О НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ДВИЖЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ РЕЛЕЯ

Ю. А. Буевич (Москва)

Проблема Релея состоит в изучении потока газа вблизи бесконечной пластины, внезапно приводимой в движение со скоростью U в своей плоскости. Ее исследование представляет существенный интерес для понимания начальной стадии любого газодинамического течения, а также существа процессов, происходящих в нестационарных потоках газов [1]. Имеющиеся теоретические результаты относятся в основном к области $t / \Delta t \gg 1$ (Δt — средний интервал времени между двумя последующими столкновениями одной из молекул с другими, t — время, прошедшее после начала движения), когда можно использовать гидродинамическое описание процесса переноса импульса в объеме газа [2]. Не менее важен начальный этап движения, когда $t / \Delta t \ll 1$ и существенны лишь столкновения молекул с пластиной; этот этап рассмотрен достаточно полно в [1]. Согласно [1], можно пренебречь интегралом столкновений в уравнении Больцмана, т. е. решать уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

где z — координата, отсчитываемая по нормали к пластине.

Вводя коэффициент обмена импульсом q, представляющий долю молекул, отражающихся от пластины диффузно, и ограничиваясь для простоты случаем малых M и одинаковых температур газа и пластины, запишем граничное условие для функции распределения в виде [1]

$$f(t, 0, c) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \left\{(1-q)\exp\left(-\frac{c^2}{2RT}\right) + q\exp\left[-\frac{(c_x - U)^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT}\right]\right\} \approx$$

$$\approx f_0(c)\left(1 + q\frac{c_x U}{RT}\right) \tag{2}$$

где ρ, T — плотность и температура газа, R — газовая постоянная, $f_0(c)$ — распределение Максвелла. Начальное условие имеет вид

$$f(0, z, c) = f_0(c) \tag{3}$$

Обычно предполагается, что U в (2) — постоянная. Это предположение, оправданное для газодинамического этапа $t / \Delta t \gg 1$, представляется весьма произвольным при описании начальной стадии движения $t / \Delta t \ll 1$. Действительно, в любом реальном процессе можно задать лишь силу, приводящую пластину в движение. Скорость пластины сама является функцией времени, и время ее нарастания до постоянного значения может быть, в частности, сравнимым с Δt. Тогда выводы [1], основанные на представлении о постоянстве U, теряют смысл.

Поэтому будем считать, что задана сила $\sigma(t)$, действующая на единицу площади пластины и направленная по оси x, причем в начальный момент

$$U(0) = 0 \tag{4}$$

Для определения $U(t)$ разумно использовать уравнение, прямо вытекающее из второго закона Ньютона. Импульс всей системы на единицу площади пластины

$$P(t) = \gamma U(t) + 2\rho \int_0^\infty v(t, z)\,dz = \gamma U(t) + 2\int_0^\infty dz \iiint_{-\infty}^{\infty} f(t, z, c)\, c_x\, dc \tag{5}$$

где $v(t, z)$ — массовая скорость газа, γ — масса единицы площади пластины; коэффициент 2 перед интегралом введен для учета движения газа по обе стороны пластины — в областях $z > 0$ и $z < 0$. Очевидно,

$$P(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

Уравнения (1) и (6) вместе с условиями (2), (4) определяют решение задачи.

Применяя к (1) преобразование Лапласа и решая преобразованное уравнение с учетом (2) и (3), получим для изображения $f^\circ(p, z, c)$

$$f^\circ = f_0(c)\left[\frac{1}{p} + \frac{qc_x}{RT} U^\circ(p)\exp\left(-\frac{zp}{c_z}\right) y(c_z)\right], \qquad y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

где $y(x)$ — функция Хевисайда. Функция распределения имеет, следовательно, вид

$$f(t, z, c) = f_0(c) + \frac{qc_x}{RT} U\left(t - \frac{z}{c_z}\right) y\left(t - \frac{z}{c_z}\right) y(c_z) \tag{8}$$

Преобразованное уравнение (6)

$$\gamma U^\circ(p) + 2\int_0^\infty dz \iiint_{-\infty}^{\infty} c_x f^\circ(p, z, c)\, dc = \frac{\sigma^\circ(p)}{p}$$

Подставляем сюда f° из (7) и меняем порядок интегрирования по z и по c_z

$$U^\circ(p)\left[\gamma + \frac{q\rho}{p}\left(\frac{2RT}{\pi}\right)^{1/2}\right] = \frac{\sigma^\circ(p)}{p}$$

Полагая $\sigma(t) = \sigma$, $\sigma^\circ(p) = \sigma / p$, получим отсюда

$$U(t) = U_0\,[1 - \exp(-t/\tau)] \qquad (9)$$

$$U_0 = \frac{\sigma}{q\rho}\left(\frac{\pi}{2RT}\right)^{1/2}, \qquad \tau = \frac{\gamma}{q\rho}\left(\frac{\pi}{2RT}\right)^{1/2} \qquad (10)$$

Несложно вычислить моменты, характеризующие поток. Например, скорость газа

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho}\iiint_{-\infty}^{\infty} c_x f(t, z, c)\, dc = \frac{q}{2} U_0 \operatorname{erfc}\left(-\frac{\zeta}{t}\right) -$$

$$- \frac{q}{\sqrt{\pi}} U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\int_{\zeta/t}^{\infty} \exp\left(-u^2 + \frac{\zeta}{\tau u}\right) du \qquad (11)$$

В частности, скорость газа у пластины

$$v_0(t) = \frac{q}{2} U_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \qquad \zeta = \frac{z}{(2RT)^{1/2}}$$

Для касательного напряжения имеем после простого расчета

$$p_{xz} = q\rho U_0 \sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\zeta}{t}\right)^2\right] - 2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\int_{\zeta/t}^{\infty} u \exp\left(-u^2 + \frac{\zeta}{\tau u}\right) du\right\} \qquad (12)$$

Учет нарастания скорости пластины от нуля до U приводит к физически понятному стремлению p_{xz} к нулю при $t/\tau \to 0$.

Аналогичное обстоятельство имеет место и для других отличных от нуля моментов $f(t, z, c)$ — поправки к статической температуре газа, тангенциального и нормального потока тепла и т. п. Их аналитические выражения легко получаются при интегрировании (8) и потому здесь не выписываются. Они переходят в формулы, соответствующие $U = U_0$ [1] при $t/\tau \to \infty$. Характерное время приближения этих величин к своим асимптотическим значениям равно τ.

Нетрудно рассмотреть также случай, когда температуры пластины и газа не равны. Отличие этого случая от рассмотренного выше заключается в некотором изменении коэффициентов в граничном условии (2) [1], что ведет к незначительному изменению конечных выражений для $U(t)$, $f(t, z, c)$ и т. д. При $t/\tau \to \infty$ все эти величины также совпадают с вычисленными в [1].

Известно, что решение проблемы Релея для $t/\Delta t \gg 1$ во многом способствовало пониманию несжимаемого пограничного слоя на удалении от передней кромки обтекаемого тела [1]. Легко видеть, что в этом отношении данное решение соответствует участку пограничного слоя вблизи кромки (на расстояниях $x \ll \lambda / c_*$ от нее, где c_* — средняя скорость теплового движения молекул). Эта область может стать существенной при движении тела в достаточно разреженном газе.

Поступила 3 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ян Сюнь-тяо, Лис Л. Проблема Релея для низких чисел R согласно кинетической теории газов. Сб. «Газодинамика разреженных газов», Изд. иностр. лит., 1963, стр. 325—375.
2. Gross E. P., Jackson E. A. Kinetic Theory of Impulsive Motion of Infinite Plane. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 4, p. 318 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, № 5).