$ — коэффициент теплопроводности; γ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная.

Цель данной работы — построение всех инвариантных решений ранга 1 системы (1)–(4) [1].

Как показано в [2], система (1)–(4) допускает алгебру Ли L_8 с базисом

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = t\partial_x + \partial_u, \qquad X_4 = t\partial_y + \partial_v,$$
$$X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \qquad X_6 = \partial_t,$$
$$X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho - p\partial_p,$$
$$X_8 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2(\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2\omega p\partial_p.$$

В табл. 1 приведены коммутаторы операторов алгебры Ли L_8. Здесь и далее допускаемые операторы представлены их номерами.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	−2	0	1	1
2	0	0	0	0	1	0	2	2
3	0	0	0	0	−4	−1	0	3
4	0	0	0	0	3	−2	0	4
5	2	−1	4	−3	0	0	0	0
6	0	0	1	2	0	0	6	0
7	−1	−2	0	0	0	−6	0	0
8	−1	−2	−3	−4	0	0	0	0

Таблица 2

Автоморфизм	$p_1 = (x^1, x^2)$	$p_2 = (x^3, x^4)$	x^5	x^6	x^7	x^8
T	$p_1 + \alpha_1 \Delta x^5 + \alpha_1 (x^7, x^8)$	p_2	x^5	x^6	x^7	x^8
Γ	$p_1 - \alpha_2 x^6$	$p_2 + \alpha_2 \Delta x^5 + \alpha_2 x^8$	x^5	x^6	x^7	x^8
A_5	$p_1 S$	$p_2 S$	x^5	x^6	x^7	x^8
A_6	$p_1 + a_6 p_2$	p_2	x^5	$x^6 + a_6 x^7$	x^7	x^8
A_7	$\alpha_7 p_1$	p_2	x^5	$\alpha_7 x^6$	x^7	x^8
A_8	$\alpha_8 p_1$	$\alpha_8 p_2$	x^5	x^6	x^7	x^8
E_1	$(-x^1, x^2)$	$(-x^3, x^4)$	$-x^5$	x^6	x^7	x^8

В табл. 2 даются действия внутренних автоморфизмов алгебры Ли L_8 на координаты вектора $X = x^i X_i$. К ним добавлен дискретный автоморфизм E_1, соответствующий изменению направления оси x на противоположное. Действия автоморфизмов A_1 и A_2 объединены в действие автоморфизма T, а A_3 и A_4 — в Г. Через a_i обозначен групповой параметр автоморфизма A_i $(i = 1, \ldots, 8)$. Использованы также следующие обозначения: $\alpha_1 = (a_1, a_2)$, $\alpha_2 = (a_3, a_4)$, $\alpha_7 = \exp\{a_7\}$, $\alpha_8 = \exp\{a_8\}$,

$$S = \begin{pmatrix} \cos a_5 & \sin a_5 \\ -\sin a_5 & \cos a_5 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В табл. 3 представлена нормализованная оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_8 [3]. Первое число в номере подалгебры обозначает ее размерность, а второе — ее номер среди подалгебр данной размерности, N — базис подалгебры, Nor$N$ — ее нормализатор. Коэффициенты α и β принимают любое вещественное значение, δ и ε не принимают значения 0 и -1 соответственно, ζ не принимает значения 0 и -1, η принимает значения $+1$ или -1. Самонормализованные подалгебры помечены знаком равенства. Верхний индекс означает, что в указанной подалгебре значение параметра берется равным верхнему индексу (например, через 7.2^0 обозначается подалгебра 7.2 с $\alpha = 0$).

Инвариантные решения ранга 1 строятся на основе подалгебр размерности 2. Среди них не удовлетворяют необходимому условию существования инвариантного решения подалгебры 2.15 и 2.30. Для всех остальных подалгебр ниже приводятся инвариантные решения. Для каждой подмодели указываются номер подалгебры, на основе которой она построена, инварианты соответствующей подгруппы и вид решения. Из-за ограниченности объема публикации фактор-система здесь не приводится; ее легко получить, подставив вид решения в систему (1)–(4). Если возможно частичное или полное интегрирование фактор-системы, то приводится его результат. Если среди операторов, определяющих подалгебру, есть оператор X_5, то удобно систему (1)–(4) записывать не в декартовых, а в полярных координатах. Связь между декартовыми и полярными координатами определяется формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad u = U\cos\varphi - V\sin\varphi, \quad v = U\sin\varphi - V\cos\varphi.$$

Тогда операторы в полярных координатах имеют вид

$$X_5 = -\partial_\varphi, \quad X_7 = t\partial_t + r\partial_r - \rho\partial_\rho - p\partial_p,$$
$$X_8 = r\partial_r + U\partial_U + V\partial_V + 2(\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2\omega p\partial_p.$$

Через c_1, ρ_0, p_0 обозначены константы интегрирования.

Таблица 3

Номер подалгебры	N	Nor$N$
7.1	$1;2;3;4;5+\alpha 8;6;7+\beta 8$	L_8
7.2	$1;2;3;4;5+\alpha 7;6;8$	L_8
7.3	$1;2;3;4;5;7;8$	$=7.3$
7.4	$1;2;3;4;6;7;8$	L_8
6.1	$1;2;3;4;5+\alpha 7+\beta 8;6$	L_8
6.2	$1;2;3;4;5+\alpha 8;7+\beta 8$	7.3
6.3	$1;2;3;4;5+\delta 7;8$	7.3
6.4	$1;2;3;4;5+\alpha 8;6+\eta 8$	7.2^0
6.5	$1;2;3;4;6;7+\alpha 8$	L_8
6.6	$1;2;3;4;5+6;8$	7.2^0
6.7	$1;2;3;4;5;8$	L_8
6.8	$1;2;5;6;7;8$	$=6.8$
6.9	$1;2;3;6;7;8$	$=6.9$
6.10	$1;2;3;4;7;8$	$=6.10$
6.11	$1;2;3;4;6;8$	L_8
5.1	$1;2;3;4;5+\delta 7+\alpha 8$	7.3
5.2	$1;2;5+\alpha 8;6;7+\beta 8$	6.8
5.3	$1;2;3;4;5+\alpha 8$	L_8
5.4	$1;2;5+\alpha 7;6;8$	6.8
5.5	$1;2;3;4;5+6+\alpha 8$	7.2^0
5.6	$1;2;3;6;7+\alpha 8$	7.4
5.7	$1;2;3;4;7+\alpha 8$	7.3
5.8	$3;4;5;7;8$	$=5.8$
5.9	$1;2;5;7;8$	$=5.9$
5.10	$1;3;6;7;8$	$=5.10$
5.11	$1;3;4;7;8$	6.10
5.12	$1;2;6;7;8$	6.7
5.13	$1;2;3;7;8$	$=5.13$
5.14	$1;2;3;4+6;7+8$	$=5.14$
5.15	$1;2;3;6;4+7$	6.5^0
5.16	$1;2;3;6;8$	6.9
5.17	$1;2;3;4;8$	L_8
5.18	$1;2;3;4;6+\eta 8$	7.2^0
5.19	$1;2;3;4;6$	L_8
4.1	$1;2;5+\alpha 7+\beta 8;6$	6.8
4.2	$3;4;5+\alpha 8;7+\beta 8$	5.8
4.3	$1;2;5+\alpha 8;7+\beta 8$	5.9
4.4	$3;4;5+\alpha 7;8$	5.8
4.5	$1;2;5+\alpha 7;8$	5.9
4.6	$1;3;6;7+\alpha 8$	5.10
4.7	$1;2;6;7+\alpha 8$	6.8
4.8	$1;3;4;7+\alpha 8$	$=4.8$
4.9	$1;2;3;7+\alpha 8$	5.13
4.10	$1;2;5+\alpha 8;6+\eta 8$	5.4^0
4.11	$1;2;5+6;8$	5.4^0
4.12	$5;6;7;8$	$=4.12$
4.13	$1;6;7;8$	$=4.13$
4.14	$3;4;7;8$	5.8
4.15	$1+\alpha 2;3;7;8$	$=4.15$
4.16	$2;3;7;8$	$=4.16$
4.17	$1;2;7;8$	5.9
4.18	$1;3;6;2+7-8$	5.6^{-1}

Продолжение табл. 3

Номер подалгебры	N	Nor$N$
4.19	$1;3;4;2+7-8$	5.7^{-1}
4.20	$1;3;4+6;7+8$	$=4.20$
4.21	$1;2;3+6;7+8$	$=4.21$
4.22	$1;2;3+7;6$	6.5^0
4.23	$1;2;3;4+7$	5.7
4.24	$1;2;3;6+\eta 8$	6.9
4.25	$1;3;6;8$	5.10
4.26	$1;2;6;8$	6.8
4.27	$1;3;4;8$	5.11
4.28	$1;2;3;8$	6.9
4.29	$1;2;3;4+6$	6.11
4.30	$1;2;3;6$	7.4
4.31	$1;2;3;4$	L_8
3.1	$3;4;5+\alpha 7+\beta 8$	5.8
3.2	$1;2;5+\delta 7+\alpha 8$	5.9
3.3	$5+\alpha 8;6;7+\beta 8$	4.12
3.4	$1;2;5+\alpha 8$	6.8
3.5	$5+\alpha 7;6;8$	4.12
3.6	$1;2;5+6+\alpha 8$	5.4^0
3.7	$5;7;8$	$=3.7$
3.8	$1;6;7+\delta 8$	4.13
3.9	$3;4;7+\varepsilon 8$	5.8
3.10	$1+\alpha 2;3;7+\zeta 8$	4.15
3.11	$2;3;7+\zeta 8$	4.16
3.12	$1;2;7+\delta 8$	7.3
3.13	$6;7;8$	4.12
3.14	$3;7;8$	$=3.14$
3.15	$1;7;8$	$=3.15$
3.16	$1;6;2+7-8$	$=3.16$
3.17	$3;4;1+7-8$	6.10
3.18	$1+\alpha 2;3;2+7-8$	5.13
3.19	$2;3;1+7-8$	5.13
3.20	$1;3+\alpha 4+6;7+8$	$=3.20$
3.21	$1;4+6;7+8$	$=3.21$
3.22	$3;4;7-8$	7.3
3.23	$1+\alpha 2;3;7-8$	5.13
3.24	$2;3;7-8$	5.13
3.25	$1;6;3+7$	4.6^0
3.26	$1;4;3+7$	4.8^0
3.27	$1;2;3+7$	5.7^0
3.28	$1;3+\alpha 4;4+7$	4.8^0
3.29	$1;3+\alpha 4;7$	5.11
3.30	$1;4;7$	5.11
3.31	$1;2;7$	5.9
3.32	$1;6;7$	5.10
3.33	$1;3;6+\eta 8$	4.25
3.34	$1;2;6+\eta 8$	5.4^0
3.35	$1;6;8$	4.13
3.36	$3;4;8$	5.8
3.37	$1+\alpha 2;3;8$	4.15
3.38	$2;3;8$	4.16
3.39	$1;2;8$	6.8
3.40	$1;3;4+6$	5.14

Окончание табл. 3

Номер подалгебры	N	Nor$N$
3.41	$1;2;3+6$	6.5^1
3.42	$1;3;6$	6.9
3.43	$1;2;6$	L_8
3.44	$1;3;4$	6.10
3.45	$1;2;3$	7.4
2.1	$6;5+\alpha 7+\beta 8$	4.12
2.2	$5+\alpha 7;7+\beta 8$	3.7
2.3	$5+\delta 7;8$	3.7
2.4	$5+\alpha 8;6+\eta 8$	3.5^0
2.5	$6;7+\varepsilon 8$	4.12
2.6	$3;7+\delta 8$	3.14
2.7	$1;7+\delta 8$	3.15
2.8	$5+6;8$	3.5^0
2.9	$5;8$	4.12
2.10	$7;8$	3.7
2.11	$6;1+7-8$	5.12
2.12	$3;2+7-8$	5.13
2.13	$1;2+7-8$	4.17
2.14	$3;1+\alpha 2+7-8$	5.13
2.15	$6;7-8$	5.12
2.16	$3;4+7$	3.9^0
2.17	$1;4+7$	4.8^0
2.18	$1;3+\alpha 4+7$	4.8^0
2.19	$1;3+6$	5.6^1
2.20	$3;7$	4.14
2.21	$1;7$	5.11
2.22	$1;6+\eta 8$	4.13
2.23	$6;8$	4.12
2.24	$3;8$	3.14
2.25	$1;8$	4.13
2.26	$1;\alpha 3+4+6$	5.14
2.27	$1;6$	6.9
2.28	$3;4$	7.3
2.29	$1+\delta 2;3$	6.10
2.30	$1;3$	7.4
2.31	$2;3$	6.10
2.32	$1;2$	L_8
1.1	$5+\delta 7+\alpha 8$	3.7
1.2	$5+\alpha 8$	4.12
1.3	$5+6+\alpha 8$	3.5^0
1.4	$7+\delta 8$	3.7
1.5	$1+7-8$	3.12^{-1}
1.6	$3+7$	3.9^0
1.7	7	5.8
1.8	$6+\eta 8$	3.5^0
1.9	8	4.12
1.10	$3+6$	3.41
1.11	6	6.8
1.12	3	6.10
1.13	1	7.4

Подмодель 2.1. Инварианты подгруппы: $r\exp\{(\alpha+\beta)\varphi\}$, $U\exp\{\beta\varphi\}$, $V\exp\{\beta\varphi\}$, $\rho\exp\{(2\beta(\omega-1)-\alpha)\varphi\}$, $p\exp\{(2\beta\omega-\alpha)\varphi\}$. Вид решения: $U=U_1(\xi)\exp\{-\beta\varphi\}$, $V=V_1(\xi)\exp\{-\beta\varphi\}$, $\rho=\rho_1(\xi)\exp\{(\alpha-2\beta(\omega-1))\varphi\}$, $p=p_1(\xi)\exp\{(\alpha-2\beta\omega)\varphi\}$, $\xi=r\exp\{(\alpha+\beta)\varphi\}$.

Подмодель 2.2. Инварианты подгруппы: $rt^{-\beta-1}\exp\{-\alpha\beta\varphi\}, Ut/r, Vt/r, \rho r^{2-2\omega}t^{-1+2\omega}$, $pr^{-2\omega}t^{1+2\omega}$. Вид решения: $U=U_1(\xi)r/t$, $V=V_1(\xi)r/t$, $\rho=\rho_1(\xi)r^{2\omega-2}t^{1-2\omega}$, $p=p_1(\xi)r^{2\omega}t^{-1-2\omega}$, $\xi=rt^{-\beta-1}\exp\{-\alpha\beta\varphi\}$.

Подмодель 2.3. Инварианты подгруппы: $\delta\varphi+\ln t, Ut/r, Vt/r, \rho r^{2-2\omega}t^{-1+2\omega}, pr^{-2\omega}t^{1+2\omega}$. Вид решения: $U=U_1(\xi)r/t$, $V=V_1(\xi)r/t$, $\rho=\rho_1(\xi)r^{2\omega-2}t^{1-2\omega}$, $p=p_1(\xi)r^{2\omega}t^{-1-2\omega}$, $\xi=\delta\varphi+\ln t$.

Подмодель 2.4. Инварианты подгруппы: $\alpha\varphi-\eta t+\ln r$, U/r, V/r, $\rho r^{2-2\omega}$, $pr^{-2\omega}$. Вид решения: $U=U_1(\xi)r$, $V=V_1(\xi)r$, $\rho=\rho_1(\xi)r^{2\omega-2}$, $p=p_1(\xi)r^{2\omega}$, $\xi=\alpha\varphi-\eta t+\ln r$.

Подмодель 2.5. Инварианты подгруппы: y/x, $ux^{-\varepsilon/(\varepsilon+1)}$, $vx^{-\varepsilon/(\varepsilon+1)}$, $\rho x^{(1-2\varepsilon(\omega-1))/(\varepsilon+1)}$, $px^{(1-2\varepsilon\omega)/(\varepsilon+1)}$. Вид решения: $u=u_1(\xi)x^{\varepsilon/(\varepsilon+1)}$, $v=v_1(\xi)x^{\varepsilon/(\varepsilon+1)}$, $\rho=\rho_1(\xi)x^{(2\varepsilon(\omega-1)-1)/(\varepsilon+1)}$, $p=p_1(\xi)x^{(2\varepsilon\omega-1)/(\varepsilon+1)}$, $\xi=y/x$.

Подмодель 2.6. Инварианты подгруппы: $yt^{-\delta-1}$, $(ut-x)t^{-\delta-1}$, $vt^{-\delta}$, $\rho t^{1-2\delta(\omega-1)}$, $pt^{1-2\delta\omega}$. Вид решения: $u=u_1(\xi)t^{\delta}+x/t$, $v=v_1(\xi)t^{\delta}$, $\rho=\rho_1(\xi)t^{2\delta(\omega-1)-1}$, $p=p_1(\xi)t^{2\delta\omega-1}$, $\xi=yt^{-\delta-1}$.

Подмодель 2.7. Инварианты подгруппы: $yt^{-\delta-1}$, $ut^{-\delta}$, $vt^{-\delta}$, $\rho t^{1-2\delta(\omega-1)}$, $pt^{1-2\delta\omega}$. Вид решения: $u=u_1(\xi)t^{\delta}$, $v=v_1(\xi)t^{\delta}$, $\rho=\rho_1(\xi)t^{2\delta(\omega-1)-1}$, $p=p_1(\xi)t^{2\delta\omega-1}$, $\xi=yt^{-\delta-1}$.

Подмодель 2.8. Инварианты подгруппы: $t+\varphi$, U/r, V/r, $\rho r^{2-2\omega}$, $pr^{-2\omega}$. Вид решения: $U=U_1(\xi)r$, $V=V_1(\xi)r$, $\rho=\rho_1(\xi)r^{2\omega-2}$, $p=p_1(\xi)r^{2\omega}$, $\xi=t+\varphi$.

Подмодель 2.9. Инварианты подгруппы: t, U/r, V/r, $\rho r^{2-2\omega}$, $pr^{-2\omega}$. Вид решения: $U=U_1(t)r$, $V=V_1(t)r$, $\rho=\rho_1(t)r^{2\omega-2}$, $p=p_1(t)r^{2\omega}$.

Подмодель 2.10. Инварианты подгруппы: $y/x, ut/x, vt/x, \rho t^{2\omega-1}x^{2-2\omega}, pt^{2\omega+1}x^{-2\omega}$. Вид решения: $u=u_1(\xi)x/t$, $v=v_1(\xi)x/t$, $\rho=\rho_1(\xi)t^{1-2\omega}x^{2-2\omega}$, $p=p_1(\xi)t^{-1-2\omega}x^{2\omega}$, $\xi=y/x$.

Подмодель 2.11. Инварианты подгруппы: y, $u\exp\{x\}$, $v\exp\{x\}$, $\rho\exp\{(2\omega-1)x\}$, $p\exp\{(2\omega+1)x\}$. Вид решения: $u = u_1(y)\exp\{-x\}$, $v = v_1(y)\exp\{-x\}$, $\rho = \rho_1(y)\exp\{(1-2\omega)x\}$, $p = p_1(y)\exp\{-(1+2\omega)x\}$.

Подмодель 2.12. Инварианты подгруппы: $y-\ln t$, $ut-x$, vt, $\rho t^{2\omega-1}$, $pt^{2\omega+1}$. Вид решения: $u = u_1(\xi)/t + x/t$, $v = v_1(\xi)/t$, $\rho = \rho_1(\xi)t^{1-2\omega}$, $p = p_1(\xi)t^{-1-2\omega}$, $\xi = y - \ln t$.

Подмодель 2.13. Инварианты подгруппы: $y - \ln t$, ut, vt, $\rho t^{2\omega-1}$, $pt^{2\omega+1}$. Вид решения: $u = u_1(\xi)/t$, $v = v_1(\xi)/t$, $\rho = \rho_1(\xi)t^{1-2\omega}$, $p = p_1(\xi)t^{-1-2\omega}$, $\xi = y - \ln t$.

Подмодель 2.14. Инварианты подгруппы: $y - \alpha\ln t$, $ut - x + \ln t$, vt, $\rho t^{2\omega-1}$, $pt^{2\omega+1}$. Вид решения: $u = (u_1(\xi) + x - \ln t)/t$, $v = v_1(\xi)/t$, $\rho = \rho_1(\xi)t^{1-2\omega}$, $p = p_1(\xi)t^{-1-2\omega}$, $\xi = y - \alpha\ln t$.

Подмодель 2.16. Инварианты подгруппы: $y/t - \ln t$, $u - x/t$, $v - \ln t$, ρt, pt. Вид решения: $u = u_1(\xi) + x/t$, $v = v_1(\xi) + \ln t$, $\rho = \rho_1(\xi)/t$, $p = p_1(\xi)/t$, $\xi = y/t - \ln t$.

Подмодель 2.17. Инварианты подгруппы: $y/t - \ln t$, u, $v - \ln t$, ρt, pt. Вид решения: $u = u(\xi)$, $v = v_1(\xi) + \ln t$, $\rho = \rho_1(\xi)/t$, $p = p_1(\xi)/t$, $\xi = y/t - \ln t$.

Подмодель 2.18. Инварианты подгруппы: $y/t - \alpha\ln t$, $u - \ln t$, $v - \alpha\ln t$, ρt, pt. Вид решения: $u = u_1(\xi) + \ln t$, $v = v_1(\xi) + \alpha\ln t$, $\rho = \rho_1(\xi)/t$, $p = p_1(\xi)/t$, $\xi = y/t - \alpha\ln t$.

Подмодель 2.19. Инварианты подгруппы: y, $u - t$, v, ρ, p. Вид решения: $u = u_1(y) + t$, $v = v(y)$, $\rho = \rho(y)$, $p = p(y)$.

Подмодель 2.20. Инварианты подгруппы: y/t, $u - x/t$, v, ρt, pt. Вид решения: $u = u_1(\xi) + x/t$, $v = v(\xi)$, $\rho = \rho_1(\xi)/t$, $p = p_1(\xi)/t$, $\xi = y/t$.

Подмодель 2.21. Инварианты подгруппы: y/t, u, v, ρt, pt. Вид решения: $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $\rho = \rho_1(\xi)/t$, $p = p_1(\xi)/t$, $\xi = y/t$.

Подмодель 2.22. Инварианты подгруппы: $y\exp\{-\eta t\}$, $u\exp\{-\eta t\}$, $v\exp\{-\eta t\}$, $\rho\exp\{2(1-\omega)\eta t\}$, $p\exp\{-2\omega\eta t\}$. Вид решения: $u = u_1(\xi)\exp\{\eta t\}$, $v = v_1(\xi)\exp\{\eta t\}$, $\rho = \rho_1(\xi)\exp\{2(\omega-1)\eta t\}$, $p = p_1(\xi)\exp\{2\omega\eta t\}$, $\xi = y\exp\{-\eta t\}$.

Подмодель 2.23. Инварианты подгруппы: y/x, u/x, v/x, $\rho x^{2-2\omega}$, $px^{-2\omega}$. Вид решения: $u = u_1(\xi)x$, $v = v_1(\xi)x$, $\rho = \rho_1(\xi)x^{2\omega-2}$, $p = p_1(\xi)x^{2\omega}$, $\xi = y/x$.

Подмодель 2.24. Инварианты подгруппы: t, $(tu-x)/y$, v/y, $\rho y^{2-2\omega}$, $py^{-2\omega}$. Вид решения: $u = (u_1(t)y + x)/t$, $v = v_1(t)y$, $\rho = \rho_1(t)y^{2\omega-2}$, $p = p_1(t)y^{2\omega}$.

Подмодель 2.25. Инварианты подгруппы: t, u/y, v/y, $\rho y^{2-2\omega}$, $py^{-2\omega}$. Вид решения: $u = u_1(t)y$, $v = v_1(t)y$, $\rho = \rho_1(t)y^{2\omega-2}$, $p = p_1(t)y^{2\omega}$.

Подмодель 2.26. Инварианты подгруппы: $2y - t^2$, $u - \alpha t$, $v - t$, ρ, p. Вид решения: $u = u_1(\xi) + \alpha t$, $v = v_1(\xi) + t$, $\rho = \rho(\xi)$, $p = p(\xi)$, $\xi = 2y - t^2$.

Подмодель 2.27. Инварианты подгруппы: y, u, v, ρ, p. Вид решения: $u = u(y)$, $v = v(y)$, $\rho = \rho(y)$, $p = p(y)$.

Интегрирование фактор-системы (с точностью до преобразований, определяемых операторами X_3 и X_7) приводит к двум случаям:

1) решение восстанавливается из системы

$$v = 1/\rho, \qquad \mu u' = u, \qquad 4\mu\rho'/3 = (c_1\rho - p\rho - 1)\rho,$$

$$vp' + \gamma pv' = \frac{\gamma-1}{R}k_0\Bigl(\mu\Bigl(\frac{p}{\rho}\Bigr)'\Bigr)' + (\gamma-1)\mu(u'^2 + 4v'^2/3);$$

2) решение восстанавливается из системы

$$v = 0, \qquad p = p_0, \qquad u' = \rho^{\omega}, \qquad \rho' = Ru\rho^{\omega+2}/(k_0p_0).$$

Подмодель 2.28. Инварианты подгруппы: t, $tu - x$, $tv - y$, ρ, p. Вид решения: $u = (u_1(t) + x)/t$, $v = (v_1(t) + y)/t$, $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$.

Интегрирование фактор-системы приводит (с точностью до преобразований, определяемых операторами X_1 и X_2) к решению

$$u = x/t, \qquad v = y/t, \qquad \rho = \rho_0/t^2, \qquad p' + 2\gamma p/t = 4(\gamma-1)\rho_0^{-\omega}t^{\omega-2}p^{\omega}/3.$$

Подмодель 2.29. Инварианты подгруппы: t, $\delta(tu - x) + y$, v, ρ, p. Вид решения: $u = ((u_1(t) - y)/\delta + x)/t$, $v = v(t)$, $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$.

Интегрирование фактор-системы приводит (с точностью до преобразований, определяемых операторами X_2 и X_4) к решению

$$u = \frac{x}{t} - \frac{y}{\delta t}, \qquad v = 0, \qquad \rho = \frac{\rho_0}{t}, \qquad p' + \frac{\gamma p}{t} = \frac{(\gamma - 1)(4\delta^2/3 + 1)}{\delta^2 t^2}\mu.$$

Подмодель 2.31. Инварианты подгруппы: t, $tu-x$, v, ρ, p. Вид решения: $u = (u_1(t)+x)/t$, $v = v(t)$, $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$.

Интегрирование фактор-системы приводит (с точностью до преобразований, определяемых операторами X_1 и X_4) к решению

$$u = x/t, \qquad v = 0, \qquad \rho = \rho_0/t, \qquad p' + \gamma p/t = 4(\gamma - 1)\rho_0^{-\omega} t^{\omega - 2} p^{\omega}/3.$$

Подмодель 2.32. Инварианты подгруппы: t, u, v, ρ, p. Вид решения: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\rho = \rho(t)$, $p = p(t)$.

Интегрирование фактор-системы приводит (с точностью до преобразований, определяемых операторами X_3 и X_4) к состоянию покоя:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \rho = \rho_0, \qquad p = p_0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01888).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Бублик В. В.** Групповая классификация двумерных уравнений движения вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 27–34.
3. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.

Поступила в редакцию 3/VI 1996 г.