ПМТФ, № 3, 1965

НЕКОТОРЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ ЭНЕРГИИ И СПЕКТР ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РЕЖИМЕ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. А. Галеев

(*Новосибирск*)

Термодинамически неравновесная жидкость стремится вернуться в свое устойчивое равновесное состояние благодаря диссипации и перераспределению части своей энергии в результате индивидуальных столкновений частиц. Однако при сильном отклонении жидкости от состояния термодинамического равновесия более выгодным оказывается переход ее в состояние хаотического движения, когда оказывается возможной более быстрая ликвидация неравновесности при активном протекании турбулентных процессов переноса, перекрывающих по величине классические процессы молекулярного переноса. Отыскание спектра и уровня энергии возникающего турбулентного движения является очень сложной и в ряде случаев математически невыполнимой задачей. Поэтому полезно иметь хотя бы какие-то ограничения на их величины, чтобы оценить роль турбулентных процессов переноса в картине эволюции неустойчивого состояния жидкости. В качестве таких условий, дающих ограничения на величины амплитуды и фаз колебаний возникающих пульсаций, выберем условия устойчивости установившегося турбулентного состояния жидкости.

Согласно представлениям Л. Д. Ландау [1], движение жидкости в режиме развитой турбулентности можно мыслить себе как некоторое квазипериодическое движение и записать физические величины в виде суммы из периодических функций с различными периодами [1]

$$\psi^\alpha (x, y, z, t) = \sum_{p_1, \ldots, p_n = \infty}^{+\infty} A^\alpha_{p_1 \ldots p_n} (x, y, z) \exp \Big[-\sum_{l=1}^{n} i p_l (\omega_l t + \varphi_l) \Big] \qquad (1)$$

Здесь ψ^α (x, y, z, t) — вектор состояния, компонентами которого являются параметры, характеризующие это состояние (гидродинамическая скорость $\psi^1 \equiv v_x$, давление $\psi^2 = p$ и т. д.), ω_l — частота, φ_l — фаза отдельных периодических движений.

В состоянии установившейся турбулентности параметры, характеризующие поток, зависят от времени, поэтому в уравнениях гидродинамики для малых отклонений от этого состояния коэффициенты будут зависеть от времени. Эти уравнения представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\psi^\alpha (\mathbf{r}, t) = \sum_\beta H^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \psi \right) \delta\psi^\beta (\mathbf{r}, t) \qquad (2)$$

Здесь $H^{\alpha\beta}$ — дифференциальный оператор, зависящий от ψ^α. Будем предполагать турбулентность однородной, так что можно воспользоваться преобразованием Фурье по координатам и свести (2) к системе линейных дифференциальных уравнений для компонент Фурье $\delta\psi_{\mathbf{k}}^\alpha (t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_{\mathbf{k}}{}^\alpha = \sum_{\beta,\, \mathbf{k}'} H^{\alpha\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \{\psi_{\mathbf{k}''}{}^\gamma (t)\} \, \delta\psi_{\mathbf{k}'}{}^\beta \qquad (3)$$

---

[1] При конечном числе Рейнольдса число степеней свободы турбулентного движения n, представленного здесь движениями с n различными периодами, также конечно.

Поведение малых возмущений $\delta\psi_{\mathbf{k}}^{\alpha}(t)$ во времени может быть описано в общем виде достаточно просто лишь в двух противоположных предельных случаях: 1) когда декремент затухания малых возмущений значительно больше характерных частот турбулентных движений; 2) наоборот, когда турбулентный фон осциллирует быстрее, чем затухают малые возмущения.

Второй случай встречается при рассмотрении задач о так называемой слабой турбулентности. Поскольку эта последняя задача решается в самом общем виде (см., например, [2]), то здесь представляет интерес разобрать подробно лишь первый случай, когда

$$\frac{1}{\omega_l\,|\,\delta\psi\,|}\,\frac{\partial\,|\,\delta\psi\,|}{\partial t} \gg 1 \tag{4}$$

При выполнении (4) можем решать уравнение (3), считая коэффициенты $H_{\mathbf{kk}'}^{\alpha\beta}$ постоянными во времени. Тогда характеристические числа λ для решений $\delta\psi_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ в виде $\sim e^{\lambda t}$ находятся из характеристического уравнения

$$|\,H_{kk'}^{\alpha\beta} - \lambda\delta_{kk'}\delta^{\alpha\beta}\,| = 0 \tag{5}$$

Расписывая его в явном виде

$$\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_N = 0 \tag{6}$$

к нему можно непосредственно применить условия Раусса — Гурвица [3]; они необходимы и достаточны для того, чтобы действительная часть всех характеристических чисел в силу предположения об устойчивости турбулентного состояния была отрицательна [1].

В практически интересующих нас случаях коэффициенты уравнения (6) действительны, так что все корни его попарно комплексно сопряжены. С учетом этого все коэффициенты его должны быть положительными

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_N > 0 \tag{7}$$

Более сильные ограничения на коэффициенты накладывает условие Раусса — Гурвица, заключающееся в положительности последовательности N первых главных миноров определителя

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots \\ a_5 & a_4 & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix} \tag{8}$$

Кроме неравенств (7), (8), полезным оказывается также достаточный признак невырожденности матрицы $\|\,H_{kk'}^{\alpha\beta} - \lambda\delta_{kk'}\,\delta^{\alpha\beta}\,\|$, предложенный Адамаром (3); матрица будет неособенной, если

$$|\,\lambda - H_{\mathbf{kk}}^{\alpha\alpha}\,| > \sum_{\mathbf{k}',\,\beta}{}'\,|\,H_{\mathbf{kk}'}^{\alpha\beta}\,|$$

Здесь штрих у знака суммы указывает, что в ней опущен диагональный член. С другой стороны, известно, что в режиме развившейся турбулентности достаточно лишь незначительно увеличить число Рейнольдса, чтобы появилось дополнительное неустойчивое решение [1]. Поэтому всегда существует собственное значение $\lambda = \lambda_-$ с очень малой отрицательной действительной частью $\operatorname{Re}\lambda_- \to 0$. Тогда вышеприведенное условие Адамара заведомо нарушается, т. е.

$$\sum_{\mathbf{k}',\,\beta}{}'\,|\,H_{\mathbf{kk}'}^{\alpha\beta}\,| > \sqrt{|\,\lambda_-\,|^2 + |\,H_{\mathbf{kk}}^{\alpha\alpha}\,|^2} > |\,H_{\mathbf{kk}}^{\alpha\alpha}\,| \tag{9}$$

---

[1] Эти условия будут критерием асимптотической устойчивости в смысле (4), который не учитывает явлений типа параметрического резонанса.

В вышеприведенном анализе устойчивости установившегося турбулентного состояния жидкости принималось представление о стационарности распределения энергии по компонентам Фурье турбулентного движения. Это представление на самом деле не всегда оправдано. Так, например, в случае неустойчивости Гельмгольца более разумно предполагать стационарное распределение турбулентной энергии в виде отдельных линейных вихрей и рассматривать устойчивость такого стационарного распределения ([4]). Поэтому в каждом конкретном случае необходимо выбирать для описания картины турбулентности более удобные переменные.

В заключение отметим, что условия устойчивости турбулентного состояния дают, как правило, лишь ограничения снизу на амплитуды пульсаций и ограничения на фазы амплитуд, так как именно величиной последних определяется темп откачки энергии из неустойчивых мод (при определенных предположениях о фазах амплитуд, правда, удается получить также и ограничения на амплитуды и сверху). В этом смысле было бы полезно привлечь термодинамические соображения о минимальном производстве энтропии [[5]], которые, вероятно, давали бы ограничение амплитуд сверху. Однако введение понятия энтропии всегда требует введения определенного правила усреднения картины развитой турбулентности, что не всегда удается сделать разумным способом.

В качестве иллюстрации развитого выше метода рассмотрим турбулентную конвекцию несжимаемой жидкости в поле тяжести g. Она описывается уравнениями непрерывности, движения и теплового баланса [[6]]:

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\nabla\frac{p}{\rho}+g\alpha T'\mathbf{h}+\nu\nabla^2\mathbf{v} \qquad \left(\alpha=\frac{1}{T}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial T}+\mathbf{v}\cdot\nabla T''=\varkappa\nabla^2T'+\beta\mathbf{v}\cdot\mathbf{h} \qquad (\beta=-(\nabla T-\nabla_{ad}T)\cdot\mathbf{h})$$

Здесь v, p, T, ρ — вектор гидродинамической скорости, давление, температура и плотность среды соответственно, β — сверхадиабатический градиент средней температуры, T' — пульсация температуры, ν, $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. Картина развивающегося турбулентного движения будет зависеть от двух безразмерных параметров: числа Прандтля P и числа Рейнольдса R [[7]]

$$P=\frac{\nu}{\varkappa}\ll 1, \qquad R=\frac{g\alpha\beta d^4}{\varkappa\nu(2\pi)^4}\gg 1 \tag{11}$$

Здесь d — характерный размер конвективного слоя. Предполагая число Прандтля P малым, рассмотрим лишь предельный случай очень большой теплопроводности

$$RP\ll 1 \tag{12}$$

Характер ограничений, накладываемых условиями устойчивости турбулентного фона, достаточно хорошо иллюстрируется на примере двумерного движения в плоскости x, y (это имеет место, например, если вдоль оси z приложено сильное магнитное поле H). Система (10) в этом случае упрощается и принимает в фурье-представлении вид

$$a_{\mathbf{kk}}=-\left(\nu k^2-\frac{g\alpha\beta\,[\mathbf{k}\times\mathbf{h}]^2}{\varkappa k^4}\right), \qquad \delta\mathbf{v}_{\mathbf{k}}=i\,[\mathbf{k}\times i_z]\,\delta\psi_{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi_{\mathbf{k}}=\sum_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{kk}'}\delta\psi_{\mathbf{k}'}, \qquad a_{\mathbf{kk}'}=i\,(\mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\cdot\mathbf{k})\left(1-2\frac{\mathbf{kk}'}{k^2}\right), \qquad \mathbf{v}=\mathbf{u}+\delta\mathbf{v} \tag{13}$$

Отсюда вычисляются коэффициенты характеристического уравнения (6)

$$a_1=-\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{kk}}>0, \qquad a_2=\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'}[a_{\mathbf{kk}}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'}-a_{\mathbf{kk}'}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}]>0 \tag{14}$$

$$a_3=-\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}''}[a_{\mathbf{kk}}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}''}-a_{\mathbf{kk}}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}+a_{\mathbf{kk}''}a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}]>0 \tag{15}$$

Алгоритм вычисления коэффициентов a_4, a_5, . . . ясен из (14), (15). Суммирование в (14), (15) идет в пространстве волновых чисел

$$\text{от} \quad |\mathbf{k}_0|=\frac{2\pi}{d} \quad \text{до} \quad |\mathbf{k}|_{\max}\gtrsim\frac{2\pi}{d}R^{1/4}$$

Обсудим вкратце следствия, вытекающие из (14), (15) и условий (8), (9). Закон сохранения энергии в режиме установившейся турбулентности

$$\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{kk}}\,|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2=0 \tag{16}$$

в сочетании с (14) требует, чтобы спектральная плотность энергии $|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$ резко спадала в сторону коротковолновой части спектра (особенно в области $a_{\mathbf{kk}}>0$). Условие (14) выполняется тождественно. Критерий Адамара дает оценку снизу для амплитуды длинноволновых пульсаций $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_0}$. Предполагая степенное поведение спектра

$$\frac{k\,|\,\mathbf{u}_{\mathbf{k}}\,|^2}{k_0\,|\,\mathbf{u}_{\mathbf{k}_0}\,|^2} \sim \left(\frac{k_0}{k}\right)^m \qquad \left(k_0 = \frac{2\pi}{d}\right) \tag{17}$$

этот критерий можно записать в виде

$$|\,\mathbf{u}_{\mathbf{k}_0}\,| \gtrsim \frac{g\alpha\beta\, d^3}{\varkappa\,(2\pi)^3}\left[1 + R^{1/8(3-m)}\right]^{-1} \tag{18}$$

Отметим, что с точки зрения приложений важна именно оценка энергии пульсации $^1/_2\,\mathbf{u}_{\mathbf{k}_0}^2$ снизу (18), так как сверху она ограничена выигрышем в работе $g\alpha\Delta Td$ при смещении макроскопического объема размерами $\sim d$ на расстояние $\sim d$. Полагая, что нескомпенсированный перепад температуры $\Delta T \approx \beta u_{\mathbf{k}_0}\tau_{\mathbf{k}_0}\,(\tau_{\mathbf{k}_0}{\sim}1/\varkappa \mathbf{k}_0{}^2)$, где τ_{k_0} — время диссипации градиента температуры за счет теплопроводности, получаем [7]

$$|\,\mathbf{u}_{\mathbf{k}_0}\,| \lesssim \frac{g\alpha\beta\, d^3}{\varkappa\,(2\pi)^2} \tag{19}$$

Далее, из неравенства (15) и первого из условий Раусса — Гурвица (8)

$$a_1a_2 - a_3 > 0$$

следует, что на фазы трех амплитуд $\arg a_{\mathbf{kk}'}a_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}a_{\mathbf{k}''\mathbf{k}}$ накладываются минимальные ограничения, если считать сумму этих произведений в (15) отрицательной. При этом (15) принимает вид

$$\sum_{\mathbf{k}}\left(\nu k^2 - \frac{g\alpha\beta\,[\mathbf{k}\times\mathbf{h}]^2}{\varkappa k^4}\right) \gtrsim \operatorname{Im}\sum_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}\cdot\mathbf{u}^*_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2})\,(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_2}\cdot\mathbf{q}_1)\left(\sum_{\mathbf{q}}|\,\mathbf{u}_{\mathbf{q}}\,|^2\right)^{-1} > 0 \tag{20}$$

Здесь пренебрегаем, в согласии с (18), первой суммой в (15) и учитываем, что основной вклад в сумму по произведениям трех амплитуд дает область волновых чисел $k \gg q_1 = |\,k - k'\,|,\ q_2 = |\,k' - k''\,|$. Последнее следует из того, что спектральная плотность энергии $|\,\mathbf{u}\,|_{\mathbf{q}}^2$ практически равна нулю при $q \sim |\,\mathbf{k}\,|_{max} \sim (g\alpha\beta\,/\,\varkappa\nu)^{1/4}$.

Оценивая степень «хаотичности» фаз амплитуд некоторым коэффициентом ε

$$\operatorname{Im}\sum_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}\cdot\mathbf{u}^*_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2})\,(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_2}\cdot\mathbf{q}_1) = \varepsilon\sum_{\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2}|\,(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}\cdot\mathbf{u}^*_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2})\,(\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}\cdot\mathbf{q}_1)\,| \tag{21}$$

переписываем (20) в виде

$$\varepsilon \lesssim \frac{1}{|\,\mathbf{U}_{k_0}\,|}\,\frac{g\alpha\beta d^3}{7\,(2\pi)^2}\,\frac{[1 + R^{1/4\,(1-m)}]}{[1 + R^{1/8\,(7-3m)}]}\ln R^{1/4} \tag{22}$$

Заметим, что результат не находится в противоречии с работой Э. Хопфа [8], который показал, что нормальный закон распределения скоростей несовместим со спектром Колмогорова и, следовательно, $\varepsilon > R^{-1/2}$ при $m = {}^5/_3$.

Численную оценку для ε получим, подставив в (22) определенный показатель спектра m, воспользовавшись для оценки $|\,\mathbf{U}_{\mathbf{k}_0}\,|$ неравенством (18). Неравенство (22) можно использовать и в другом отношении. Так, если предположить распределение скоростей сильно коррелированными, т. е. считать $\varepsilon \sim 1$, то из (18), (22) следует ограничение на амплитуду сверху. Отметим, наконец, что более детальное исследование последующих условий (7), (8) позволило бы усилить неравенства (18), (22).

Поступила 5 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ОГИЗ, 1944.
2. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Многочастичные аспекты в теории турбулентной плазмы. Ядерный синтез, 1965, т. 5, вып. 1
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
4. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора. Сб. «Гидродинамическая неустойчивость», Изд. «Мир», 1964.
5. Пригожин. Введение в термодинамику необратимых процессов. Изд. иностр. лит., 1960.
6. Ledoux P., Schwarzschild M., Spiegel E. On the spectrum of turbulent convection, The Astrophys., 1961, vol. 133, p. 184.
7. Weiss N. O. Convection in the presens of restraints. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1964, vol. 256, p. 99—147.
8. Хопф Э. Об описании турбулентности средствами функционального анализа. Сб. «Гидродинамическая неустойчивость», Изд. «Мир», 1964.