УДК 532.529:534.2

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ПОКРЫТЫХ ОБОЛОЧКОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Д. А. Губайдуллин, Ю. В. Федоров

Институт механики и машиностроения — обособленное структурное подразделение
Федерального исследовательского центра "Казанский научный центр РАН",
420111 Казань, Россия
E-mails: gubaidullin@imm.knc.ru, kopperfildd@ya.ru

Получено модифицированное уравнение Рэлея — Ламба, учитывающее радиальные колебания покрытой вязкоупругой оболочкой капли жидкости, в центре которой находится пузырек газа и которая помещена в вязкоупругую среду. Для случая малых колебаний включения решена задача о теплообмене между газом, жидкой фазой, вязкоупругой оболочкой и несущей жидкостью. Выведено дисперсионное уравнение для пузырьковой среды. Исследовано влияние оболочки включений, вязкоупругости несущей фазы на динамику акустических волн. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: акустические волны, пузырьки газа, прослойка жидкости, вязкоупругая оболочка, модифицированное уравнение Рэлея — Ламба, межфазный теплообмен, дисперсионное уравнение.

DOI: 10.15372/PMTF20200403

Введение. Покрытые вязкоупругой оболочкой пузырьки встречаются во многих областях, но основное применение они нашли в биомедицине в качестве контрастных веществ для ультразвуковой диагностики [1, 2]. Существующие теоретические модели основаны на различных формах записи уравнений колебаний сферических пузырьков с учетом упругости, вязкости поверхностного слоя. В работе [3] получено модифицированное уравнение Рэлея — Плессета, учитывающее радиальные колебания газового пузырька с вязкоупругой оболочкой конечной толщины в жидкости на основе реологического уравнения Кельвина — Фойгта, а также проанализировано влияние параметров оболочки на динамику акустических волн. В [4] модель [3] была упрощена для случая, когда толщина вязкоупругой оболочки пузырьков близка к нулю, и теоретически и экспериментально исследовано влияние полимерной оболочки микропузырьков на затухание импульсного возмущения. В работе [5] на основе результатов [3] получена математическая модель, определяющая распространение акустических волн в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой, в приближении взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов [6]. Однако с появлением новых веществ покрытые оболочкой газовые пузырьки реже используются в прикладных исследованиях. В последнее время большой интерес представляет изучение

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-297.2020.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00442 А).

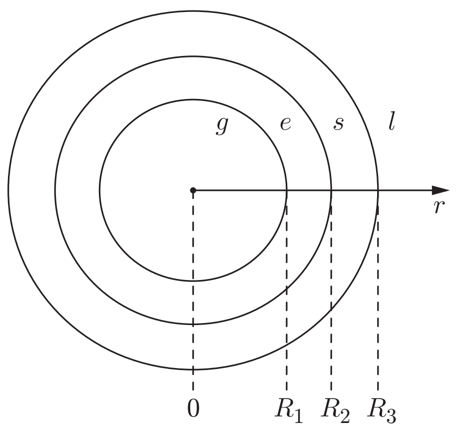

Рис. 1. Схема включения

эмульсий с фазовым сдвигом, обладающих следующей особенностью. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки газа. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [7]. Эмульсии с фазовым сдвигом активно используются в газовой эмболотерапии [8–10]. Данный метод направлен на борьбу с раковыми клетками и опухолями. В кровеносные сосуды, питающие раковые клетки, вводятся капли специального вещества, каждая из которых заключена в вязкоупругую биологическую оболочку. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки газа, которые, увеличиваясь, блокируют кровеносные сосуды. В отсутствие кровоснабжения опухоли не могут расти и распространяться, со временем происходит их истощение.

В данной работе исследуются покрытые оболочкой капли жидкости, в центре которых находятся пузырьки газа, а также динамика акустических волн в вязкоупругой среде с данными включениями.

Модифицированное уравнение Рэлея — Ламба. Рассмотрим покрытую вязкоупругой оболочкой каплю жидкости с пузырьком газа в центре, находящуюся в массиве неподвижной вязкоупругой жидкости (рис. 1). Вследствие непроницаемости жидкой оболочки скорость изменения ее радиуса $\dot{R}_1 = dR_1/dt$ совпадает с радиальной скоростью движения на поверхности $u(R_1, t)$. Уравнение неразрывности в сферической системе координат при наличии центральной симметрии запишем следующим образом:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\,(r^2u) = 0$$

(r — радиальная координата). Решение данного уравнения имеет вид

$$u(r,t) = \frac{R_1^2(t)}{r^2}\,\dot{R}_1(t). \tag{1}$$

Уравнение сохранения импульса в сферических координатах представим в виде

$$\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r}, \tag{2}$$

где ρ — плотность; p — давление; τ — компоненты тензора напряжений. В случае сферы компоненты тензора связаны соотношением [11] $\tau_{rr} = -(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi})$. Проинтегрировав уравнение (2) от R_1 до ∞ с учетом (1), получаем

$$\rho_s\Big(R_1F\ddot{R}_1+\frac{4F-H}{2}\,\dot{R}_1^2\Big)=p_e(R_1,t)-p_e(R_2,t)+p_s(R_2,t)-p_s(R_3,t)+p_l(R_3,t)-p_\infty+\\+\tau_{rr,e}(R_2,t)-\tau_{rr,e}(R_1,t)+\tau_{rr,s}(R_3,t)-\tau_{rr,s}(R_2,t)-\tau_{rr,l}(R_3,t)+\\+3\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\tau_{rr,e}}{r}\,dr+3\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{\tau_{rr,s}}{r}\,dr+3\int\limits_{R_3}^{\infty}\frac{\tau_{rr,l}}{r}\,dr, \qquad (3)$$

где

$$F=\frac{\rho_e}{\rho_s}+\frac{\rho_s-\rho_e}{\rho_s}\,\frac{R_1}{R_2}+\frac{\rho_l-\rho_s}{\rho_s}\,\frac{R_1}{R_3},\qquad H=\frac{\rho_e}{\rho_s}+\frac{\rho_s-\rho_e}{\rho_s}\,\frac{R_1^4}{R_2^4}+\frac{\rho_l-\rho_s}{\rho_s}\,\frac{R_1^4}{R_3^4},$$

интервал от R_1 до R_2 соответствует параметрам жидкой фазы (индекс e), от R_2 до R_3 — параметрам вязкоупругого слоя (индекс s), от R_3 до ∞ — параметрам несущей жидкости (индекс l).

Граничные условия в области между двумя движущимися средами с учетом сил поверхностного натяжения [11] принимают вид

$$p_e(R_1,t)-p_g(R_1,t)+2\sigma_1/R_1=\tau_{rr,e}(R_1,t)-\tau_{rr,g}(R_1,t); \qquad (4)$$

$$p_s(R_2,t)-p_e(R_2,t)+2\sigma_2/R_2=\tau_{rr,s}(R_2,t)-\tau_{rr,e}(R_2,t); \qquad (5)$$

$$p_l(R_3,t)-p_s(R_3,t)+2\sigma_3/R_3=\tau_{rr,l}(R_3,t)-\tau_{rr,s}(R_3,t) \qquad (6)$$

(σ — коэффициент поверхностного натяжения). В случае если касательные напряжения отсутствуют ($\tau_{rr}=0$), имеет место простое уравнение Лапласа [12]. Компоненты тензора напряжений для жидкости и газа задаются следующим образом:

$$\tau_{rr,e}=2\mu_e\,\frac{\partial u}{\partial r},\qquad \tau_{rr,g}=2\mu_g\,\frac{\partial u}{\partial r} \qquad (7)$$

(μ — динамическая вязкость). Заметим, что порядок величины $\tau_{rr,g}$ меньше, чем порядок $\tau_{rr,l}$, поскольку вязкость газа меньше вязкости жидкости, поэтому далее данной величиной можно пренебречь. Вязкоупругость несущей среды учитывается при использовании реологической модели Кельвина — Фойгта, поэтому тензор напряжений задается соотношением [13]

$$\tau_{rr,l}=-\frac{4R_3^2}{r^3}\Big(\frac{G_lR_3}{3}\Big(1-\frac{R_{30}^3}{R_3^3}\Big)+\mu_l\dot{R}_3\Big). \qquad (8)$$

Аналогичным образом задается тензор напряжений для вязкоупругой оболочки пузырька [3]:

$$\tau_{rr,s}=-4R_2^2[G_s(R_2-R_{e2})+\mu_s\dot{R}_2]/r^3, \qquad (9)$$

где

$$R_{e2}=R_{20}(1+Z),\quad Z=\frac{1}{4G_s}\,\frac{R_{30}^3}{V_s}\Big(\frac{2\sigma_2}{R_{20}}+\frac{2\sigma_3}{R_{30}}\Big),\quad V_s=R_{30}^3-R_{20}^3.$$

С учетом (4)–(9) и условия несжимаемости оболочки $R_1^2\dot{R}_1=R_2^2\dot{R}_2$ после алгебраических преобразований уравнение (3) принимает вид

$$\rho_s\Big(R_1F\ddot{R}_1+\frac{4F-H}{2}\,\dot{R}_1^2\Big)=p_g-p_\infty-\frac{2\sigma_1}{R_1}-\frac{2\sigma_2}{R_2}-\frac{2\sigma_3}{R_3}-4\,\frac{G_sV_s}{R_3^3}\Big(1-\frac{R_{e2}}{R_2}\Big)-\\-4\,\frac{\dot{R}_1}{R_1}\Big(\mu_l\,\frac{R_1^3}{R_3^3}+\mu_e\Big(1-\frac{R_1^3}{R_2^3}\Big)+\mu_sV_s\,\frac{R_1^3}{R_2^3R_3^3}\Big)-\frac{4G_l}{3R_3^3}\,(R_3^3-R_{30}^3). \qquad (10)$$

Линеаризуя полученное модифицированное уравнение Рэлея — Ламба (10), получаем $\psi = \psi_0 + \psi'$, $\psi' \ll \psi_0$, где $\psi = (R_1, R_2, R_3, p)$. Учитывая условие несжимаемости оболочки $R_1^2\dot{R}_1 = R_2^2\dot{R}_2 = R_3^2\dot{R}_3$, находим связь между возмущениями $R_{30}^2 R_3' = R_{20}^2 R_2' = R_{10}^2 R_1'$. Тогда линеаризованное уравнение (10) принимает вид

$$\ddot{R}_1' + (\delta_l + \delta_e + \delta_s)\dot{R}_1' + XR_1' = \frac{p_g' - p_\infty'}{\rho_s \eta R_{10}}, \tag{11}$$

где

$$\delta_l = \frac{4\mu_l}{\rho_s \eta R_{10}^2}\,\frac{R_{10}^3}{R_{30}^3}, \quad \delta_e = \frac{4\mu_e}{\rho_s \eta R_{10}^2}\Big(1 - \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3}\Big), \quad \delta_s = \frac{4\mu_s V_s}{\rho_s \eta R_{10}^2}\,\frac{R_{10}^3}{R_{20}^3 R_{30}^3},$$

$$\eta = \frac{\rho_e}{\rho_s} + \frac{\rho_s - \rho_e}{\rho_s}\,\frac{R_{10}}{R_{20}} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\,\frac{R_{10}}{R_{30}},$$

$$X = \frac{1}{\rho_s \eta R_{10}^2}\Big\{\frac{4V_s G_s R_{10}^3}{R_{20}^3 R_{30}^3}\Big[1 + Z\Big(1 + 3\frac{R_{20}^3}{R_{30}^3}\Big)\Big] + \frac{4G_l R_{10}^3}{R_{30}^3} - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} - \frac{2\sigma_3 R_{10}^3}{R_{30}^4}\Big\}.$$

В случае если жидкая фаза и вязкоупругая оболочка пузырька отсутствуют ($R_{30} = R_{20} = R_{10}$, $\rho_l = \rho_s = \rho_e$) и не учитывается упругость несущей фазы ($G_l = 0$), а также поверхностное натяжение, имеем $\delta_s = 0$, $\delta_e = 0$, $X = 0$, и уравнение Рэлея принимает стандартный вид.

Межфазный теплообмен. Для учета межфазного теплообмена уравнения теплопроводности для газа, жидкой фазы и вязкоупругой оболочки [6, 14] представим в виде

$$\rho_g c_{pg}\,\frac{dT_g}{dt} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\lambda_g r^2\,\frac{\partial T_g}{\partial r}\Big) + \frac{dp_g}{dt}, \qquad 0 < r < R_1; \tag{12}$$

$$\rho_e c_{pe}\,\frac{dT_e}{dt} = \lambda_e\,\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2}, \qquad R_1 < r < R_2; \tag{13}$$

$$\rho_s c_{ps}\,\frac{dT_s}{dt} = \lambda_s\,\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}, \qquad R_2 < r < R_3. \tag{14}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость; λ — теплопроводность. В отсутствие внешнего подвода тепла среднемассовую температуру несущей жидкости будем считать постоянной: $T_l = T_0 = \mathrm{const}$. В уравнении (12) давление p_g полагается только функцией времени $p_g(t)$, т. е. выполняется условие гомобаричности [6]. Данное предположение позволит избежать решения уравнения движения газа внутри пузырька и таким образом упростить систему уравнений. При постановке задачи необходимо задать граничные условия, для температур имеющие вид

$$r = 0\colon \quad \frac{\partial T_g}{\partial r} = 0, \qquad r = R_1\colon \quad T_g = T_e, \quad \lambda_g\,\frac{\partial T_g}{\partial r} = \lambda_e\,\frac{\partial T_e}{\partial r}; \tag{15}$$

$$r = R_2\colon \quad T_e = T_s, \quad \lambda_e\,\frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r}, \qquad r = R_3\colon \quad T_s = T_0 = \mathrm{const}\,. \tag{16}$$

Первое условие в (15) означает отсутствие потока тепла в центр сферического пузырька, остальные условия в (15), (16) характеризуют равенство температур и потоков на границах. Решение задачи (12)–(16) для случая колебаний пузырька с малой амплитудой находим в виде действительных частей комплексных функций

$$T_j = T_0 + T_j'\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad j = g, e, s, \qquad p_g = p_0 + p_g'\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{17}$$

где ω — частота возмущений. Подставляя решение (17) в уравнение (12), получаем

$$\frac{\partial^2 T_g'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial T_g'}{\partial r} - \frac{i\omega}{\varkappa_g}\,T_g' = -\frac{i\omega}{\lambda_g}\,p_g', \qquad \varkappa_g = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_{pg}}. \tag{18}$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (18) можно получить в виде суммы частного решения $T'_g = \varkappa_g p'_g/\lambda_g$ и линейной комбинации двух независимых решений однородного уравнения

$$T'_g = \frac{\varkappa_g}{\lambda_g}\Big(1 + G_1\,\frac{\operatorname{sh}(rY_g)}{r} + G_2\,\frac{\operatorname{ch}(rY_g)}{r}\Big)p'_g, \qquad Y_g = \sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa_g}}$$

(G_1, G_2 — неизвестные переменные). Аналогичным образом находим решения уравнений (13), (14)

$$T'_e = E_1 \operatorname{sh}[(r - R_{10})Y_e] + E_2 \operatorname{ch}[(r - R_{10})Y_e], \qquad Y_e = \sqrt{i\omega/\varkappa_e},$$

$$T'_s = S_1 \operatorname{sh}[(r - R_{20})Y_s] + S_2 \operatorname{ch}[(r - R_{20})Y_s], \qquad Y_s = \sqrt{i\omega/\varkappa_s}.$$

Неизвестные переменные G_1, G_2, E_1, E_2, S_1, S_2 находим из граничных условий (15), (16). Получаем интеграл энергии для пузырька газа. В предположении, что область внутри пузырька заполнена совершенным газом, уравнение состояния записываем в виде

$$p_g = \rho_g R T_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\, c_{pg}\rho_g T_g \tag{19}$$

(R — газовая постоянная; γ — показатель адиабаты).

Уравнение неразрывности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{d\rho_g}{dt} + 2\,\frac{\rho_g u(R_1, t)}{r} = 0. \tag{20}$$

Дифференцируя уравнение (19) по времени t с учетом (20), находим

$$\frac{dp_g}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\rho_g c_{pg}\,\frac{dT_g}{dt} - 2\,\frac{p_g u(R_1, t)}{r}. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение притока тепла для газовой фазы (12) от 0 до R_{10} с учетом (21), получаем линеаризованный интеграл энергии

$$\frac{dp'_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_{g0}}{R_{10}}\,u'(R_1, t) + 3\,\frac{\gamma - 1}{R_{10}}\,\lambda_g\Big(\frac{\partial T'_g}{\partial r}\Big)\Big|_{r=R_{10}}.$$

Подставляя выражение для $(\partial T'_g/\partial r)|_{r=R_{10}}$, находим

$$\frac{dp'_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_{g0}}{R_{10}}\,\frac{dR'_1}{dt} - 3i\omega p'_g(\gamma - 1)\,\frac{y_g \operatorname{cth} y_g - 1}{y_g^2}\,\Psi; \tag{22}$$

$$\Psi = \Big(1 + \frac{\lambda_g r_e \theta_2}{y_e \lambda_e R_{10}}\,\frac{y_g \operatorname{cth} y_g - 1}{\theta_1}\Big)^{-1},$$

$$\theta_1 = 1 + \frac{\lambda_s y_s r_e}{\lambda_e y_e r_s}\,\operatorname{cth} y_s \operatorname{cth} y_e, \qquad \theta_2 = \operatorname{cth} y_e + \frac{\lambda_s y_s r_e}{\lambda_e y_e r_s}\,\operatorname{cth} y_s,$$

$$y_g = \sqrt{\frac{i\omega R_{10}^2}{\varkappa_g}}, \quad y_e = \sqrt{\frac{i\omega r_e^2}{\varkappa_e}}, \quad y_s = \sqrt{\frac{i\omega r_s^2}{\varkappa_s}}, \quad r_e = R_{20} - R_{10}, \quad r_s = R_{30} - R_{20}.$$

Здесь r_e — толщина внутреннего слоя жидкой фазы; r_s — толщина вязкоупругой оболочки.

Дисперсионное уравнение. Представим решения уравнений (11), (22) в виде бегущих волн $R_1' = \Delta R\,\mathrm{e}^{i\omega t}$, $p' = \Delta p\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ (ΔR, Δp — амплитуды волн). Тогда

$$(-\omega^2 + i\omega(\delta_l + \delta_e + \delta_s) + X)\Delta R = \frac{\Delta p_g - \Delta p_\infty}{\eta R_{10}\rho_s}; \tag{23}$$

$$\Delta p_g = -\frac{p_{g0}}{R_{10}}\,\Phi\Delta R, \qquad \Phi = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma-1)\Psi(y_g \operatorname{cth} y_g - 1)/y_g^2}. \tag{24}$$

Подставляя выражение (24) в уравнение (23) и учитывая, что $\Phi = \operatorname{Re}\Phi + i\operatorname{Im}\Phi$, получаем

$$\Delta R = -\frac{1}{\omega_0^2 + i\omega\delta - \omega^2}\,\frac{\Delta p_\infty}{\rho_s\eta R_{10}}; \tag{25}$$

$$\delta = \delta_l + \delta_e + \delta_s + \delta_t + \delta_a, \qquad \delta_t = \frac{1}{\rho_s\eta R_{10}^2}\,\frac{p_{g0}}{\omega}\operatorname{Im}\Phi, \qquad \delta_a = \frac{\omega^2 R_{30}}{C_1};$$

$$\omega_0^2 = X + \frac{p_{g0}\operatorname{Re}\Phi}{\rho_s\eta R_{10}^2} = X + \frac{3\gamma p_{g0}}{\rho_s\eta R_{10}^2}. \tag{26}$$

Здесь C_1 — скорость звука в несущей фазе; ω_0 — резонансная частота включения; δ — диссипативный параметр; δ_l, δ_e — вязкость жидкости; δ_s — вязкоупругость оболочки; δ_t, δ_a — тепловые и акустические потери. Заметим, что в случае если вязкоупругая оболочка и прослойка жидкости отсутствуют, а также пренебрегается эффектами поверхностного натяжения $X = 0$, $\rho_l = \rho_s$, выражение для резонансной частоты переходит в выражение для частоты Миннарта

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma p_{g0}}{\rho_l R_{10}^2}.$$

Запишем волновое уравнение для пузырьковой жидкости [15]:

$$\frac{1}{C_1^2}\,\frac{\partial^2 p_\infty}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial x^2} = 4\pi\rho_l \int\limits_0^\infty R_{10}^2 \ddot{R}_1 f\,dR_{10}, \tag{27}$$

где f — функция распределения пузырьков по размерам. С учетом $\ddot{R}_1 = -\omega^2\Delta R$, $\partial^2 p_\infty/\partial t^2 = -\omega^2\Delta p_\infty$ и выражения (25) уравнение (27) принимает вид

$$\frac{\partial^2\Delta p_\infty}{\partial x^2} + K_*^2\Delta p_\infty = 0, \qquad K_*^2 = \frac{\omega^2}{C_1^2} + \frac{4\pi\rho_l\omega^2}{\rho_s}\int\limits_0^\infty \frac{R_{10} f\,dR_{10}}{(\omega_0^2 + i\omega\delta - \omega^2)\eta} \tag{28}$$

(K_* — комплексное волновое число). Уравнение (28) представляет собой дисперсионное уравнение, характеризующее распространение акустической волны в рассматриваемой полидисперсной пузырьковой среде при следующих предположениях: $r_e \ll R_{10}$, $r_s \ll R_{10}$. Выбирая $f = n\delta(R - R_{10})$ (δ — функция Дирака; $n = 3\alpha/(4\pi R_{10}^3)$ — количество включений в единице объема; α — объемная доля пузырьков), интеграл в (28) можно опустить и включения считать монодисперсными.

В случае предельного перехода $\omega \to 0$ из дисперсионного соотношения (28) получаем выражение для равновесной (низкочастотной) скорости звука

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{3\alpha(1-\alpha)\rho_l}{3\gamma p_0 + \rho_s\eta R_{10}^2 X}.$$

В случае газовых пузырьков без оболочек $X = 0$ выражение для равновесной скорости звука принимает вид [6]

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_l}{\gamma p_0}.$$

Результаты расчетов. В работе [16] представлены результаты измерения зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты возмущений в вязкоупругой среде с полидисперсными воздушными пузырьками. В качестве несущей среды был выбран полидиметилсилоксан (PDMS RTV-615). Построена функция распределения пузырьков по размерам

$$f(R_{10}) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon R_{10}} \exp\Big(-\frac{(\ln(R_{10}/a_0))^2}{2\varepsilon^2}\Big),$$

где $N_0 = 3\alpha/[4\pi a_0^3\, \mathrm{e}^{9\varepsilon^2/2}]$; $a_0 = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon = 0{,}25$; радиус пузырьков меняется в диапазоне $R_{10} = (0{,}05 \div 0{,}35) \cdot 10^{-3}$ м; объемная доля пузырьков равна $\alpha = 0{,}02$. В расчетах, проводившихся с помощью дисперсионного уравнения (28), использовались следующие значения теплофизических параметров при $p_0 = 0{,}1$ МПа, $T_0 = 300$ К: для воздуха $\rho_g = 1{,}3$ кг/м^3, $\gamma = 1{,}4$, $\lambda_g = 0{,}0026$ Вт/(м $\cdot$ К), $c_{pg} = 1006$ Дж/(кг $\cdot$ К); для полидиметилсилоксана $C_l = 1020$ м/с, $\rho_l = 965$ кг/м^3, $G_l = (0{,}6 + 0{,}7f)$ МПа (f — частота возмущений, МГц) [16]; для резиновой оболочки пузырьков $\rho_s = 1476$ кг/м^3, $\lambda_s = 0{,}048$ Вт/(м $\cdot$ К), $\varkappa_s = 1{,}49 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $\mu_s = 0{,}99$ Па $\cdot$ с, $G_s = 52 \cdot 10^6$ Па [17].

На рис. 2 представлены зависимости фазовой скорости $C_p = \omega/\operatorname{Re} K_*$ и коэффициента затухания $K_{**} = \operatorname{Im} K_*$ от частоты возмущений f при толщине вязкоупругой оболочки $r_s = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ м и отсутствии жидкого слоя ($r_e = 0$). Для вязкоупругой среды с воздушными пузырьками проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [16] (кривая *2*). На рис. 2 видно, что учет модуля сдвига несущей фазы приводит к увеличению резонансной частоты возмущений, что также подтверждают экспериментальные данные. В отсутствие слоя жидкости и оболочки пузырьков ($R_{10} = R_{20} = R_{30}$,

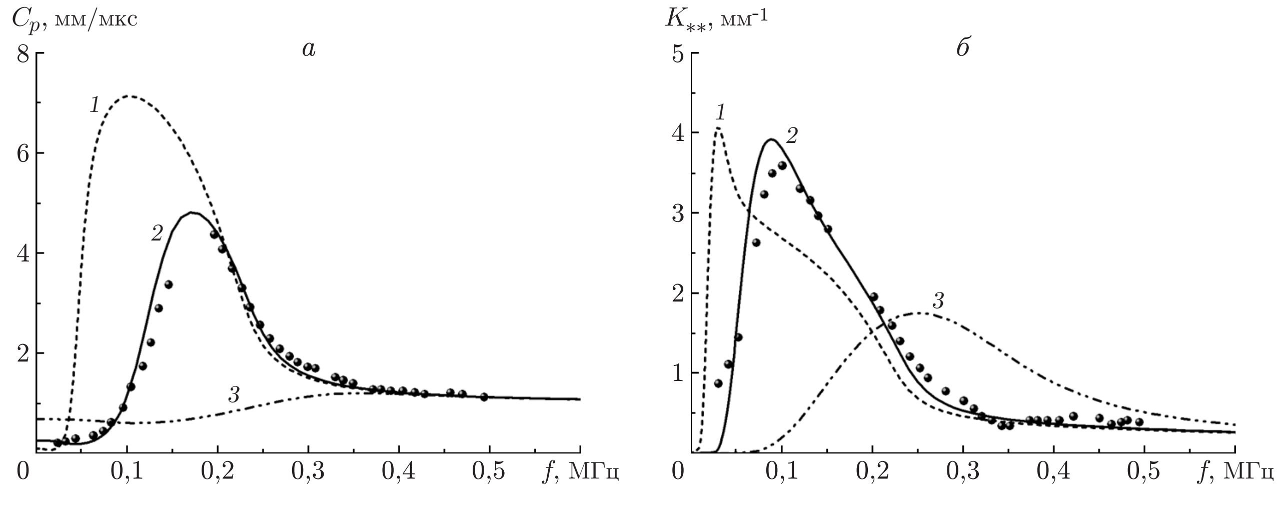

Рис. 2. Зависимости фазовой скорости (*а*) и коэффициента затухания (*б*) от частоты возмущений для полидиметилсилоксана с воздушными пузырьками: *1* — без учета модуля сдвига несущей среды, *2* — с учетом модуля сдвига несущей среды, *3* — с учетом модуля сдвига несущей среды и при наличии вязкоупругой оболочки пузырьков; точки — экспериментальные данные [16]

$\rho_l = \rho_e = \rho_s$), а также в пренебрежении поверхностным натяжением из формулы (26) для резонансной частоты включений получаем

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_{10}^2}\,\frac{3\gamma p_0 + 4G_l}{\rho_l}. \tag{29}$$

Из формулы (29) следует, что в случае вязкоупругой среды резонансная частота пузырьков превышает частоту Миннарта на величину $4G_l/(\rho_l R_{10}^2)$. Учет наличия вязкоупругой оболочки приводит к еще большему увеличению резонансной частоты (кривая *3*). Наличие оболочки у пузырьков может привести также к исчезновению полосы непрозрачности у фазовой скорости (фазовая скорость не превышает скорости звука в несущей фазе во всем диапазоне частот) и уменьшению максимального значения коэффициента затухания. Это обусловлено тем, что оболочка пузырьков сдерживает пульсации включений. Пузырьки ведут себя как упругие частицы и вследствие этого акустическая волна рассеивается менее существенно по сравнению с обычными пузырьковыми средами.

Заключение. Результаты проведенных расчетов показывают, что наличие вязкоупругой оболочки пузырьков и учет модуля сдвига несущей фазы приводят к увеличению резонансной частоты включений, уменьшению максимального значения коэффициента затухания и исчезновению полосы непрозрачности у фазовой скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Goldberg B. B.** Ultrasound contrast agents. Basic principles and clinical applications / B. B. Goldberg, J. S. Raichlen, F. F. Editors. N. Y.: Martin Dunitz, 2001.
2. **Sboros V.** Response of contrast agents to ultrasound // Adv. Drug Delivery Rev. 2008. V. 60. P. 1117–1136.
3. **Church C. C.** The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. P. 1510–1521.
4. **Hoff L., Sontum P. C., Hovem J. M.** Oscillations of polymeric microbubbles: Effects of the encapsulating shell // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. P. 2272–2280.
5. **Губайдуллин Д. А., Федоров Ю. В.** Акустические волны в жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 126–133.
6. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
7. **Kripfgans O. D., Fowlkes J. B., Miller D. L., et al.** Acoustic droplet vaporization for therapeutic and diagnostic applications // Ultrasound Med. Biol. 2000. V. 26. P. 1177–1189.
8. **Bull J. L.** The application of microbubbles for targeted drug delivery // Expert. Opin. Drug Delivery. 2007. V. 4. P. 475–493.
9. **Bull J. L.** Cardiovascular bubble dynamics // Critical Rev. Biomed. Engng. 2005. V. 33. P. 299–346.
10. **Qamar A., Wong Z. Z., Fowlkes J. B., Bull J. L.** Dynamics of acoustic droplet vaporization in gas embolotherapy // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 96. 143702.
11. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
12. **Петров А. Г.** Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2010.
13. **Yang X., Church C. C.** A model for the dynamics of gas bubbles in soft tissue // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 118. P. 3595–3606.
14. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика: В 10 т. Т. 7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.

15. **Commander K. W., Prosperetti A.** Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. P. 732–746.
16. **Leroy V., Strybulevich A., Page J. H., Scanlon M. G.** Influence of positional correlations on the propagation of waves in a complex medium with polydisperse resonant scatterers // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. 046605.
17. **Sarkar K., Shi W. T., Chatterjee D., Forsberg F.** Characterization of ultrasound contrast microbubbles using in vitro experiments and viscous and viscoelastic interface models for encapsulation // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 118. P. 539–550.

Поступила в редакцию 13/IV 2020 г.,
после доработки — 13/IV 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.