

ДИНАМИКА РАСТУЩЕГО С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ИЗОЛИРОВАННОГО РАЗРЕЗА В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Е. Н. Шер

(Новосибирск)

В работе [1] рассмотрена задача о развитии изолированной прямолинейной трещины в условиях антиплоской деформации при произвольном ее нагружении и произвольном законе движения ее концов. Трудность практической реализации полученного решения заключается в необходимости последовательного расчета всех дифракций волн, бегающих вдоль трещины от одного ее края до другого. При этом нахождение решения для больших времен (по сравнению с временем пробега волной длины трещины) практически невозможно.

В этом плане лучшими свойствами обладают автомодельные решения, получающиеся в задаче о развитии из нуля с постоянной скоростью прямолинейной изолированной трещины под действием соответствующей нагрузки. Произвольный закон нагружения при этом может быть приближен [2] суммой автомодельных.

Для случая плоской и осесимметричной деформации было решено несколько таких автомодельных задач [3—9]. В данной работе аналоги этих задач для антиплоской деформации рассматриваются как частный случай.

Обращение к антиплоской деформации объясняется, с одной стороны, большей математической простотой этого случая, по сравнению с плоской деформацией, и, с другой стороны, тем, что многие качественные стороны решений в случаях плоской и антиплоской деформаций являются общими.

1. Автомодельные задачи. Как известно [1], при антиплоской деформации единственной, отличной от нуля компонентой вектора перемещений является w — смещение вдоль оси z . Функция $w(x, y, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где b — скорость поперечных волн. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения выражаются через w следующим образом:

$$(1.1) \quad \tau_{yz} = \mu \partial w / \partial y, \quad \tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x,$$

где μ — модуль сдвига.

В дальнейшем будем искать решения отдельных задач как для w , так и для ее производных по времени $v_n = \partial^{(-n)} w / \partial t^{(-n)}$, $n = -1, -2, \dots$ и первообразных v_n таких, что $w = \partial^n v_n / \partial t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Все эти функции $v_n(x, y, t)$ также удовлетворяют волновому уравнению.

Рассмотрим класс автомодельных решений, состоящий из решений волнового уравнения для v_n , представляющих собой однородные функции переменных x, y, t нулевого порядка. Такие решения полностью описываются классом функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [10]. Так, любую функцию $v_n(x/bt, y/bt)$, удовлетворяющую волновому уравнению, можно представить в виде

$$(1.2) \quad v_n(x/bt, y/bt) = \operatorname{Re} V_n(z),$$

где $V_n(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного z , связанного с переменными x, y, t соотношением

$$\delta \equiv t - zx - y\sqrt{b^{-2} - z^2} = 0.$$

Приведем здесь формулы замены переменных при дифференцировании

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{z}{\delta'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\sqrt{b^{-2} - z^2}}{\delta'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \delta' = \frac{\partial \delta}{\partial z}.$$

В частности, $z = t/x$, $\delta' = -x$ при $y = 0$.

Соотношение (1.2) позволяет свести задачу для волнового уравнения к задаче нахождения аналитической функции $V_n(z)$. При этом начальные и граничные условия задачи для волнового уравнения должны перейти в граничные условия для нахождения $V_n(z)$.

Используя связь $v_n(x/bt, y/bt)$ со смещением $w(x, y, t)$ и формулы (1.1), можно получить, что компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{yz} = -\tau_0 (t_0/t)^{n+1} \tau_{yz}^0(x/bt, y/bt).$$

В соответствии с этим рассмотрим задачу о расширении из нуля с постоянной скоростью v разреза, берега которого нагружены сдвигающим напряжением

$$(1.4) \quad \tau(x, t) = \pm \tau_0 (t_0/t)^{n+1} f(x/bt),$$

где $f(s)$ — произвольная интегрируемая функция; x — координата вдоль линии разреза.

Наиболее простое решение получается при $n = 0$. В этом случае решение сводится к нахождению функции $V_0(z_1)$, $z_1 = 1/bz$, реальная часть которой есть перемещение

$$w(x/bt, y/bt) = \operatorname{Re} V_0(z_1).$$

Как известно [10], верхней полуплоскости плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$ соответствует в физической плоскости внутренность верхнего полукруга $x^2 + y^2 \leq b^2 t^2$. При этом отрезок оси $y_1 = 0$, $|x_1| < v/b$ соответствует разрезу $|x| < vt$; $v/b < |x_1| < 1$ — участкам оси x от носиков разреза до волны; $|x_1| > 1$ — волне $x^2 + y^2 = b^2 t^2$, $y > 0$. Бесконечно удаленной точке в плоскости z_1 соответствует физическая точка волны $x = 0$, $y = bt$.

Выпишем граничные условия рассматриваемой задачи на оси x_1 , плоскости z_1 . При $y_1 = 0$, $|x_1| < v/b$ задано $\tau_{yz} = -\tau_0 t_0 f(x_1)/t$. Используя (1.1) — (1.3) и условие $y = 0$ на этом интервале, получим

$$\operatorname{Re} V_0' \sqrt{b^{-2} - z^2} = \operatorname{Re} M_0 = \tau_0 t_0 b x_1 f(x_1)/\mu.$$

Здесь и дальше штрих означает дифференцирование по комплексной переменной z . При $y_1 = 0$, $v/b < |x_1| < 1$ перемещения $w(x/bt, 0)$ равны нулю, т. е. $\operatorname{Re} V_0(x_1) = 0$. При $y_1 = 0$, $|x_1| > 1$ $w = 0$ вследствие нулевых начальных данных задачи, откуда следует, что и на этом участке $\operatorname{Re} V_0(x_1) = 0$.

Для функции $M_0(z_1) = V_0' \sqrt{b^{-2} - z^2}$ имеем следующие граничные условия при $y_1 = 0$:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} M_0 &= \tau_0 t_0 b x_1 f(x_1)/\mu && \text{при } |x_1| < vt, \\ \operatorname{Im} M_0 &= 0 && \text{при } v/b < |x_1| < 1, \\ \operatorname{Re} M_0 &= 0 && \text{при } |x_1| > 1. \end{aligned}$$

Для однозначного нахождения аналитической функции $M_0(z_1)$ по граничным условиям (1.5) необходимо определить характер поведения искомой функции в точках $z_1 = 0, \infty, \pm v/b, \pm 1$, исходя из физической постановки задачи.

1. Точка $z_1 = 0$, $z = \infty$ соответствует середине трещины. Предположим ограниченность перемещения в этой точке $V_0 \sim a_0 + a_1/z + \dots$ ($a_0, a_1, \dots$ — произвольные действительные числа). Отсюда $V'_0 \sim 1/z^2$, $M_0 \sim i/z \sim iz_1$.

2. Точка $z_1 = \infty$, $z = 0$ соответствует точке волны $x = 0$, $y = bt$. Так как $\operatorname{Re} V_0(z_1) = 0$ по обе стороны от точки $z = 0$ при $\operatorname{Re} z = 0$, то по принципу симметрии $V_0(z_1)$ можно продолжить за действительную ось слева и справа от $z = 0$ непрерывно. Это означает, что точка $z = 0$ не может быть точкой ветвления функции $V_0(z_1)$. Разложение Лорана в этой точке имеет вид

$$V_0(z_1) \sim i(a_0 + a_1 z + \dots).$$

Отсутствие членов с отрицательными степенями объясняется, с одной стороны, тем, что нет никаких причин ожидать особого поведения решения в этой точке волны по сравнению с другими ее точками, и, с другой стороны, тем, что появление таких членов означало бы нагружение этой точки каким-то внешним воздействием. Можно показать, что функция $V_0 = 2Q/i\pi\mu bz$ — есть решение задачи об упругом поле антиплоских смещений, возникающем в плоскости при нагружении ее разбегающейся со скоростью b вдоль оси y пары сосредоточенных сил $\pm Q$. В итоге, при $z_1 \rightarrow \infty$ имеем $M_0(z_1) \sim i$.

3. При $z_1 = +v/b$, что соответствует носикам разреза, будем предполагать у $M_0(z_1)$ наличие корневой особенности $(z_1 - v^2/b^2)^{-1/2}$, так как значение $\operatorname{Re} M_0(z_1)$ в данной задаче пропорционально τ_{yz} .

4. Точки $z_1 = \pm 1$ соответствуют точкам волны на оси x . Аналогично случаю $z_1 = \infty$ можно показать, что эти точки не могут быть для $V_0(z_1)$ точками ветвления, а наличие в разложении Лорана при $z \rightarrow b^{-1}$ членов $(z - b^{-1})^{-m}$, $m > 0$, означало бы дополнительное сосредоточенное нагружение этой точки. Отсюда допустим в этой точке следующий вид разложения: $V_0(z_1) \sim i[a_0 + a_1(z - b^{-1}) + \dots]$, откуда следует, что при $z_1 \rightarrow \pm 1$ $M_0 \sim \sqrt{z_1^2 - 1}$. Функция $M_0(z_1)$, удовлетворяющая граничным условиям (1.5) и имеющая нужное поведение в точках $z_1 = 0, \infty, \pm v/b, \pm 1$, единственна:

$$M_0(z_1) = \frac{z_1 \sqrt{z_1^2 - 1}}{\pi i \sqrt{z_1^2 - v^2/b^2}} \int_{-v/b}^{v/b} \frac{t_0 \tau_0 b f(s)}{\mu(s - z_1)} \sqrt{\frac{s^2 - v^2/b^2}{s^2 - 1}} ds.$$

Приведем выражение для коэффициента интенсивности напряжений. Если напряжения вблизи носика трещины имеют асимптотику $\tau_{yz} \approx N/\sqrt{x - vt}$, то

$$(1.6) \quad N = \frac{\tau_0 t_0 b \sqrt{1 - v^2/b^2}}{\pi \sqrt{2vt}} \int_{-v/b}^{v/b} \sqrt{\frac{v/b + x}{v/b - x}} \frac{f(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Отсюда при $f(x) = 1$, что соответствует постоянному вдоль разреза нагружению $\tau(x, t) = \tau_0 t_0/t$, следует

$$N = 2N^0 K(v/b) \sqrt{1 - v^2/b^2}/\pi,$$

где $N^0 = \tau_0 t_0 (v/2t)^{1/2}$ — значение коэффициента интенсивности для статической задачи о равномерном нагружении разреза длины $2vt$ нагрузкой $\tau_0 t_0/t$; $K(v/b)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

При $f(x) = Q\delta_1(x)/\tau_0 b t_0$, что соответствует нагружению постоянной силой, из (1.6) следует

$$(1.7) \quad N = N^0 \sqrt{1 - v^2/b^2}, \quad N^0 = Q/\pi \sqrt{2vt},$$

где N^0 — значение коэффициента интенсивности для статической задачи о разрезе длины $2vt$, нагруженном сдвигающими силами $\pm Q$. Компонента тензора напряжения τ_{yz} в этом случае в интервале $vt < x < bt$ определяется выражением

$$(1.8) \quad \tau_{yz} = Qv \sqrt{b^2 t^2 - x^2} / \pi b x \sqrt{x^2 - v^2 t^2}.$$

Случай $n = 1$ в (1.4) исследуется аналогично предыдущему [11]. При этом коэффициент интенсивности определяется выражением

$$(1.9) \quad N = \frac{\tau_0 t_0^2 \sqrt{vt/2}}{\pi t^2 \sqrt{1 - v^2/b^2}} \frac{b}{v} \int_{-v/b}^{v/b} \frac{f(s) \sqrt{s + v/b} \sqrt{1 - s^2}}{\sqrt{v/b - 1}} ds.$$

Из (1.9) следует для равномерно распределенной нагрузки:

$$\begin{aligned} \tau(x, t) &= \tau_0 (t_0/t)^2 \delta_0(1 - |x/vt|), \\ N &= 2N^0 E(v/b)/\pi \sqrt{1 - v^2/b^2}, \quad N^0 = \tau_0 (t_0/t)^2 \sqrt{vt/2}; \end{aligned}$$

для сосредоточенной нагрузки:

$$\begin{aligned} \tau(x, t) &= Q t_0 \delta_1(x)/t, \\ N &= N^0 / \sqrt{1 - v^2/b^2}, \quad N^0 = Q t_0 / \pi t \sqrt{2vt}. \end{aligned}$$

В последнем случае τ_{yz} в интервале между носиком трещины и волной на оси $y = 0$ определяется выражением

$$(1.10) \quad \tau_{yz} = Q t_0 v / \pi b^2 t^2 x_1 \sqrt{x_1^2 - v^2/b^2} \sqrt{1 - x_1^2}.$$

Для значения $n \geq 2$ не удается построить решения, удовлетворяющего граничным условиям и нужному поведению в точках $z_1 = 0, \infty, \pm v/b, \pm 1$, определяемому аналогично тому, как это делалось для $n = 0; 1$.

Чтобы понять причину этого, найдем дипольный момент D сил нагружения для частного случая нагружения постоянным по длине разреза напряжением $\tau = \tau_0 (t_0/t)^{n+1}$. Такой дипольный момент D пропорционален $\tau v^2 t^2$. Так, для $n = 0$ $D \sim t$. Для $n = 1$ $D \sim \text{const}$, что соответствует задаче о включении диполя в начале координат в нулевой момент времени. В случае $n = 2$ $D \sim t^{-1}$. Такое нагружение приводит к бесконечным смещениям, аналогично нагружению полуплоскости силой $Q(t)$ (задача Лэмба), не интегрируемой в начальный момент времени.

Исследуем теперь случай $n \leq -1$ ($n = k - 1$; $k = 0; -1, -2, \dots$). При таком законе нагружения

$$\begin{aligned} v_n(x/bt, y/bt) &= \text{Re} V_n(z_1) = \partial^{1-k} w / \partial t^{(1-k)}, \\ \partial^{(1-k)} \tau_{yz} / \partial t^{(1-k)} &= \mu \text{Re} V'_n \sqrt{b^{-2} - z^2} / \delta' = \mu \text{Re} M_n / \delta'. \end{aligned}$$

Отсюда при $|x_1| < v/b$, $y_1 = 0$, когда задана внешняя нагрузка (1.4), имеем $\text{Re} M_n = (x/\mu) \partial^{1-k} \tau(x, t) / \partial t^{1-k}$. При $v/b < |x_1| < 1$ $w = 0$, $\partial^{(1-k)} w / \partial t^{(1-k)} = 0$, $\text{Re} V_n = 0$, $\text{Im} M_n = 0$. При $|x_1| > 1$ $\text{Re} V_n = 0$, $\text{Re} M_n = 0$.

Оценим характер поведения функций $M_n(z_1)$ в точках $z_1 = 0, \pm v/b, \pm 1, \infty$ при условии $f(x_1) = f(-x_1)$ в (1.4).

При $z_1 = 0$ $V_n \sim a_0 + a_2/z^2 + \dots$, $M_n \sim iz_1^0$;

$$z_1 = \infty \quad V_n \sim i(a_1 z + a_3 z^3 + \dots), \quad M_n \sim i;$$

$$z_1 = \pm v/b \quad M_n \sim (z_1^2 - v^2/b^2)^{-(3-2k)/2};$$

$$z_1 = \pm 1 \quad V_n \sim i[a_0 + a_1(z \mp b^{-1}) + \dots], \quad M_n \sim \sqrt{z_1^2 - 1}.$$

Функция, удовлетворяющая всем этим требованиям, имеет вид

$$(1.11) \quad M_n = \frac{z_1 \sqrt{z_1^2 - 1}}{(z_1^2 - v^2/b^2)^{(3-2k)/2}} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-v/b}^{v/b} \frac{\operatorname{Re} M_n(s^2 - v^2/b^2)^{(3-2k)/2} ds}{s \sqrt{s^2 - 1} (s - z_1)} + \right. \\ \left. + iz_1 \sum_{m=0}^{|k|} A_m z_1^{2m} \right],$$

где A_m ($m = 0, 1, \dots, |k|$) — неопределенные константы, для нахождения которых необходимо по M_n восстановить значения $\partial^p \tau_{yz} / \partial t^n$ ($p = 0, \dots, |k|$) на берегах разреза и потребовать выполнения соответствующего граничного условия в какой-нибудь точке разреза, например, $x = vt - 0, y = 0$. При этом получается линейная относительно A_m система уравнений

$$(1.12) \quad \frac{\partial^p \tau_{yz}}{\partial t^p} = - \frac{\partial^p \tau(vt, t)}{\partial t^p} = \mu \frac{x^{(-k-p)}}{(-k-p)!} \operatorname{Re} \int_{b^{-1}}^{v^{-1}-0} (v^{-1} - t)^{-p-k} M_n dt,$$

решение которой завершает построение функции $M_n(z_1)$ (1.11).

Приведем выражения для коэффициентов интенсивности при равномерно распределенном и сосредоточенном нагружении, найденные описанной выше процедурой при $k = 0$

$$(1.13) \quad \tau = \tau_0 \delta_0(1 - |x/vt|),$$

$$N = N^0 \sqrt{1 - v^2/b^2} / E (\sqrt{1 - v^2/b^2}), \quad N^0 = \tau_0 \sqrt{vt/2};$$

$$(1.14) \quad \tau = Q \delta_1(x) t / t_0,$$

$$N = N^0 \sqrt{1 - v^2/b^2} [1 - v^2 K (\sqrt{1 - v^2/b^2}) / b^2 E (\sqrt{1 - v^2/b^2})], \quad N^0 = Qt / \pi t_0 \sqrt{2vt}.$$

Аналог последней задачи для плоской деформации рассматривается в [7], но там в решении опущен член, содержащий неопределенную константу и имеющий смысл решения при нагружении берегов разреза постоянным напряжением (задача Броберга). Таким образом, решение, найденное в [7], соответствует комбинации сосредоточенного и некоторого равномерного нагружения.

С увеличением значения $|k|$ получение подобных (1.13), (1.14) аналитических зависимостей становится затруднительным и более реальным, по-видимому, будет численный метод получения и решения системы (1.12) для A_m . Из решений рассмотренных автомодельных задач теории упругости о динамическом нагружении растущего со скоростью v разреза следует, что при $v/b \ll 1$ коэффициент интенсивности напряжения близок

к своему «квазистатическому» значению $N^0(t)$, определяемому из решения статической задачи. Поправочный множитель к квазистатическому значению N/N^0 в рассмотренных случаях существенно зависит от закона нагружения (1.4) и может быть как меньше, так и больше единицы.

2. Сосредоточенное нагружение. Рассматривается следующая задача. Из начала координат $x = y = 0$ в покоящейся в начальный момент упругой плоскости начинает развиваться с постоянной скоростью v вдоль оси x вправо и влево разрез $|x| < vt$, $y = 0$. Берега разреза нагружаются сосредоточенным усилием

$$(2.1) \quad \tau(x, t) = \pm f(t)\delta_1(x)\delta_0(t),$$

действующим вдоль оси z . Здесь $\tau(x, t)$ — напряжение нагрузки; $\delta_1(x)$ — дельта-функция Дирака; $\delta_0(t)$ — функция Хевисайда; $f(t)$ — функция, определяющая изменение сил во времени; знаки $+$ и $-$ относятся к верхнему и нижнему берегам разреза. Требуется определить коэффициент интенсивности напряжений в кончиках разреза.

В работе [2] предложено произвольный закон нагружения типа (2.1) приближать степенным рядом по t :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$

Этот прием позволяет свести решение поставленной задачи к решению автомодельных задач о нагружении подобного разреза нагрузкой

$$(2.2) \quad \tau(x, t) = \pm t^i \delta_1(x)\delta_0(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение для закона (2.1) при этом получается как линейная комбинация решений с нагрузкой (2.2), а коэффициент интенсивности напряжений в носике разреза находится в виде ряда

$$(2.3) \quad N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i N_i(t),$$

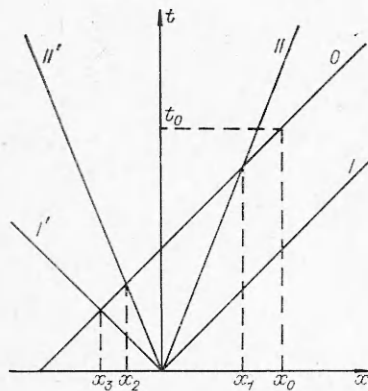
где $N_i(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в автомодельной задаче с нагрузкой (2.2).

Задача с нагрузкой (2.2) является частным случаем автомодельных задач, рассмотренных в п. 1, где приведены аналитические выражения N_i при $i = 0$ (1.7) и $i = 1$ (1.14). При $i > 1$ значения N_i найдем численно, решая автомодельную задачу с нагрузкой (2.2) путем сведения ее к интегральному уравнению Фредгольма относительно неизвестной компоненты тензора напряжения τ_{yz} при $y = 0$. Для составления такого уравнения относительно $\tau_{yz}(x, 0, t)$ при $vt < |x| < bt$ воспользуемся результатом [1].

Напряжение в точке $(x_0, 0)$ на продолжении полубесконечного движущегося и произвольно нагружаемого разреза $x < l(t)$, $y = 0$ в первоначально покоящейся плоскости в момент времени t_0 определяется выражением

$$(2.4) \quad \tau_{yz}(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_0 - x_1}} \int_{x_0 - t_0}^{x_1} p(x, t_0 - x_0 + x) \frac{\sqrt{x_1 - x}}{x_0 - x} dx,$$

где x_1 — координата точки пересечения характеристики, проходящей через точку (x_0, t_0) , с траекторией конца разреза в плоскости (x, t) ; $p(x, t)$ — нагрузка берегов разреза, заданная при $x < l(t)$.



Фиг. 1

В плоскости (x, t) исследуемая задача имеет конфигурацию, изображенную на фиг. 1. Характеристики I и I' отделяют области покоя от области движения. Траектории концов разреза изображены прямыми II и II' . Между ними находится область, где нагрузка $p(x, t)$ задана формулой (2.2).

Считая напряжения при $x < vt$ заданными, получим из (2.4) интегральное уравнение для τ_{yz} . Интегрирование в (2.4) при этом производится по характеристике O (см. фиг. 1) на интервалах (x_2, x_1) , где нагрузка $p(x, t) = \tau(x, t)$ задана из (2.2) и (x_3, x_2) , где нагрузка $p(x, t) = -\tau_{yz}(x, t)$ неизвестна.

Вследствие автомодельности задачи с нагрузкой (2.2) напряжения τ и τ_{yz} представляются в виде

$$(2.5) \quad \tau = t^{i-1} \delta_1(x/t), \quad \tau_{yz} = t^{i-1} \varphi_i(x/t).$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4) и переходя к переменной $\xi = x/t$, получаем интегральное уравнение относительно $\varphi_i(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i(\xi_0)}{(1-\xi_0)^i} \left(\frac{\xi_0}{1-\xi_0} - \frac{v}{1-v} \right)^{1/2} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^v \frac{\varphi_i(\xi)}{(1-\xi)^i} \left(\frac{v}{1-v} - \frac{\xi}{1-\xi} \right)^{1/2} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi \xi_0} \sqrt{\frac{v}{1-v}}. \end{aligned}$$

Используя симметрию задачи $\varphi_i(\xi) = \varphi_i(-\xi)$ и вводя новую неизвестную функцию

$$(2.6) \quad u_i(\xi) = \varphi_i(\xi) (1 - \xi)^{-i-1/2} \pi^{1/2} \sqrt{\frac{v}{1-v}},$$

получаем для $u_i(\xi)$ уравнение

$$(2.7) \quad u_i(\xi_0) = -\frac{1}{\pi} \int_v^{\xi_0} \frac{u_i(\xi)}{\xi_0 + \xi} \frac{(1-\xi)^{i+1/2}}{(1+\xi)} \left(\frac{\xi+v}{\xi-v} \right)^{1/2} d\xi + \frac{1}{\xi_0}.$$

При $i \geq -1$ это уравнение принадлежит к классу уравнений Фредгольма. Для $i = -1$; 0 решением (2.7) является функция

$$u_i = \sqrt{v(1+\xi)^{i+1/2}} / \pi \xi \sqrt{\xi+v}.$$

Эти решения совпадают с (1.10), (1.8).

Для $i \geq 1$ уравнение (2.7) решалось численно после приведения его заменой переменной интегрирования, подобранной так, чтобы избавиться от корневых особенностей, к следующему виду:

$$(2.8) \quad u_i(x) = -(1-v)^{i+1} \int_0^1 \frac{u(s)}{x+s} \frac{[\cos(\pi t/2)]^{2i+2} \sqrt{v+s}}{(1+s)^{i+1/2}} dt + \frac{1}{x},$$

$$s = v + (1-v) \sin^2(\pi t/2).$$

Интеграл в (2.8) представляется в виде квадратурной формулы типа Гаусса с фиксированными крайними узлами [12]

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^r c_k f(x_k),$$

где порядок r взят равным 15. Система линейных алгебраических уравнений, получающаяся из (2.8) для значений u_i в узлах квадратурной формулы x_k , решалась по стандартной программе.

Сравнение полученного таким образом численного решения с аналитическим при $i = 0$, $v = 0,4$ показало, что относительная ошибка в этом случае не превышает 10^{-7} .

Для больших i и малых $(1 - v)$ из уравнения (2.8) следует

$$(2.9) \quad u_i(x) \approx 1/x.$$

Это подтверждено численным расчетом. Так, уже при $v = 0,4$, $i = 1$ максимальное отклонение от асимптотики (2.9) составляло 1,5% и с ростом i очень быстро уменьшалось. Для увеличения точности расчетов при больших i численно считалось уравнение для функции $w_i(x) = 1/x - u_i(x)$, легко получающееся из (2.8). Контролировалась точность сравнением с решением, найденным с помощью квадратурной формулы 10-го порядка.

В таблице приведены значения $vw_i(v)$, вычисленные для случая $v = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ при $0 \leq i \leq 9$.

Используя значение $vw_i(v)$, можно найти коэффициент интенсивности напряжений при особенности в кончике разреза в задаче (2.2). Из (2.5), (2.6) следует

$$(2.10) \quad N_i = i^{-1/2}(1-v)^{i+1/2}[1 - vw_i(v)]/\pi\sqrt{v}.$$

При больших i и v из (2.9), (2.10) следует

$$N_i \approx i^{-1/2}(1-v)^{i+1/2}/\pi\sqrt{v}.$$

Построим теперь решение задачи с нагрузкой (2.1), функция $f(t)$ которой представима в интервале $0 < t < \infty$ рядом Тейлора $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$.

i	$v=0,2$	$v=0,4$	$v=0,6$	$v=0,8$
0	0,225 403	0,163 340	0,105 573	0,513 167 · 10 ⁻¹
1	0,142 952	0,630 221 · 10 ⁻¹	0,223 547 · 10 ⁻¹	0,453 999 · 10 ⁻²
2	0,902 05 · 10 ⁻¹	0,241 791 · 10 ⁻¹	0,480 846 · 10 ⁻²	0,424 334 · 10 ⁻³
3	0,568 226 · 10 ⁻¹	0,937 153 · 10 ⁻²	0,106 459 · 10 ⁻²	0,414 002 · 10 ⁻⁴
4	0,358 242 · 10 ⁻¹	0,367 91 · 10 ⁻²	0,241 062 · 10 ⁻³	0,414 889 · 10 ⁻⁵
5	0,226 381 · 10 ⁻¹	0,146 107 · 10 ⁻²	0,554 745 · 10 ⁻⁴	0,423 211 · 10 ⁻⁶
6	0,143 487 · 10 ⁻¹	0,585 757 · 10 ⁻³	0,129 177 · 10 ⁻⁴	0,437 142 · 10 ⁻⁷
7	0,912 4 · 10 ⁻²	0,236 64 · 10 ⁻³	0,303 47 · 10 ⁻⁵	0,455 760 · 10 ⁻⁸
8	0,582 0 · 10 ⁻²	0,961 9 · 10 ⁻⁴	0,717 90 · 10 ⁻⁶	0,478 61 · 10 ⁻⁹
9	0,372 4 · 10 ⁻²	0,393 0 · 10 ⁻⁴	0,170 77 · 10 ⁻⁶	0,505 49 · 10 ⁻¹⁰

Согласно (2.3), (2.10), коэффициент интенсивности напряжений при таком нагружении берегов разреза выражается формулой

$$(2.11) \quad N(t) = \sqrt{1-v} \left[f(s) - v \sum_{i=0}^{\infty} a_i w_i(v) s^i \right] / \pi \sqrt{vt},$$

$$s = t(1-v),$$

которая при $v \rightarrow 1$ имеет асимптотический вид

$$(2.12) \quad N(t) \approx N^1(t) = \sqrt{1-v} f[t(1-v)] / \pi \sqrt{vt}.$$

Заметим, что сходимость ряда в выражении (2.11) лучше, чем ряда для $f(t)$, так как множитель $w_i(v)$ с ростом i быстро убывает.

Это позволяет при заданном отрезке ряда для $f(t)$ получать по формуле (2.11) $N(t)$ при t , большем, чем допустимо из условия аппроксимаций $f(t)$ данным отрезком ряда.

В качестве первого примера рассмотрим экспоненциальный закон изменения сил нагружения во времени

$$(2.13) \quad f(t) = e^{-t} \approx \sum_{i=0}^m (-t)^i / i!.$$

Ошибка при вычислении N по формуле (2.11) при $t = 16,7$, $v = 0,4$, $m = 16$ составляет 10^{-4} , в то время как для ряда (2.13) при $m = 15$ ошибка того же порядка имеет место при $t = 3,4$.

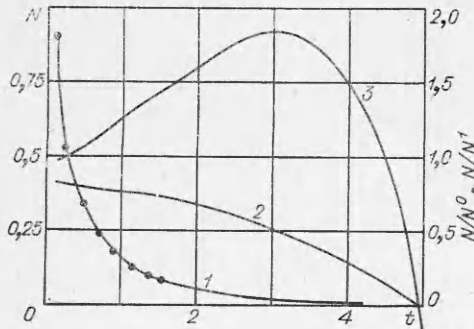
На фиг. 2 показаны зависимости N , N/N^0 , N/N^1 (кривые 1—3 соответственно) для случая $v = 0,4$ при $m = 16$. За $N^0(t)$ здесь принято значение коэффициента интенсивности, которое получается при решении статической задачи о нагружении разреза длины $2vt$ силами $f(t)$

$$(2.14) \quad N^0 = f(t) / \pi \sqrt{2vt}.$$

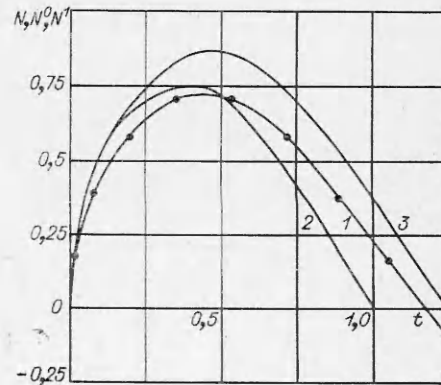
Зависимость $N^1(t)$ определена формулой (2.12).

Качественно поведение $N(t)$ при $t > 4,5$ в этом случае можно описать следующим образом: переход через 0 при $t = 4,96$, убывание до -10^{-3} при $t = 6,67$ и затем медленный рост до $-2 \cdot 10^{-4}$ при $t = 16,7$.

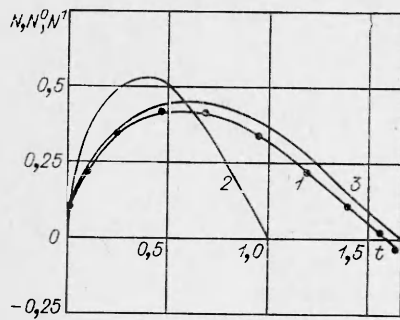
Вид зависимостей N/N^0 и N/N^1 показывает, что для $v = 0,4$ $N(t)$ сильно отличается как от N^0 , так и от N^1 . Аналогичные зависимости для



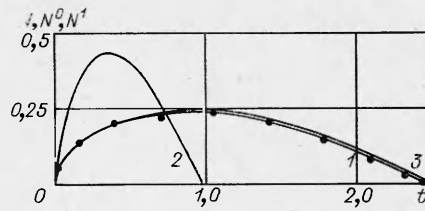
Фиг. 2



Фиг. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

$v = 0,2$ и $v = 0,8$ показали, что при малых скоростях $N(t)$ хорошо (10%) может быть приближена $N^0(t)$, а при больших скоростях — $N^1(t)$ в интервале $0 < t < 3$. При $t > 3$ характерным для N при $v = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ является переход через 0 в моменты времени 5,15; 4,95; 7,15 и 20 соответственно.

Рассмотрим случай $f(t) = \sin \pi t$, $0 < t < 1$. Эта функция была приближена отрезком ряда $\sin \pi t \approx \sum_{i=0}^3 (-\pi t)^{2i+1}/(2i+1)!$. Результаты вычислений по формуле (2.11) при $v = 0,2; 0,4; 0,6$ представлены на фиг. 3—5, где кривые 1—3 соответствуют зависимостям $N(t)$, $N^0(t)$ и $N^1(t)$; видно, что с уменьшением v сближаются кривые N и N^0 , с увеличением — N и N^1 . При средних значениях v оба эти приближения работают плохо.

Отметим еще, что, как и в случае экспоненциального закона, $N(t)$ обращается в нуль, переходя затем в отрицательные значения.

Для расчета зависимости $N(t)$ в случае произвольного закона изменения сил $f(t)$, представляющего в интервале $0 < t < 1$ ограниченную в L_2 функцию, можно воспользоваться (для получения многочленного приближения такого закона) разложением по смещенным полиномам Лежандра P'_n [13]

$$(2.15) \quad f(t) \approx \sum_{n=0}^r b_n P'_n, \quad b_n = (2n+1) \int_0^1 P'_n(t) f(t) dt.$$

Представляя интеграл в (2.15) квадратурной формулой Гаусса порядка $m = r+1$ и используя (2.11), получим выражение для расчета $N(t)$

$$(2.16) \quad N(t_i) \approx \frac{1-v}{\pi \sqrt{v}} \sum_{k=0}^m f(x_i) (\delta_{ik} + m_{ik}),$$

$$x_i = (1-v)t_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где x_i — узлы квадратурной формулы Гаусса [12]. Матрица m_{ik} выражается через веса формулы Гаусса A_k [12], коэффициенты P'_n при степенях t^i полиномов P'_n [13] и значения P_{ni} полиномов P'_n в точках x_i :

$$(2.17) \quad m_{ik} = \frac{v A_k}{2} \sum_{s=0}^r w_s(v) (-x_i)^s \sum_{n=s}^r (2n+1) P'_n P'_{nk}.$$

Как пример применения формул (2.16), (2.17) ($r = 9$) были рассчитаны рассмотренные выше случаи $f(t) = e^{-t}$ и $f(t) = \sin \pi t$. Результаты нане-

сены на фиг. 2—5 точками. Видно, что совпадение вполне удовлетворительное.

Для оценки точности формул (2.16), (2.17) ($r=9$) был рассмотрен закон нагружения, допускающий явное решение по формуле (2.4):

$$f(t) = \delta_0(t)\delta_0(0,5-t), \quad 0 < t < 1.$$

При такой нагрузке для $0 < t < 0,5/(1-v)$ N и τ_{yz} определяются выражениями (1.7), (1.8). Используя их, из (2.4) можно численным интегрированием находить $N(t)$ при $t > 0,5/(1-v)$. При этом, если в интервале $0,5/(1-v) < t < 0,5(1+v)/(1-v)^2$ приходится считать однократный интеграл, то при $0,5(1+v)/(1-v)^2 < t < 0,5(1+v)^2/(1-v)^3$ — двукратный и так далее.

На фиг. 6 кривыми 1, 2 показаны зависимости $N(t)$, полученные таким образом при $v = 0,2$ и $0,4$. Точками здесь нанесены значения $N(t)$, найденные для данного закона нагружения по формулам (2.16), (2.17). Видно, что совпадение результатов вполне удовлетворительное.

Формула (2.16) позволяет решать обратную задачу: по заданному $N(t)$ находить $f(t)$, в частности, следующую «оптимальную» задачу.

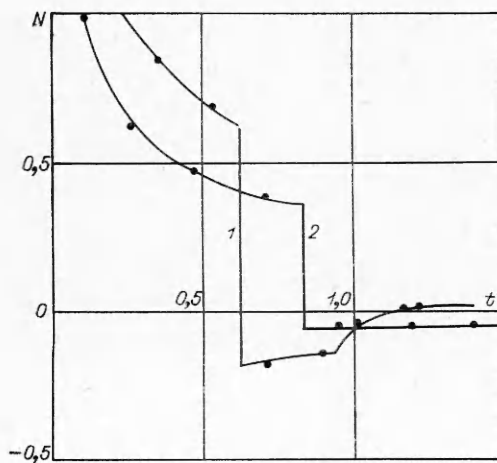
Пусть минимальная величина N , при которой трещина может двигаться с постоянной скоростью v без остановки, есть $K = \text{const}$. При каком законе нагружения $f(t)$ коэффициент особенности в носике разреза во все время движения будет равен K ? Обращение (2.16) позволяет построить такой закон. На фиг. 7 сплошными кривыми 1—4 показаны зависимости $f(t)/K$ при $v = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$, найденные из системы (2.16) с постоянной левой частью, равной K .

Приближенное решение этой задачи можно получить, предполагая, что $N = N^1(t)$ (2.12). При таком предположении

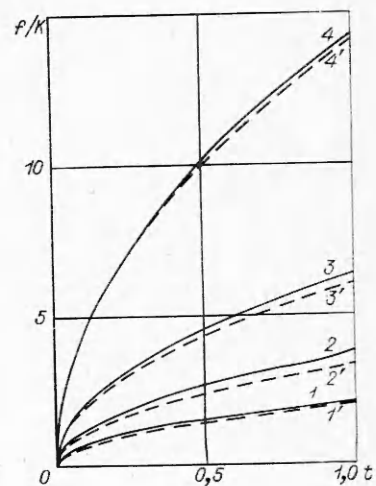
$$(2.18) \quad f(t)/K = \pi\sqrt{vt}/(1-v).$$

Зависимости (2.18) при $v = 0,4; 0,6; 0,8$ показаны на фиг. 7 кривыми 2'—4'.

Из сравнения точного и приближенного решения видно, что для данной задачи приближенное решение (2.18) удовлетворительно согласуется с точным при $v > 0,2$.



Ф и г. 6



Ф и г. 7

При $v < 0,2$ более точные результаты дает квазистатическое приближение $N = N^0(t)$ (2.14) (кривая I' для $v = 0,2$).

Автор выражает благодарность Э. Б. Поляку за помощь в расчетах на ЭВМ.

Поступила 8 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
2. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для полуплоскости. — В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975.
3. Broberg K. V. The propagation of a brittle crack. — «Arkiv Fysik», 1960, Bd 18, N 2.
4. Костров Б. В. Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Костров Б. В. Автомодельные задачи о распространении трещин касательного разрыва. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
6. Афанасьев Е. Ф. Некоторые однородные решения динамической теории упругости. — В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
7. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
8. Cherapanov G. P., Afanas'ev E. F. Some dynamic problems of the theory of elasticity. — «Intern. J. Engng Sci.», 1974, vol. 12.
9. Мартынюк П. А., Шер Е. Н. Некоторые автомодельные задачи о развитии звезды трещин в условиях антиплоской деформации. — ПМТФ, № 5, 1976.
10. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. — В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л. — М., ОНТИ, 1957.
11. Шер Е. Н. Об автомодельном развитии изолированной трещины на примере антиплоской деформации. — В кн.: Вопросы механизма разрушения горных пород. Новосибирск, изд. Ин-та горного дела СО АН СССР, 1976.
12. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959.
13. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М., Физматгиз, 1963.

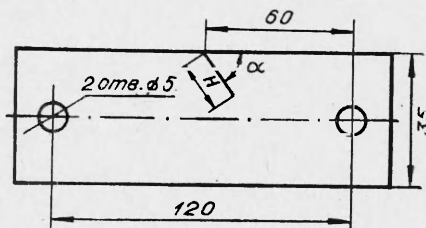
УДК 620.171.5:535.51

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ АМОРФНЫХ ПОЛИМЕРАХ

В. Н. Гульняшкин, С. И. Детистов

(Новокузнецк, Харьков)

Экспериментально исследуется начальное направление развития трещины в зависимости от отношения коэффициентов интенсивности напряжений $\lambda = k_2/k_1$ у ее вершины при больших λ . Исследования выполнены методом фотоупругости на фотоэластичиметре фирмы «МЕОРТА» (ЧССР) на образцах толщиной 4 мм из эпоксидной смолы ЭД-6 с малеиновым ангидридом в качестве отвердителя (фиг. 1). Трещины в образцах зарождались с помощью специального ножа, для чего образцы нагревались до температуры 83°C, при которой они размягчались и легко пробивались



Фиг. 1