УДК 539.3

РЕШЕНИЕ РЕКУРРЕНТНО-ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ТВЕРДЕЮЩЕМ БЕТОНЕ ПРИ ТЕПЛОВОЙ ОБРАБОТКЕ В НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ КАМЕРЕ

Е. В. Рожкова

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта,
700045 Ташкент, Узбекистан
E-mail: rojkova-elena@mail.ru

С использованием рекуррентно-операторного метода получено общее решение системы линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих процесс тепло- и массопереноса в твердеющем бетоне в нагревательной камере, которое содержит произвольные аналитические функции, определяемые из граничных и начальных условий.

Ключевые слова: рекуррентно-операторный метод, матрица постоянных коэффициентов.

Процесс тепловой обработки бетонных плитных изделий в открытой металлической форме описывается системой дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса с внутренними источниками тепла и стоком влаги [1], которая после ряда упрощений сводится к следующей системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [2]:

$$\begin{gathered} a\,\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon r}{c}\,\frac{\partial U(x,\tau)}{\partial \tau} + mt(x,\tau) = -mt_0, \\ a_m\,\frac{\partial^2 U(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial U(x,\tau)}{\partial \tau} + a_m\delta\,\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} - pt(x,\tau) = pt_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Граничные и начальные условия имеют вид

$$t(0,\tau) = t_0 + b_1\tau, \qquad t(R,\tau) = t_0 + b_2\tau; \tag{2}$$

$$\frac{\partial U(0,\tau)}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U(R,\tau)}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x} = -\frac{q_m}{\gamma a_m}; \tag{3}$$

$$t(x,0) = t_0, \qquad U(x,0) = U_0. \tag{4}$$

В (1)–(4) $t(x,\tau)$, $U(x,\tau)$ — соответственно температура (в градусах Цельсия) и влагосодержание в точке x в момент времени τ; c — удельная теплоемкость, кДж/(кг $\cdot$ °C); a_m — коэффициент диффузии влаги, м^2/ч; δ — термоградиентный коэффициент, 1/°C; ε — критерий фазового превращения; r — теплота парообразования, кДж/кг; γ — плотность бетона, кг/м^3; $m = \sigma_{\text{сж}}\sqrt{m_{\text{в}}/m_{\text{ц}}}/(c\gamma)$; $p = 0{,}3\cdot 10^{-3}\sigma_{\text{сж}}\sqrt{m_{\text{в}}/m_{\text{ц}}}/\gamma$; $\sigma_{\text{сж}}$ — предел прочности на сжатие цемента, Па; $m_{\text{в}}/m_{\text{ц}}$ — отношение массы воды к массе цемента в бетонной смеси; R — характерный размер изделия, м; q_m — интенсивность испарения влаги из бетона, кг/(м$^2\cdot$ ч).

В работе [2], следуя [3], принято $\varepsilon = 0$. В результате система уравнений (1) распадается на несвязные уравнения, при этом первое уравнение решается операционным методом, а второе — асимптотическим.

В данной работе система уравнений (1) решается рекуррентно-операторным методом [4] без указанных упрощений. Представим уравнения (1) в матричном виде

$$(A^* \,\partial_x^2 + B^* \,\partial_\tau + C^*)\boldsymbol{u}(x,\tau) = \boldsymbol{F}^*, \tag{5}$$

где

$$A^* = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a_m\delta & a_m \end{bmatrix}, \qquad B^* = \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon r/c \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ -p & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} t \\ U \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}^* = \begin{bmatrix} -mt_0 \\ pt_0 \end{bmatrix}, \qquad \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Умножая (5) слева на обратную матрицу $(A^*)^{-1}$, получаем

$$(E \,\partial_x^2 + B \,\partial_\tau + C)\boldsymbol{u}(x,\tau) = \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

где

$$B = (A^*)^{-1}B^* = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad C = (A^*)^{-1}C^* = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

$$b_{11} = -\frac{1}{a}, \qquad b_{12} = \frac{\varepsilon r}{ac}, \qquad b_{21} = \frac{\delta}{a}, \qquad b_{22} = -\Big(\frac{\varepsilon r\delta}{ac} + \frac{1}{a_m}\Big),$$

$$c_{11} = \frac{m}{a}, \qquad c_{12} = 0, \qquad c_{21} = -\Big(\frac{m\delta}{a} + \frac{p}{a_m}\Big), \qquad c_{22} = 0,$$

$$F_1 = -\frac{mt_0}{a}, \qquad F_2 = \Big(\frac{m\delta}{a} + \frac{p}{a_m}\Big)t_0.$$

Решение однородного уравнения (6) при $\boldsymbol{F} = 0$ будем искать в виде

$$\boldsymbol{u}(x, g_r(\tau)) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j)x^{2i+2j+r,!}\,\partial_\tau^j(g_r(\tau)), \qquad r = 0, 1, \tag{7}$$

где $Q(i,j) = [Q_{ps}(i,j)]_{2\times 2}$ — матрица постоянных коэффициентов, определяемая из уравнения (7); $g_r(\tau)$ — произвольные аналитические функции действительной переменной; $x^{k,!} = x^k/k!$.

Подставляя (7) в (6), получаем

$$E\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j)x^{2i+2j-2+r,!}\,\partial_\tau^j g_r(\tau) + B\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j)x^{2i+2j+r,!}\,\partial_\tau^{j+1} g_r(\tau) + {}$$
$$+ C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j)x^{2i+2j+r,!}\,\partial_\tau^j g_r(\tau) = 0.$$

Заменяя во второй двойной сумме индекс j на $j-1$, а в третьей — индекс i на $i-1$ и объединяя все суммы в одну, получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[Q(i,j) + BQ(i,j-1) + CQ(i-1,j)]x^{2i+2j-2+r,!}\,\partial_\tau^j g_r(\tau) = 0.$$

Для того чтобы это выражение было равно нулю при любых значениях переменных x и τ, необходимо приравнять к нулю выражение в квадратных скобках. В результате получаем матричное рекуррентное соотношение

$$Q(i,j) = -BQ(i,j-1) - CQ(i-1,j) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$Q(0,0) = E, \qquad Q(i,j) = 0 \quad \text{при} \quad i < 0 \quad \text{или} \quad j < 0.$$

Например,

$$\begin{gathered} Q(0,0) = E, \quad Q(1,0) = -C, \quad Q(0,1) = -B, \quad Q(2,0) = C^2, \quad Q(0,2) = B^2, \\ Q(1,1) = BC + CB, \quad Q(3,0) = -C^3, \quad Q(2,1) = -BC^2 - CBC - C^2B; \quad \ldots . \end{gathered} \tag{9}$$

В случае коммутирующих матриц B и C решением уравнения (8) является матрица

$$Q(i,j) = (-1)^{i+j}(i+j)!C^{i,!}B^{j,!}.$$

Здесь для матриц второго порядка в произвольной степени i используется формула

$$A^i = [a_{ks}]^i_{2\times 2} = \begin{bmatrix} Q_i + a_{22}Q_{i-1} & -a_{12}Q_{i-1} \\ -a_{21}Q_{i-1} & Q_i + a_{11}Q_{i-1} \end{bmatrix},$$

величины Q определяются по рекуррентной формуле $Q_i = -d_1Q_{i-1} - d_2Q_{i-2}$ при начальных условиях $Q_0 = 1$, $Q_{-i} = 0$ или по общей формуле

$$Q_i = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^{i-k}(i-k)!\,\frac{d_2^k}{k!}\,\frac{d_1^{i-2k}}{(i-2k)!}, \qquad d_1 = a_{11} + a_{22}, \quad d_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Соотношение (8) запишем в развернутом виде (с учетом того, что $c_{12} = c_{22} = 0$):

$$\begin{aligned} Q_{11}(i,j) &= -b_{11}Q_{11}(i,j-1) - b_{12}Q_{21}(i,j-1) - c_{11}Q_{11}(i-1,j), \\ Q_{21}(i,j) &= -b_{21}Q_{11}(i,j-1) - b_{22}Q_{21}(i,j-1) - c_{21}Q_{11}(i-1,j), \\ Q_{12}(i,j) &= -b_{11}Q_{12}(i,j-1) - b_{12}Q_{22}(i,j-1) - c_{11}Q_{12}(i-1,j), \\ Q_{22}(i,j) &= -b_{21}Q_{12}(i,j-1) - b_{22}Q_{22}(i,j-1) - c_{21}Q_{12}(i-1,j). \end{aligned}$$

Приведем некоторые коэффициенты $Q_{ps}(i,j)$:

$$\begin{gathered} Q_{11}(0,0) = 1, \qquad Q_{11}(1,0) = -c_{11}, \qquad Q_{11}(0,1) = -b_{11}, \\ Q_{11}(2,0) = c_{11}^2, \qquad Q_{11}(1,1) = 2b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}, \qquad \ldots; \\ Q_{21}(0,0) = 0, \qquad Q_{21}(1,0) = -c_{21}, \qquad Q_{21}(0,1) = -b_{21}, \\ Q_{21}(2,0) = c_{11}c_{21}, \qquad Q_{21}(1,1) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{21}, \qquad \ldots; \end{gathered}$$

$$Q_{12}(0,0) = 0, \quad Q_{12}(1,0) = 0, \quad Q_{12}(0,1) = -b_{12}, \quad Q_{12}(2,0) = 0, \quad Q_{12}(1,1) = b_{12}c_{11}, \quad \ldots;$$

$$Q_{22}(0,0) = 1, \quad Q_{22}(1,0) = 0, \quad Q_{22}(0,1) = -b_{22}, \quad Q_{22}(2,0) = 0, \quad Q_{22}(1,1) = b_{12}c_{21}, \quad \ldots .$$

Для того чтобы получить общую формулу для элементов $Q_{ps}(i,j)$ матрицы $Q(i,j)$ при произвольных значениях индексов i, j, используем метод обратной матрицы и обратного многочлена. Это позволяет свести решение системы рекуррентных уравнений (8) к решению одного рекуррентного уравнения. В результате получаем

$$\boldsymbol{Q}_1(i,j) = \begin{bmatrix} Q_{11}(i,j) \\ Q_{21}(i,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i,j} + c_{22}R_{i-1,j} + b_{22}R_{i,j-1} \\ -c_{21}R_{i-1,j} - b_{21}R_{i,j-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_2(i,j) = \begin{bmatrix} Q_{12}(i,j) \\ Q_{22}(i,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{12}R_{i-1,j} - b_{12}R_{i,j-1} \\ R_{i,j} + c_{11}R_{i-1,j} + b_{11}R_{i,j-1} \end{bmatrix},$$

где величины $R_{i,j}$ определяются из рекуррентного уравнения

$$R_{i,j} = -(d_{01}R_{i,j-1} + d_{02}R_{i,j-2} + d_{10}R_{i-1,j} + d_{11}R_{i-1,j} + d_{20}R_{i-2,j}) \qquad (10)$$

с начальными условиями $R_{0,0} = 1$, $R_{i,j} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$. В (10)

$$d_{01} = b_{11} + b_{22}, \qquad d_{02} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \qquad d_{10} = c_{11} + c_{22},$$
$$d_{11} = b_{11}c_{22} + c_{11}b_{22} - b_{12}c_{21} - c_{12}b_{21}, \qquad d_{20} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}.$$

Приведем некоторые коэффициенты $R_{i,j}$:

$$R_{0,0} = 1, \qquad R_{0,1} = -d_{01}, \qquad R_{1,0} = -d_{10}, \qquad R_{2,0} = d_{10}^2 - d_{20},$$
$$R_{1,1} = 2d_{10}d_{01} - d_{11}, \qquad R_{0,2} = d_{01}^2 - d_{02}, \qquad \ldots .$$

Вычислим коэффициент $Q_{21}(1,1)$:

$$Q_{21}(1,1) = -c_{21}R_{01} - b_{21}R_{10} = c_{21}d_{01} + b_{21}d_{10} = c_{21}(b_{11} + b_{22}) + b_{21}(c_{11} + c_{22}).$$

Значение этого коэффициента совпадает с полученным ранее значением $Q_{21}(1,1)$ ($c_{22} = 0$), вычисленным с использованием матричного рекуррентного уравнения. Общее решение уравнения (10) имеет вид [4]

$$R_{i,j} = \sum_{k_{20}=0}^{\alpha_{20}} \sum_{k_{11}=0}^{\alpha_{11}} \sum_{k_{02}=0}^{\alpha_{02}} (-1)^{\beta} \beta! d_{02}^{k_{02},!} d_{11}^{k_{11},!} d_{02}^{k_{02},!} d_{10}^{i-\gamma_{10},!} d_{01}^{j-\gamma_{01},!},$$

где

$$\beta = i + j - (k_{20} + k_{11} + k_{02}), \qquad \gamma_{10} = 2k_{20} + k_{11}, \qquad \gamma_{01} = k_{11} + 2k_{02},$$
$$\alpha_{20} = [i/2], \qquad \alpha_{11} = \min(i - 2k_{20}, i), \qquad \alpha_{02} = [(j - k_{11})/2].$$

Вычислим, например, коэффициент $R_{1,1}$:

$$R_{1,1} = \sum_{k_{20}=0}^{0} \sum_{k_{11}=0}^{1} \sum_{k_{02}=0}^{0} (-1)^{2-k_{11}} (2 - k_{11})! \, \frac{d_{11}^{k_{11}}}{k_{11}!} \, \frac{d_{10}^{1-k_{11}}}{(1-k_{11})!} \, \frac{d_{01}^{1-k_{11}}}{(1-k_{11})!} = 2d_{10}d_{01} - d_{11}.$$

Таким образом, решение уравнения (7) можно представить в виде

$$\boldsymbol{u}_{r,(l)}(x, g_{rl}(\tau)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} Q_{1l}(i,j) \\ Q_{2l}(i,j) \end{bmatrix} x^{2i+2j+r,!} \, \partial_\tau^j (g_{rl}(\tau)), \qquad l = 1, 2, \quad r = 0, 1. \qquad (11)$$

В результате получаем четыре линейно независимых частных вектор-решения однородного уравнения (6). Общее решение однородного уравнения (6) имеет вид

$$\boldsymbol{u}_{\text{о}} = \boldsymbol{u}_{0,(1)}(g_{01}) + \boldsymbol{u}_{1,(1)}(g_{11}) + \boldsymbol{u}_{0,(2)}(g_{02}) + \boldsymbol{u}_{1,(2)}(g_{12}). \qquad (12)$$

Частным решением неоднородного уравнения (6), полученным с помощью рекуррентно-операторного метода, является выражение

$$\boldsymbol{u}_{\text{ч}}(\boldsymbol{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j) \, \partial_x^{-(2i+2j+2)} \, \partial_\tau^j (\boldsymbol{F}(x, \tau)), \qquad (13)$$

где

$$\partial_x^{-k}(\boldsymbol{H}) = \int\limits_0^x \cdots \int\limits_0^x \boldsymbol{H}(x, \tau) \, dx^k.$$

Приведем несколько членов (13):

$$\boldsymbol{u}_{\text{ч}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{-2} + Q(1,0)\boldsymbol{F}^{-4} + Q(0,1)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-4} + Q(2,0)\boldsymbol{F}^{-6} + Q(1,1)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-6} + Q(0,2)\boldsymbol{F}_{,\tau\tau}^{-6} + \ldots .$$

Подставляя это выражение в (6), находим

$$E[\boldsymbol{F} + Q(1,0)\boldsymbol{F}^{-2} + Q(0,1)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-2} + Q(2,0)\boldsymbol{F}^{-4} + Q(1,1)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-4} + Q(0,2)\boldsymbol{F}_{,\tau\tau}^{-4} + \ldots] +$$
$$+ B[\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-2} + Q(1,0)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-4} + Q(0,1)\boldsymbol{F}_{,\tau\tau}^{-4} + \ldots] +$$
$$+ C[\boldsymbol{F}^{-2} + Q(1,0)\boldsymbol{F}^{-4} + Q(0,1)\boldsymbol{F}_{,\tau}^{-4} + \ldots] = \boldsymbol{F}.$$

С учетом выражения (9) получаем тождество.

Сумма решений (12) и (13) является общим решением уравнения (6), в котором четыре произвольные функции $g_{rl}(\tau)$ должны определяться из четырех граничных условий (2), (3) при $x = 0$ и $x = R$. Следует отметить, что при $x = 0$ решение (13) удовлетворяет нулевым граничным условиям и не оказывает влияния на произвольные функции, определяемые из начальных условий. Изменяя для удобства порядок суммирования в (11):

$$\boldsymbol{u}_{r,(l)}(g_{rl}) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\begin{bmatrix} Q_{1l}(i-j,j) \\ Q_{2l}(i-j,j) \end{bmatrix}\partial_\tau^j(g_{rl})\right)x^{2i+r,!}, \tag{14}$$

приводим решения к окончательному виду. Запишем несколько членов в рядах (14):

$$\begin{gathered} t_{r,(1)}(g_{r1}) = g_{r1}x^{r,!} - (c_{11}g_{r1} + b_{11}g'_{r1})x^{2+r,!} + \\ + [c_{11}^2 g_{r1} + (2b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21})g'_{r1} + (b_{11}^2 + b_{12}b_{21})g''_{r1}]x^{4+r,!} - \ldots, \\ U_{r,(1)}(g_{r1}) = -(c_{21}g_{r1} + b_{21}g'_{r1})x^{2+r,!} + \\ + [c_{11}c_{21}g_{r1} + (b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{21})g'_{r1} + (b_{11}b_{21} + b_{22}b_{21})g''_{r1}]x^{4+r,!} - \ldots, \\ t_{r,(2)}(g_{r2}) = -b_{12}g'_{r2}x^{2+r,!} + [b_{12}c_{11}g'_{r2} + (b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22})g''_{r2}]x^{4+r,!} - \ldots, \\ U_{r,(2)}(g_{r2}) = g_{r2}x^{r,!} - b_{22}g'_{r2}x^{2+r,!} + [b_{12}c_{21}g'_{r2} + (b_{12}b_{21} + b_{22}^2)g''_{r2}]x^{4+r,!} - \ldots . \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя выражения (15) в уравнение (6), при $\boldsymbol{F} = 0$ получаем тождество.

Перейдем к решению краевой задачи (6), (2), (3). Подставляя сумму решений (12), (13) в (2), (3), при $x = 0$ находим

$$g_{01}(\tau) = t_0 + b_1\tau, \qquad g_{12}(\tau) + \delta g_{11}(\tau) = 0,$$

откуда следует

$$g_{12}(\tau) = -\delta\, g_{11}(\tau).$$

Для определения оставшихся двух функций $g_{11}(\tau)$ и $g_{02}(\tau)$ используются два условия в (2), (3) при $x = R$. Подставляя ряды (12) (с учетом найденных функций g_{01} и g_{12}) в (2), (3) и полагая $x = R$, получаем систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций g_{11} и g_{02}, порядок которой зависит от числа удерживаемых членов в рядах (14). Для решения этой системы рекуррентно-операторным методом необходимо привести ее к виду

$$(E\,\partial_\tau^N + B_1\,\partial_\tau^{N-1} + \ldots + B_{N-1}\,\partial_\tau + B_N)\boldsymbol{g}(\tau) = -\boldsymbol{f}(\tau). \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{11} \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}_0 + \boldsymbol{g}^*,$$

где $\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{f})$ — частное решение неоднородного уравнения (16), $\boldsymbol{g}_{\text{o}}$ — общее решение однородного уравнения (16), $\boldsymbol{g}_{s,k}$ — частные решения однородного уравнения (16) при $\boldsymbol{f} = 0$:

$$\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{f}) = \begin{bmatrix} g^*_{02,r} \\ g^*_{11,r} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{N} R(i) \boldsymbol{f}^{-(i+2)}(\tau), \qquad \boldsymbol{g}_{\text{o}} = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{2} C_{sk} \boldsymbol{g}_{s,k},$$

$$\boldsymbol{g}_{s,k} = \begin{bmatrix} g_{02,s,k} \\ g_{11,s,k} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{N} R(i) \frac{\tau^{i+s}}{(i+s)!}, \qquad s = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad k = 1, 2,$$

C_{sk} — произвольные постоянные коэффициенты. Матрицы постоянных коэффициентов $R(i)$, входящие в эти формулы, определяются из матричного рекуррентного уравнения

$$R(i) = -(B_1 R(i-1) + B_2 R(i-1) + \ldots + B_N R(i-N))$$

с начальными условиями

$$R(0) = E, \qquad R(k) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0.$$

Подставляя в общее решение уравнения (1) найденные из граничных условий (2), (3) произвольные функции $g_{rl}(\tau)$, получаем решение, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям (2), (3) при произвольных коэффициентах C_{sk}. Для того чтобы определить эти коэффициенты, подставим данное решение в начальные условия (4). Приводя подобные, получаем выражения в виде

$$\begin{bmatrix} t \\ U \end{bmatrix}_{\tau=0} = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P}_1 x + \ldots + \boldsymbol{P}_N \frac{x^N}{N!} = \begin{bmatrix} t_0 \\ U_0 \end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{P}_k$ — вектор-полиномы, содержащие коэффициенты C_{sk}. Из системы алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{P}_0 = [t_0, U_0]^{\text{т}}, \quad \boldsymbol{P}_1 = 0, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{P}_N = 0$$

находим C_{sk}.

Рассмотрим решение задачи Коши для (1), (4). Выделяя в уравнении (5) переменную τ, т. е. умножая его слева на обратную матрицу $(B^*)^{-1}$, приводим это уравнение к виду

$$(E\,\partial_\tau + A\,\partial_x^2 + C)\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{F}, \tag{17}$$

где

$$A = [a_{ik}]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a + a_m\delta\varepsilon_0 & a_m\varepsilon_0 \\ a_m\delta & a_m \end{bmatrix}, \qquad C = [c_{ik}]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} m + p\varepsilon_0 & 0 \\ -p & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -(m - p\varepsilon_0 t_0) \\ p t_0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon r}{c}.$$

Решение однородного уравнения (17) будем искать в виде

$$\boldsymbol{u}^*(q(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Q^*(i,j) \frac{\tau^{i+j}}{(i+j)!} \partial_x^{2i} q(x). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и приводя подобные, получаем рекуррентное матричное соотношение

$$Q^*(i,j) = -AQ^*(i-1,j) - CQ^*(i,j-1) \tag{19}$$

с начальными условиями $Q^*(0,0) = E$, $Q^*(i,j) = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$.

Последовательно находим $Q^*(0,0) = E$, $Q^*(1,0) = -A$, $Q^*(0,1) = -C$, $Q^*(2,0) = A^2$, $Q^*(1,1) = AC + CA$, $Q^*(0,2) = C^2$. В результате получаем

$$t(q_1) = q_1 - (a_{11}q_1'' + c_{11})\tau + [(a_{11}^2 + a_{12}a_{21})q_1^{\mathrm{IV}} + (2a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21})q_1'' + c_{11}^2 q_1]\tau^2/2 + \dots,$$

$$U(q_1) = 0 - (a_{21}q_1''c_{21})\tau + [(a_{11}^{+}a_{22})a_{21}q_1^{\mathrm{IV}} + (c_{11} + a_{22} + a_{11})c_{21}q_1'' + c_{11}c_{21}q_1]\tau^2/2 + \dots,$$

$$t(q_2) = 0 - a_{12}q_2''\tau + [(a_{11} + a_{22})a_{12}q_2^{\mathrm{IV}} + c_{11}a_{12}q_2'']\tau^2/2 + \dots,$$

$$U(q_2) = q_2 - a_{22}q_2''\tau + [(a_{22}^2 + a_{12}a_{21})q_2^{\mathrm{IV}} + a_{12}c_{21}q_2'']\tau^2/2 + \dots.$$

Полагая $q_1 = t_0$, $q_2 = U_0$, находим точное решение задачи Коши.

Относительно численной реализации рекуррентно-операторного метода следует сделать следующее замечание. В работе [5] доказана сходимость рядов рекуррентно-операторного вида в более общем случае. В некоторых случаях эти ряды удается представить через элементарные функции [6]. В более сложных ситуациях количество удерживаемых членов зависит от соотношения скорости роста факториалов в знаменателях и скорости роста числителей. При стремлении определителей обращаемых матриц к нулю число удерживаемых членов будет возрастать. Различные варианты оценок остаточных членов в данной работе не приводятся.

Приведем решения уравнений из работы [2], полученные рекуррентно-операторным методом. Так, частным решением неоднородного уравнения

$$\Big(\partial_x^2 - \frac{1}{a}\,\partial_\tau + \frac{m}{a}\Big)t(x,\tau) = -\frac{mt_0}{a}, \qquad m = a\omega^2 \tag{20}$$

является выражение

$$t_{\text{ч}} = -t_0. \tag{21}$$

Общие решения однородного уравнения (20) принимаются в виде

$$t_{\text{o}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} Q_{i,j}x^{2i+2j+r,!}\,\partial_\tau^j(g_r), \qquad r = 0,1, \tag{22}$$

где коэффициенты $Q_{i,j}$ определяются из рекуррентного уравнения

$$Q_{i,j} = (Q_{i,j-1} - mQ_{i-1,j})/a$$

с начальными условиями $Q_{0,0} = 1$, $Q_{i,j} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$ либо по явной формуле

$$Q_{i,j} = \Big(-\frac{1}{a}\Big)^{i+j}\,\frac{(i+j)!}{i!j!}\,m^i. \tag{23}$$

Меняя в (22) порядок суммирования:

$$t_{\text{o}}(g_r) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{i} Q_{i-j,j}\,\partial_\tau^j(g_r)\Big)x^{2i+r,!},$$

с учетом (23) находим решение однородного уравнения (20) в операторном виде

$$t_{\text{o}}(g_r) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{a}\Big)^i\,\Delta^i(g_r)x^{2i+r,!}, \tag{24}$$

где $\Delta(\,\cdot\,) = (\partial_\tau + m)(\,\cdot\,)$. Так, если функция $g(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^p(g) = 0, \tag{25}$$

то ряды в (24) оборвутся на p-м члене, в результате получим конечное выражение. Решения уравнения (25) имеют вид

$$g^q(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^q \tau^{i+q-1,!} \qquad (q = \overline{1,p}\,),$$

где величины Q_i^p определяются из рекуррентного уравнения

$$Q_i^q = -mQ_{i-1}^q + Q_i^{q-1}$$

с начальными условиями $Q_i^0 = 0$, $Q_0^1 = 1$, $Q_i^q = 0$ при $i < 0$ или $q < 1$ либо по явной формуле

$$Q_i^q = (-1)^i \,\frac{(i+q-1)!}{(q-1)!}\,\frac{m^i}{i!}.$$

Если искать произвольные функции g_r в виде $g_0 = \alpha_1 + \alpha_2\tau$, $g_1 = \alpha_3 + \alpha_4\tau$, как это предлагается в работе [2], то ряды в (22) можно представить через элементарные функции:

$$t_{\text{о}} = t_{\text{о}}(g_0) + t_{\text{о}}(g_1) = -t_0 + \Big(\alpha_1 - \frac{\alpha_4}{2a\omega^2}\,x\Big)\cos\omega x + \\ + \Big(\frac{\alpha_3}{\omega} + \frac{\alpha_4}{2a\omega^3} + \frac{\alpha_2}{2a\omega}\,x\Big)\sin\omega x + \tau\Big(\alpha_2\cos\omega x + \frac{\alpha_4}{\omega}\sin\omega x\Big). \qquad (26)$$

Здесь $\omega = \sqrt{m/a}$. Подставляя сумму решений (21) и (26) в граничные условия (2), находим

$$\alpha_1 = 2t_0, \qquad \alpha_2 = b_1,$$

$$\alpha_3 = \Big(-\alpha_1 + \frac{\alpha_4 R}{2a\omega^2}\Big)\omega\operatorname{ctg}\omega R + \frac{\alpha_1\omega}{\sin\omega R} - \frac{\alpha_2\omega^2 R + \alpha_4}{2a\omega^2}, \qquad \alpha_4 = \frac{(b_2 - \alpha_2\cos\omega R)\omega}{\sin\omega R}.$$

Перейдем к решению второго уравнения в (1)

$$\Big(\partial_x^2 - \frac{1}{a_m}\,\partial_\tau\Big)U(x,\tau) = f, \qquad (27)$$

где

$$f = pt_0/a_m - (\delta\partial_x^2 - p/a_m)t(x,\tau) = (A_1 + A_3x + A_5\tau)\sin\omega x + (A_2 + A_4x + A_6\tau)\cos\omega x,$$

$$A_1 = a_0\Big(\alpha_2\omega + \frac{\alpha_4}{2a\omega}\Big) - \frac{\delta\alpha_4}{a\omega}, \qquad A_2 = a_0\omega^2\alpha_1 - \frac{\delta}{a}\,\alpha_2, \qquad A_3 = a_0\,\frac{\omega\alpha_2}{2a},$$

$$A_4 = -a_0\,\frac{\alpha_4}{2a}, \qquad A_5 = a_0\omega\alpha_4, \qquad A_6 = a_0\omega^2\alpha_2, \qquad a_0 = \delta + \frac{p}{a_m\omega^2}.$$

Частное решение уравнения (27) будем искать в соответствии с видом его правой части:

$$U_{\text{ч}} = (B_1 + B_3x + B_5\tau)\sin\omega x + (B_2 + B_4x + B_6\tau)\cos\omega x. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (27), находим

$$B_1 = -\frac{1}{\omega^2}\Big(A_1 - \frac{2}{\omega}\,A_4 - \frac{1}{a_m\omega^2}\,A_5\Big), \qquad B_2 = -\frac{1}{\omega^2}\Big(A_2 - \frac{2}{\omega}\,A_3 - \frac{1}{a_m\omega^2}\,A_6\Big),$$

$$B_3 = -\frac{A_3}{\omega^2}, \qquad B_4 = -\frac{A_4}{\omega^2}, \qquad B_5 = -\frac{A_5}{\omega^2}, \qquad B_6 = -\frac{A_6}{\omega^2}.$$

Общее решение однородного уравнения (27), полученное с использованием рекуррентно-операторного метода, имеет вид

$$U_{\text{о}} = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{a_m}\Big)^j x^{2j+r,!}\,\partial_\tau^j(q_r), \qquad r = 0, 1. \qquad (29)$$

Если в (29) положить $q^* = \exp(\pm\tau/a_m)$, то при $r = 0,1$ находим

$$U_о(q^*) = \exp\Big(\frac{\tau}{a_m}\Big)\Big[\operatorname{ch}\Big(\frac{x}{\sqrt{a_m}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{a_m}}\operatorname{sh}\Big(\frac{x}{\sqrt{a_m}}\Big)\Big],$$

$$U_о(q^*) = \exp\Big(-\frac{\tau}{a_m}\Big)\Big[\cos\Big(\frac{x}{\sqrt{a_m}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{a_m}}\sin\Big(\frac{x}{\sqrt{a_m}}\Big)\Big].$$

Если искать решение в виде $q_0 = \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2$, $q_1 = \beta_3 + \beta_4\tau$, то ряд (29) оборвется. В результате получим решение в полиномиальном виде

$$U_о = [\beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + (1/a_m)(\beta_1 + 2\beta_2\tau)x^2/2] + [(\beta_3 + \beta_4\tau)x + (1/a_m)\beta_4 x^3/6]. \tag{30}$$

Общим решением уравнения (27) является сумма решений (30) и (28):

$$U = U_о + U_ч. \tag{31}$$

Подставляя сумму решений (21), (26), (31) в граничные условия (3), находим выражения для коэффициентов β_k:

$$\beta_1 = -\frac{R^2}{3a_m}\beta_2 - \frac{a_m}{R}\Big[\frac{q_m}{\gamma a_m} + \beta_4\frac{R^2}{2a_m} + \beta_3 + \Big(B_4 + \omega B_1 + \omega R B_3 + \delta\alpha_3 + \delta\frac{b_1 R}{2a}\Big)\cos(\omega R) +$$

$$+ \Big(B_3 - \omega B_2 - \omega R B_4 + \delta\frac{b_1}{2a\omega} - 2\delta\omega t_0 + \delta R\frac{\alpha_4}{2a\omega}\Big)\sin(\omega R)\Big],$$

$$\beta_2 = a_m[-\beta_4(1 - \cos(\omega R)) + \omega(B_6 + \delta b_1)\sin(\omega R)]/(2R),$$

$$\beta_3 = -(B_4 + \omega B_1 + \delta\alpha_3), \qquad \beta_4 = -(\omega B_5 + \delta\alpha_4).$$

Таким образом, получаем точное решение краевой задачи (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

В табл. 1, 2 приведены значения температуры и влагосодержания, полученные при следующих исходных данных: $a = 0{,}0443$, $a_m = 2480$, $\delta = 0{,}0142$, $m = 0{,}000\,093\,30$, $p = 0{,}000\,114$, $t_0 = 19$, $b_1 = 20$, $b_2 = 18$, $q_m = 0{,}18$, $\gamma = 2430$ по формулам (26), (31):

$$t(x,\tau) = 19 + (38 + 20\tau + 71\,439{,}22x)\cos(0{,}0459x) +$$

$$+ (-1\,557\,403{,}53 - 290{,}47\tau + 4918{,}83x)\sin(0{,}0459x),$$

$$U(x,\tau) = 5{,}227 + (-5{,}16 - 0{,}28\tau - 1015{,}996x)\cos(0{,}045\,89x) +$$

$$+ (22\,216{,}286 + 4{,}131\tau - 69{,}955x)\sin(0{,}045\,89x) - 0{,}001\,08\tau^2 + 0{,}2655\tau +$$

$$+0{,}0002(-0{,}002\,166\tau + 0{,}2655)x^2 + (-3{,}08 - 0{,}29\cdot 10^{-7}\tau)x - 0{,}1955\cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}1467\cdot 10^{-10}x^4.$$

Для сравнения приводятся табл. 3, 4 из работы [2].

Незначительное различие результатов, представленных в табл. 1–4, можно объяснить некоторым несоответствием принятых исходных данных. Так, в работе [2] не указано значение m, кроме того, на каждом шаге по времени значения соответствующих величин менялись. Если считать, что второе уравнение в (1) не зависит от первого, т. е. если исключить в нем и в граничном условии (3) члены, содержащие температуру, то, полагая в (27) $f = 0$, получим одно из частных решений уравнения (27) в виде

$$U_ч = -pt_0\tau.$$

Тогда с учетом граничных условий (3) и начального условия (4) решение (30) однородного уравнения (27) принимает вид

$$U_о = \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_1 x^2/(2a_m),$$

Таблица 1

Значения температуры, полученные в данной работе

x, м	$t(x,\tau)$, °C					
	$\tau = 0$	$\tau = 0{,}5$ ч	$\tau = 1$ ч	$\tau = 1{,}5$ ч	$\tau = 2$ ч	$\tau = 2{,}5$ ч
0	19,00	29,00	39,00	49,00	59,00	69,00
0,015	18,56	28,46	38,36	48,26	58,16	68,06
0,045	17,98	27,68	37,38	47,08	56,78	66,48
0,075	17,80	27,30	36,80	46,30	55,80	65,30
0,105	18,00	27,30	36,60	45,90	55,20	64,50
0,135	18,57	27,67	36,77	45,87	54,97	64,07
0,150	19,00	28,00	37,00	46,00	55,00	64,00

Таблица 2

Значения влагосодержания, полученные в данной работе

x, м	$U(x,\tau)$					
	$\tau = 0$	$\tau = 0{,}5$ ч	$\tau = 1$ ч	$\tau = 1{,}5$ ч	$\tau = 2$ ч	$\tau = 2{,}5$ ч
0	0,0624	0,0527	0,0424	0,0316	0,0202	0,0083
0,015	0,0686	0,0603	0,0515	0,0421	0,0321	0,0216
0,045	0,0769	0,0714	0,0654	0,0588	0,0517	0,0441
0,075	0,0795	0,0769	0,0737	0,0700	0,0657	0,0609
0,105	0,0767	0,0769	0,0765	0,0756	0,0742	0,0723
0,135	0,0685	0,0715	0,0740	0,0760	0,0774	0,0783
0,150	0,0624	0,0669	0,0708	0,0742	0,0770	0,0793

Таблица 3

Расчетные $t_{\text{р}}$ и экспериментальные $t_{\text{э}}$ значения температуры, полученные в работе [2]

x, м	$\tau = 0{,}5$ ч		$\tau = 1$ ч		$\tau = 1{,}5$ ч		$\tau = 2$ ч		$\tau = 2{,}5$ ч	
	$t_{\text{р}}$, °C	$t_{\text{э}}$, °C	$t_{\text{р}}$, °C	$t_{\text{э}}$, °C	$t_{\text{р}}$, °C	$t_{\text{э}}$, °C	$t_{\text{р}}$, °C	$t_{\text{э}}$, °C	$t_{\text{р}}$, °C	$t_{\text{э}}$, °C
0,015	26,1	25,5	34,5	34,3	44,6	43,8	54,0	54,2	63,9	64,2
0,045	22,1	22,0	29,8	27,8	38,8	36,5	47,2	46,8	57,6	56,5
0,075	21,3	20,5	27,8	25,7	36,3	33,0	44,2	43,3	53,2	53,2
0,105	22,1	21,5	29,0	26,7	36,7	34,7	45,8	45,0	54,4	55,3
0,135	25,4	24,0	33,1	32,7	42,4	41,5	51,0	51,3	60,0	60,0

Таблица 4

Расчетные $U_{\text{р}}$ и экспериментальные $U_{\text{э}}$ значения влагосодержания, полученные в работе [2]

x, м	$\tau = 0{,}5$ ч		$\tau = 1$ ч		$\tau = 1{,}5$ ч		$\tau = 2$ ч		$\tau = 2{,}5$ ч	
	$U_{\text{р}}$	$U_{\text{э}}$	$U_{\text{р}}$	$U_{\text{э}}$	$U_{\text{р}}$	$U_{\text{э}}$	$U_{\text{р}}$	$U_{\text{э}}$	$U_{\text{р}}$	$U_{\text{э}}$
0,015	0,0615	0,0608	0,0597	0,0592	0,0558	0,0552	0,0527	0,0530	0,0480	0,0497
0,045	0,0621	0,0613	0,0616	0,0601	0,0594	0,0575	0,0572	0,0553	0,0557	0,0516
0,075	0,0621	0,0617	0,0618	0,0607	0,0604	0,0584	0,0586	0,0566	0,0577	0,0535
0,105	0,0620	0,0610	0,0615	0,0602	0,0598	0,0570	0,0573	0,0550	0,0557	0,0510
0,135	0,0610	0,0603	0,0592	0,0580	0,0572	0,0545	0,0545	0,0523	0,0500	0,0478

где $\beta_0 = U_0$; $\beta_1 = -q_m/(\gamma R)$. Окончательно получаем

$$U = U_{\text{о}} + U_{\text{ч}} = U_0 - \frac{q_m}{\gamma R}\,\tau - \frac{q_m x^2}{2a_m \gamma R}.$$

Значения U, полученные по этой формуле, согласуются с данными, представленными в табл. 4. Все приведенные в настоящей работе решения удовлетворяют не только граничным условиям, но и начальным условиям (4), которые оказались согласованными с граничными условиями.

Что касается решения связанных уравнений системы (1), то влияние отброшенного члена в первом уравнении оказалось незначительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лыков А. В.** Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
2. **Солдаткин М. Т., Артихович В. В., Капельян С. Н.** Аналитическое исследование тепло- и массопереноса в твердеющем бетоне при тепловой обработке в камере с теплоизлучающими поверхностями // Инж.-физ. журн. 1975. Т. 28, № 1. С. 57–62.
3. **Беркович Т. М.** Комбинированная гидротермальная обработка асбестобетонных изделий. М.: Стройиздат, 1967.
4. **Фролов В. Н.** Специальные классы функций в анизотропной теории упругости. Ташкент: Фан, 1981.
5. **Спиваков Ю. Л.** Специальные классы решений линейных дифференциальных уравнений и их приложения к анизотропной и неоднородной теории упругости. Ташкент: Фан, 1986.
6. **Фролов В. Н., Рожкова Е. В.** Операторный алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений, описывающих одномерные динамические процессы // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики АН РУз, 2003. Вып. 112. С. 99–108.

Поступила в редакцию 19/IX 2008 г.,
в окончательном варианте — 30/VII 2009 г.