УДК 532.517

ОЦЕНКИ РАЗВИТИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РАДИАЛЬНОМ РАСТЕКАНИИ (СТОКЕ) ВЯЗКОГО КОЛЬЦА

Д. В. Георгиевский, Г. С. Тлюстангелов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия
E-mails: georgiev@mech.math.msu.su, gs_angelov@mail.ru

Исследуется эволюция малых возмущений кинематических и динамических характеристик, вносимых в радиальное течение плоского кольца, заполненного однородной ньютоновской жидкостью либо идеальной несжимаемой жидкостью. При задании расхода как функции времени основное движение полностью определяется условием несжимаемости независимо от свойств среды. Для возмущения функции тока получено бипараболическое уравнение с четырьмя однородными граничными условиями, моделирующими прилипание к расширяющимся (сужающимся) стенкам кольца. С помощью метода интегральных соотношений для квадратичных функционалов найдены верхние оценки возмущений. Рассмотрен случай экспоненциального затухания начальных возмущений на конечном либо бесконечном интервале времени. Обоснована допустимость в данной задаче невязкого предела, для которого получены как верхние, так и нижние оценки.

Ключевые слова: растекание, сток, вязкая жидкость, возмущение, метод интегральных соотношений, неравенства Фридрихса, оценки устойчивости, невязкий предел.

DOI: 10.15372/PMTF20170404

Кинематика радиального растекания либо стока на плоскости кольца, границы которого являются концентрическими окружностями, при условии несжимаемости достаточно проста, не зависит от свойств заполняющей кольцо среды и полностью определяется либо радиусом одной из границ, либо расходом как функциями времени. При этом границы могут быть как свободны от напряжений [1–4], так и связаны условиями прилипания к жестким расширяющимся стенкам. Наложение плоских неосесимметричных возмущений на кинематические и силовые характеристики движения позволяет ставить и исследовать задачи устойчивости растекания кольца [5, 6]. Учет малых возмущений позволяет свести исходную задачу к линеаризованной задаче для функции тока. Эффективным методом анализа этой задачи является метод интегральных соотношений [7–10], обобщаемый в данной работе на класс течений ньютоновских жидкостей в плоских областях с подвижными границами.

1. Невозмущенное течение и его параметры. Рассмотрим плоское течение ньютоновской вязкой среды с плотностью ρ и динамической вязкостью μ в кольце $\Omega_t = \{a(t) < r < b(t),\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ (r, θ — координаты полярной системы, начало которой совпадает

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-00848-а).

с центром кольца) при $t \geqslant 0$. Функции времени $a(t)$ и $b(t)$ известны и в силу несжимаемости среды связаны условием

$$b^2 - a^2 = b_0^2 - a_0^2 = S/\pi, \qquad a_0 = a(0), \quad b_0 = b(0), \tag{1.1}$$

где S — постоянная площадь кольца.

Невозмущенное радиальное растекание (сток) характеризуется следующими компонентами вектора скорости $\boldsymbol{v}^0$ и тензора скоростей деформаций $\tilde{v}^0$:

$$v_r^0 = \frac{C(t)}{r}, \qquad v_\theta^0 \equiv 0, \qquad v_{rr}^0 = -v_{\theta\theta}^0 = -\frac{C(t)}{r^2}, \qquad v_{r\theta}^0 \equiv 0. \tag{1.2}$$

Здесь $2\pi C(t)$ — заданный расход через окружность любого радиуса $a(t) < r < b(t)$. Функции $a(t)$ и $b(t)$ выражаются через $C(t)$:

$$a\dot{a} = b\dot{b} = C, \qquad a^2 = a_0^2 + 2\int\limits_0^t C(\tau)\,d\tau, \qquad b^2 = b_0^2 + 2\int\limits_0^t C(\tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

Из определяющих соотношений для ньютоновской среды $\tilde{s}^0 = 2\mu\tilde{v}^0$ следуют выражения для компонент девиатора $\tilde{s}^0$ тензора напряжений $\tilde{\sigma}^0 = \tilde{s}^0 - p^0\tilde{I}$:

$$s_{rr}^0 = -s_{\theta\theta}^0 = -2\mu C(t)/r^2, \qquad s_{r\theta}^0 \equiv 0. \tag{1.4}$$

В результате интегрирования уравнения движения в проекции на радиус

$$\rho(v_{r,t}^0 + v_{r,r}^0 v_r^0) = -p_{,r}^0 + s_{rr,r}^0 + (s_{rr}^0 - s_{\theta\theta}^0)/r$$

получаем не зависящее от μ распределение давления $p^0(r,t)$:

$$p^0 = p_a^0(t) + \frac{\rho C^2}{2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + \rho\dot{C}\ln\frac{a}{r}, \qquad p_a^0(t) = p^0(a(t),t) \tag{1.5}$$

(запятые в нижних индексах означают частное дифференцирование по времени или по соответствующей пространственной координате).

Для того чтобы кинематика процесса растекания (стока) удовлетворяла равенствам (1.2), (1.3), из выражений (1.4), (1.5) следует вычислить разность радиальных напряжений на границах кольца Ω_t:

$$\sigma_{rr}^0(b(t),t) - \sigma_{rr}^0(a(t),t) = (4\mu - \rho C)\,\frac{C}{2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) + \rho\dot{C}\ln\frac{b}{a}.$$

Следует отметить, что рассматриваемое течение является существенно нестационарным, даже если $C = \mathrm{const}$, так как положение области, занимаемой средой, меняется со временем на плоскости.

2. Плоская картина возмущений. Задача для функции тока. Введем в течение в области Ω_t малые плоские возмущения скорости δv_r, δv_θ, а также возмущения скорости деформации δv_{rr}, $\delta v_{\theta\theta}$, $\delta v_{r\theta}$, девиатора напряжений δs_{rr}, $\delta s_{\theta\theta}$, $\delta s_{r\theta}$ и давления δp. Будем для краткости опускать знак δ в обозначениях возмущений.

Линеаризованные относительно малых возмущений уравнения движения и условие несжимаемости имеют вид

$$\rho(v_{r,t} + v_r^0 v_{r,r} + v_{r,r}^0 v_r) = -p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}\,s_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}\,(s_{rr} - s_{\theta\theta}); \tag{2.1}$$

$$\rho\Big(v_{\theta,t} + v_r^0 v_{\theta,r} + \frac{1}{r}\,v_r^0 v_\theta\Big) = -\frac{1}{r}\,p_{,\theta} + s_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\,s_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r}\,s_{r\theta}; \tag{2.2}$$

$$v_{r,r} + \frac{1}{r}\,(v_r + v_{\theta,\theta}) = 0. \tag{2.3}$$

Замыкая систему (2.1)–(2.3) двумя определяющими соотношениями

$$s_{rr} = 2\mu v_{r,r}, \qquad s_{r\theta} = \mu\Big(\frac{1}{r}\, v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{1}{r}\, v_\theta\Big), \tag{2.4}$$

получаем пять уравнений (2.1)–(2.4) относительно пяти неизвестных v_r, v_θ, p, s_{rr}, $s_{r\theta}$ (в плоском деформированном состоянии $s_{\theta\theta} = -s_{rr}$).

Положим, что при возмущенном движении, так же как и при невозмущенном, границами области течения являются окружности $r = a(t)$ и $r = b(t)$ (т. е. движение происходит в кольце Ω_t), на которых возмущения скорости отсутствуют:

$$r = a(t), \quad r = b(t): \qquad v_r = v_\theta = 0. \tag{2.5}$$

Вычитая из продифференцированного по θ уравнения (2.1) умноженное на r и продифференцированное по r уравнение (2.2) и вводя функцию тока $\psi(r, \theta, t)$:

$$v_r = \frac{1}{r}\, \psi_{,\theta}, \qquad v_\theta = -\psi_{,r}, \tag{2.6}$$

редуцируем систему (2.1)–(2.4) с граничными условиями (2.5) к одному бипараболическому уравнению

$$(\Delta\psi)_{,t} + \frac{C}{r}\, (\Delta\psi)_{,r} = \nu\, \Delta\Delta\psi \tag{2.7}$$

(ν — кинематическая вязкость) и четырем условиям на известных подвижных границах:

$$r = a(t), \quad r = b(t): \qquad \psi = 0, \quad \psi_{,r} = 0. \tag{2.8}$$

В коэффициенты линейного уравнения (2.7) входят функции r и t, но не функции θ, поэтому гармоники угловых возмущений можно представить в виде

$$\psi(r, \theta, t) = \Psi_n(r, t)\, \mathrm{e}^{in\theta}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.9}$$

Далее нижний индекс n у комплекснозначных амплитуд Ψ_n опускается. Из геометрии задачи и условия несжимаемости следует, что для изучаемого течения не равных тождественно нулю осесимметричных возмущений ($n = 0$) не существует, поэтому в (2.9) можно принять $n \geqslant 1$.

Подставляя представление (2.9) в (2.7) и (2.8), получаем однородную задачу для Ψ

$$\frac{1}{\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{C}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big(\frac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r} - \frac{n^2\Psi}{r^2}\Big) = \frac{1}{r}\Big[r\Big(\frac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\Big)_{,r}\Big]_{,r} - \\ - \frac{n^2}{r}\Big[r\Big(\frac{\Psi}{r^2}\Big)_{,r}\Big]_{,r} - \frac{n^2}{r^3}\,(r\Psi_{,r})_{,r} + \frac{n^4\Psi}{r^4}; \tag{2.10}$$

$$r = a(t), \quad r = b(t): \qquad \Psi = 0, \quad \Psi_{,r} = 0. \tag{2.11}$$

3. Применение метода интегральных соотношений. Пусть амплитуда $\Psi = \Psi_* + i\Psi_{**}$ ($\Psi_*(r, t), \Psi_{**}(r, t) \in \mathbb{R}$) является элементом гильбертова пространства $H_2(a; b)$ с нормой

$$\|\Psi\|_{H_2}(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} |\Psi|^2(r, t)\, dr. \tag{3.1}$$

Умножим обе части равенства (2.10) на $r\bar{\Psi}$, проинтегрируем по r от a до b, используя однородные граничные условия (2.11), и рассмотрим действительные части полученных квадратичных функционалов, зависящих от t. Ниже проводятся преобразования для каждого слагаемого, входящего в (2.10).

1. Для слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\dfrac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\Big)$ выполняется преобразование

$$\int\limits_a^b (r\Psi_{,rt})_{,r}\bar{\Psi}\,dr = -\int\limits_a^b r\Psi_{,rt}\bar{\Psi}_{,r}\,dr = -\int\limits_a^b r\big(|\Psi_{,r}|^2\big)_{,t}\,dr + \int\limits_a^b r\Psi_{,r}\bar{\Psi}_{,rt}\,dr.$$

Поскольку $(\Psi_{,rt}\bar{\Psi}_{,r})_* = (\Psi_{,r}\bar{\Psi}_{,rt})_*$, данную цепочку равенств, записанных для действительных частей, можно продолжить:

$$\Big(\int\limits_a^b (r\Psi_{,rt})_{,r}\bar{\Psi}\,dr\Big)_* = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b r\big(|\Psi_{,r}|^2\big)_{,t}\,dr = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|\Psi_{,r}|^2\,dr +$$

$$+\,\frac{b\dot{b}}{2}|\,\Psi_{,r}|^2(b(t),t) - \frac{a\dot{a}}{2}|\,\Psi_{,r}|^2(a(t),t) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_a^b r|\Psi_{,r}|^2\,dr \equiv -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,I_1^2. \qquad (3.2)$$

Здесь использованы граничные условия (2.11) и правило дифференцирования по времени интеграла с переменными пределами.

2. Для слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(-\dfrac{n^2\Psi}{r^2}\Big)$ проводится преобразование

$$-\int\limits_a^b \frac{n^2}{r}\Psi_{,t}\bar{\Psi}\,dr = -\int\limits_a^b \frac{n^2}{r}\big(|\Psi|^2\big)_{,t}\,dr + \int\limits_a^b \frac{n^2}{r}\Psi\bar{\Psi}_{,t}\,dr.$$

Поскольку $(\Psi_{,t}\bar{\Psi})_* = (\Psi\bar{\Psi}_{,t})_*$, аналогично (3.2) запишем

$$-\Big(\int\limits_a^b \frac{n^2}{r}\Psi_{,t}\bar{\Psi}\,dr\Big)_* = -\frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{n^2}{r}\big(|\Psi|^2\big)_{,t}\,dr =$$

$$= -\frac{n^2}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|\Psi|^2\,dr + \frac{n^2\dot{b}}{2b}\,|\Psi|^2(b(t),t) - \frac{n^2\dot{a}}{2a}\,|\Psi|^2(a(t),t) \equiv -\frac{n^2}{2}\,\frac{d}{dt}\,I_0^2. \qquad (3.3)$$

3. Для слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r} - \dfrac{n^2\Psi}{r^2}\Big)$ выполняется преобразование

$$C\int\limits_a^b \Big(\Psi_{,rr} + \frac{1}{r}\,\Psi_{,r} - \frac{n^2}{r^2}\,\Psi\Big)_{,r}\bar{\Psi}\,dr = -C\int\limits_a^b \Big(\Psi_{,rr} + \frac{1}{r}\,\Psi_{,r} - \frac{n^2}{r^2}\,\Psi\Big)\bar{\Psi}_{,r}\,dr =$$

$$= -C\int\limits_a^b \Psi_{,rr}\bar{\Psi}_{,r}\,dr - C\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|\Psi_{,r}|^2\,dr + C\int\limits_a^b \Big(\frac{n^2}{r^2}\,|\Psi|^2\Big)_{,r}\,dr +$$

$$+\,2C\int\limits_a^b \frac{n^2}{r^3}\,|\Psi|^2\,dr - C\int\limits_a^b \frac{n^2}{r^2}\,\Psi_{,r}\bar{\Psi}\,dr.$$

Так как

$$C\Big(\int\limits_a^b \Psi_{,rr}\bar{\Psi}_{,r}\,dr\Big)_* = \frac{C}{2}\int\limits_a^b \big(|\Psi_{,r}|^2\big)_{,r}\,dr = \frac{C}{2}\,\big(|\Psi_{,r}|^2(b(t),t) - |\Psi_{,r}|^2(a(t),t)\big) = 0,$$

$$C\Big(\int\limits_a^b \frac{n^2}{r^2}\,\Psi_{,r}\bar{\Psi}\,dr\Big)_* = C\int\limits_a^b \frac{n^2}{r^3}\,|\Psi|^2\,dr \equiv Cn^2J_0^2,$$

то

$$C\Big(\int\limits_a^b \Big(\Psi_{,rr} + \frac{1}{r}\,\Psi_{,r} - \frac{n^2}{r^2}\,\Psi\Big)_{,r}\bar{\Psi}\,dr\Big)_* = -C(J_1^2 - n^2J_0^2). \qquad (3.4)$$

4. Слагаемое $\dfrac{1}{r}\Big[r\Big(\dfrac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\Big)_{,r}\Big]_{,r}$ преобразуется следующим образом:

$$\nu\Big\{\int\limits_a^b \Big[r\Big(\frac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\Big)_{,r}\Big]_{,r}\bar{\Psi}\,dr\Big\}_* = -\nu\Big[\int\limits_a^b r\Big(\frac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\Big)_{,r}\bar{\Psi}_{,r}\,dr\Big]_* =$$

$$= \nu\int\limits_a^b r|\Psi_{,rr}|^2\,dr + \nu\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|\Psi_{,r}|^2\,dr + 2\nu\int\limits_a^b (\Psi_{,r}\bar{\Psi}_{,rr})_* dr =$$

$$= \nu(J_2^2 + J_1^2) + \int\limits_a^b \big((\Psi_{,r}^2)_*\big)_{,r}\,dr + \int\limits_a^b \big((\Psi_{,r}^2)_{**}\big)_{,r}\,dr = \nu(J_2^2 + J_1^2). \qquad (3.5)$$

5. Для слагаемого $-\dfrac{n^2}{r}\Big[r\Big(\dfrac{\Psi}{r^2}\Big)_{,r}\Big]_{,r}$ проводится преобразование

$$-\nu n^2\int\limits_a^b \Big[r\Big(\frac{1}{r^2}\,\Psi\Big)_{,r}\Big]_{,r}\bar{\Psi}\,dr = \nu n^2\int\limits_a^b r\Big(\frac{1}{r^2}\,\Psi\Big)_{,r}\bar{\Psi}_{,r}\,dr =$$

$$= \nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|\Psi_{,r}|^2\,dr - 2\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,\Psi\bar{\Psi}_{,r}\,dr = \nu n^2J_1^2 - 2\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,\Psi\bar{\Psi}_{,r}\,dr. \qquad (3.6)$$

6. Слагаемое $-(n^2/r^3)(r\Psi_{,r})_{,r}$ преобразуется следующим образом:

$$-\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,(r\Psi_{,r})_{,r}\bar{\Psi}\,dr = \nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r}\,|\Psi_{,r}|^2\,dr - 2\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,\Psi_{,r}\bar{\Psi}\,dr =$$

$$= \nu n^2J_1^2 - 2\nu n^2\int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,\Psi_{,r}\bar{\Psi}\,dr. \qquad (3.7)$$

7. Для слагаемого $n^4\Psi/r^4$ выполняется преобразование

$$\nu n^4\int\limits_a^b \frac{1}{r^3}\,\Psi\bar{\Psi}\,dr = \nu n^4J_0^2. \qquad (3.8)$$

Следует отметить, что сумма интегралов в правых частях (3.6), (3.7) равна

$$-4\nu n^2 \int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\,(\Psi\bar{\Psi}_{,r})_* dr = -4\nu n^2 \int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\big[\Psi_*(\Psi_{,r})_* + \Psi_{**}(\Psi_{,r})_{**}\big]\,dr =$$

$$= -2\nu n^2 \int\limits_a^b \frac{1}{r^2}\big[(\Psi_*^2)_{,r} + (\Psi_{**}^2)_{,r}\big]\,dr = -4\nu n^2 \int\limits_a^b \frac{1}{r^3}\,(\Psi_*^2 + \Psi_{**}^2)\,dr = -4\nu n^2 J_0^2. \tag{3.9}$$

В (3.2)–(3.9) введены квадратичные функционалы

$$I_k^2(t) = \int\limits_a^b r^{2k-1}\Big|\frac{\partial^k\Psi}{\partial r^k}\Big|^2 dr, \qquad J_l^2(t) = \int\limits_a^b r^{2l-3}\Big|\frac{\partial^l\Psi}{\partial r^l}\Big|^2 dr, \tag{3.10}$$

где $k = 0, 1$; $l = 0, 1, 2$. С учетом (3.10) интегральное следствие уравнения (2.10) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) = -\nu J_2^2 - (2\nu n^2 + \nu + C)J_1^2 - n^2(\nu n^2 - 4\nu - C)J_0^2. \tag{3.11}$$

Пусть существуют функции времени $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, такие что

$$J_2^2 \geqslant \lambda_1^2 J_1^2, \qquad J_2^2 \geqslant \lambda_2^4 J_0^2. \tag{3.12}$$

Тогда для любого $\gamma \in [0;1]$ справедливы неравенство

$$J_2^2 \geqslant \gamma\lambda_1^2 J_1^2 + (1-\gamma)\lambda_2^4 J_0^2 \tag{3.13}$$

и верхняя оценка левой части (3.11)

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leqslant -2(2\nu n^2 + \nu + \gamma\nu\lambda_1^2 + C)J_1^2 - 2n^2\Big(\nu n^2 - 4\nu + \frac{(1-\gamma)\nu\lambda_2^4}{n^2} - C\Big)J_0^2. \tag{3.14}$$

Из (3.10) следуют оценки

$$\frac{a}{b^3}\,I_0^2 \leqslant J_0^2 \leqslant \frac{b}{a^3}\,I_0^2, \qquad \frac{1}{b^2}\,I_1^2 \leqslant J_1^2 \leqslant \frac{1}{a^2}\,I_1^2. \tag{3.15}$$

4. Оценки затухания и роста возмущений. Обозначим выражения, стоящие в скобках в правой части (3.14), через $\Xi_1(t)$ и $\Xi_2(t)$:

$$\Xi_1(t) = \nu(2n^2 + 1 + \gamma\lambda_1^2) + C, \qquad \Xi_2(t) = \nu\Big(n^2 - 4 + \frac{(1-\gamma)\lambda_2^4}{n^2}\Big) - C \tag{4.1}$$

и рассмотрим четыре возможных случая.

1. Пусть $\Xi_1 \geqslant 0$ и $\Xi_2 \geqslant 0$ на интервале времени $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \infty$, т. е.

$$-(2n^2 + 1 + \gamma\lambda_1^2) \leqslant \frac{C(t)}{\nu} \leqslant n^2 - 4 + \frac{(1-\gamma)\lambda_2^4}{n^2}. \tag{4.2}$$

Тогда с учетом (3.15) можно продолжить цепочку неравенств (3.14):

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leqslant -\frac{2}{b^2}\,\Xi_1 I_1^2 - \frac{2n^2 a}{b^3}\,\Xi_2 I_0^2 \leqslant -2Q(t)(I_1^2 + n^2 I_0^2); \tag{4.3}$$

$$Q(t) = \min\Big\{\frac{1}{b^2}\,\Xi_1; \frac{a}{b^3}\,\Xi_2\Big\} \geqslant 0.$$

Из (4.3) нетрудно получить верхнюю оценку квадратичного функционала $(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t)$:

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(-2 \int\limits_{t_0}^{t} Q(\tau)\, d\tau\Big), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{4.4}$$

Итак, при условиях (4.2) n-я гармоника возмущения (2.9) по углу θ убывает не медленнее экспоненты в (4.4), что свидетельствует об экспоненциальной устойчивости (в интегральном смысле) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ возмущений, накопленных к моменту t_0. В данной задаче безразмерное отношение $C(t)/\nu$ аналогично числу Рейнольдса, зависящему от времени. Так как $n \geqslant 1$, знаменатель в (4.2) не равен нулю.

2. Пусть $\Xi_1 \geqslant 0$ и $\Xi_2 < 0$ на интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \infty$. Тогда из (4.3) следует

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leqslant -\frac{2}{b^2}\,\Xi_1 I_1^2 - \frac{2n^2 b}{a^3}\,\Xi_2 I_0^2 \leqslant -2Q(t)(I_1^2 + n^2 I_0^2);$$

$$Q(t) = \min\Big\{\frac{1}{b^2}\,\Xi_1; \frac{b}{a^3}\,\Xi_2\Big\} = \frac{b}{a^3}\,\Xi_2 < 0. \tag{4.5}$$

Так как $Q(t) < 0$, то выражение (4.4) является верхней оценкой роста возмущений. Аналогичная ситуация имеет место и в остальных двух случаях, для которых $Q(t) < 0$:

3. Пусть $\Xi_1 < 0$ и $\Xi_2 \geqslant 0$ на интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \infty$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leqslant -\frac{2}{a^2}\,\Xi_1 I_1^2 - \frac{2n^2 a}{b^3}\,\Xi_2 I_0^2 \leqslant -2Q(t)(I_1^2 + n^2 I_0^2);$$

$$Q(t) = \min\Big\{\frac{1}{a^2}\,\Xi_1; \frac{a}{b^3}\,\Xi_2\Big\} = \frac{1}{a^2}\,\Xi_1 < 0. \tag{4.6}$$

4. Пусть $\Xi_1 < 0$ и $\Xi_2 < 0$ на интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \infty$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \leqslant -\frac{2}{a^2}\,\Xi_1 I_1^2 - \frac{2n^2 b}{a^3}\,\Xi_2 I_0^2 \leqslant -2Q(t)(I_1^2 + n^2 I_0^2),$$

$$Q(t) = \min\Big\{\frac{1}{a^2}\,\Xi_1; \frac{b}{a^3}\,\Xi_2\Big\} < 0.$$

5. Неравенства Фридрихса и определение функций $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. В силу неравенств

$$J_2^2 \geqslant a \int\limits_a^b |\Psi_{,rr}|^2\, dr \geqslant a\Lambda_1^2 \int\limits_a^b |\Psi_{,r}|^2\, dr \geqslant a^2 \Lambda_1^2 J_1^2,$$

$$J_2^2 \geqslant a \int\limits_a^b |\Psi_{,rr}|^2\, dr \geqslant a\Lambda_2^4 \int\limits_a^b |\Psi|^2\, dr \geqslant a^4 \Lambda_2^4 J_0^2$$

параметры $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ в (3.12) связаны с неравенствами Фридрихса для функции Ψ при $a(t) < r < b(t)$:

$$\int\limits_a^b |\Psi_{,rr}|^2\, dr \geqslant \Lambda_1^2 \int\limits_a^b |\Psi_{,r}|^2\, dr, \qquad \int\limits_a^b |\Psi_{,rr}|^2\, dr \geqslant \Lambda_2^4 \int\limits_a^b |\Psi|^2\, dr; \tag{5.1}$$

$$\lambda_1^2 = a^2 \Lambda_1^2, \qquad \lambda_2^4 = a^4 \Lambda_2^4.$$

Как известно, равенства в (5.1) достигаются при значениях Λ_1^2 и Λ_2^4, совпадающих с наименьшими положительными собственными числами следующих задач на собственные значения [11]:

$$\Psi^{\mathrm{IV}} + \Lambda_1^2\Psi'' = 0, \qquad \Psi(a) = \Psi(b) = 0, \qquad \Psi'(a) = \Psi'(b) = 0,$$
$$\Psi^{\mathrm{IV}} - \Lambda_2^4\Psi = 0, \qquad \Psi(a) = \Psi(b) = 0, \qquad \Psi'(a) = \Psi'(b) = 0,$$

а также при значениях Ψ, совпадающих с соответствующими собственными функциями этих задач. Вычисляя Λ_1, Λ_2, получаем

$$\Lambda_1 = \frac{2\Lambda_0}{b-a}, \quad \Lambda_2 = \frac{\Lambda_{00}}{b-a}, \quad \lambda_1^2 = \frac{4a^2\Lambda_0^2}{(b-a)^2}, \quad \lambda_2^4 = \frac{a^4\Lambda_{00}^4}{(b-a)^4},$$

где $\Lambda_0 \approx 4{,}49$ и $\Lambda_{00} \approx 4{,}73$ — наименьшие положительные корни уравнений $\Lambda_0 = \operatorname{tg}\Lambda_0$ и $\operatorname{ch}\Lambda_{00}\cos\Lambda_{00} = 1$.

Существует другой способ определения функции $\lambda(t)$ в (3.12), основанный на том, что λ_1^2 — наименьшее положительное собственное значение задачи

$$r\Psi^{\mathrm{IV}} + 2\Psi''' + \frac{\lambda_1^2}{r}\,\Psi'' - \frac{1}{r^2}\,\Psi' = 0, \qquad \Psi(a) = \Psi(b) = 0, \quad \Psi'(a) = \Psi'(b) = 0. \tag{5.2}$$

Для того чтобы определить λ_1, нужно умножить обе части (5.2) на $\bar\Psi$ и проинтегрировать по r от a до b. Однако поиск фундаментального решения уравнения Эйлера (5.2) с помощью представления $\Psi = r^\alpha$ вызывает затруднения при анализе корней кубического по α уравнения с параметром λ_1:

$$\alpha^3 - 4\alpha^2 + (5+\lambda_1^2)\alpha - (3+\lambda_1^2) = 0.$$

6. Невязкий предел. Существуют классические работы, посвященные исследованию устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости в кольце [12] и развития малых возмущений неустановившихся одномерных невязких течений с осевой симметрией [13–15]. В данной задаче, так же как в краевых задачах гидродинамики, предельный переход к идеальной жидкости при $\nu \to 0$ ($\mu \to 0$) является сингулярным. Рассматривается растекание (сток) невязкого кольца в области Ω_t, описываемое уравнениями (1.2), (1.3), (1.5), не претерпевающими изменений при отсутствии вязкости. Все компоненты девиатора напряжений как в основном течении, так и в возмущенном (например, в уравнениях движения (2.1), (2.2)) необходимо положить равными нулю. Условия прилипания среды к границам кольца Ω_t (2.5) заменяются на условия непротекания

$$r = a(t), \quad r = b(t): \qquad v_r = 0,$$

при этом допускается скольжение вдоль окружностей.

Вместо задачи четвертого порядка (2.10), (2.11) для n-й гармоники Ψ_n амплитуды функции тока получаем задачу второго порядка

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{C}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big(\frac{1}{r}\,(r\Psi_{,r})_{,r} - \frac{n^2\Psi}{r^2}\Big) = 0;$$
$$r = a(t), \quad r = b(t): \qquad \Psi = 0. \tag{6.1}$$

Отсутствие в (6.1) граничного условия $\Psi_{,r} = 0$ приводит к тому, что в цепочке равенств (3.2) остаются ненулевыми слагаемые

$$\frac{b\dot b}{2}\,|\Psi_{,r}|^2(b(t),t) - \frac{a\dot a}{2}\,|\Psi_{,r}|^2(a(t),t) = \frac{C}{2}\big(|\Psi_{,r}|^2\big)\Big|_{r=a(t)}^{r=b(t)}.$$

Однако те же слагаемые с противоположным знаком содержатся в равенствах, анализируемых в п. **3**. Полагая в (3.11) $\nu = 0$, получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) = -C(J_1^2 - n^2 J_0^2). \qquad (6.2)$$

В случаях 1–4 в п. **4** также можно выполнить предельный переход $\nu \to 0$. Поскольку из (4.1) следует

$$\Xi_1(t) = -\Xi_2(t) = C,$$

могут быть реализованы лишь случаи 2 (растекание кольца Ω_t) и 3 (сток). В этих случаях, в отличие от случая 1, имеют место верхние оценки роста (а не затухания) возмущений.

Если $C(t) \geqslant 0$, то согласно (4.4), (4.5) $Q(t) = -bC/a^3 < 0$ и

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(2 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{bC}{a^3}(\tau)\,d\tau\Big).$$

Если $C(t) < 0$, то с учетом (4.4), (4.6) $Q(t) = C/a^2 < 0$ и

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \leqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(-2 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{C}{a^2}(\tau)\,d\tau\Big) = \frac{a^2(t_0)}{a^2(t)}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0),$$

причем $a(t)$ — монотонно убывающая функция.

Отсутствие в правой части (6.2) квадратичного функционала J_2^2 позволяет в невязком пределе получить не только верхние, но и нижние оценки развития возмущений. Действительно, используя двусторонние оценки (3.15) интегралов J_1^2 и J_0^2, при $C(t) \geqslant 0$ с учетом (6.2) можно записать

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \geqslant -\frac{2C}{a^2}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2).$$

Следовательно,

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \geqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(-2 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{C}{a^2}(\tau)\,d\tau\Big) = \frac{a^2(t_0)}{a^2(t)}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0),$$

причем $a(t)$ — монотонно возрастающая функция.

При $C(t) < 0$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2) \geqslant \frac{2Cb}{a^3}\,(I_1^2 + n^2 I_0^2),$$

из которого следует нижняя оценка

$$(I_1^2 + n^2 I_0^2)(t) \geqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)(t_0) \exp\Big(2 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{Cb}{a^3}(\tau)\,d\tau\Big).$$

Достаточные интегральные экспоненциальные оценки затухания начальных возмущений, полученные в данной работе как для вязкого несжимаемого кольца, так и в невязком пределе, позволяют создавать оптимальные режимы процессов растекания и стока, в которых реализуется ламинарное течение среды. Создание таких оптимальных режимов актуально в задачах обработки материалов давлением и в задачах о течении деформируемой среды по различным поверхностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бытев В. О.** Неустановившиеся движения вращающегося кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1970. № 3. С. 82–88.
2. **Лаврентьева О. М.** Движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости. Новосибирск, 1984. Деп. в Ин-те гидродинамики СО АН СССР 19.11.1984, № 7562.
3. **Pukhnachov V. V.** On a problem of viscous strip deformation with a free boundary // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1999. V. 328. P. 357–362.
4. **Гербер Е. А., Кутрунов В. Н.** О механизме и закономерностях периодических движений кольца капиллярной жидкости // Вестн. Тюм. гос. ун-та. 2011. № 7. С. 136–142.
5. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
6. **Speith R., Kley W.** Stability of the viscously spreading ring // Astronomy Astrophys. 2003. V. 399. P. 395–408.
7. **Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.** Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3–89. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 25).
8. **Georgievskii D. V.** Variational bounds and integral relations method in problems of stability // J. Math. Sci. 2008. V. 154, N 4. P. 549–603.
9. **Георгиевский Д. В.** Эволюция трехмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 3. С. 345–354.
10. **Георгиевский Д. В.** Интегральный анализ трехмерной картины возмущений течения Пуазейля в трубе // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 4. С. 40–45.
11. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968.
12. **Кузнецов В. М., Шер Е. Н.** Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце // ПМТФ. 1964. № 2. С. 66–73.
13. **Меньщиков В. М.** О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией // ПМТФ. 1979. № 2. С. 14–20.
14. **Владимиров В. А.** К неустойчивости равновесия жидкостей // ПМТФ. 1989. № 2. С. 108–116.
15. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.

Поступила в редакцию 23/VI 2016 г.,
в окончательном варианте — 1/IX 2016 г.