УДК 532.59

И. В. Исиченко, А. В. Коновалов, Е. С. Левченко, А. С. Савин

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В настоящей работе рассматривается плоское потенциальное установившееся течение тяжелой идеальной жидкости со свободной границей. При этом потенциал скорости имеет конечное число точечных особенностей. Потенциальные движения жидкости при наличии конечной системы точечных особенностей, моделирующих обтекаемые твердые тела, рассматривались в [1] в связи с проблемой обтекания подводного крыла и вычислением волнового сопротивления, а также в [2, 3] и др. В названных работах решалась задача в «прямой» постановке, т. е. по заданным точечным особенностям комплексного потенциала, которые моделировали обтекаемое твердое тело, определялись профиль свободной поверхности и поле скоростей. Решения были получены в рамках линейной теории волн. В данной работе решается «обратная» задача: задан стационарный профиль свободной поверхности, необходимо восстановить картину течения в толще жидкости. Решение задачи получено как в приближении линейной теории, так и в точной постановке.

1. Построение решения. Пусть $S(x)\,(-\infty < x < \infty)$ — профиль свободной поверхности, v_0 — скорость невозмущенного потока. Обозначим через $G \subset C$ область, занятую жидкостью: $G = \{z : z = x + iy,\ y < S(x)\}$ (исследуется бесконечно глубокая жидкость). Множество точек, лежащих на поверхности, обозначим через S: $S = \{z\colon \operatorname{Im} z = S(\operatorname{Re} z)\}$. Наложим ограничение на $S(x)$:

$$S(x) < v_0^2/2g \tag{1.1}$$

(g — ускорение силы тяжести). Выполнение неравенства (1.1) обеспечивает отсутствие критических точек комплексной скорости на границе жидкости, что, в свою очередь, гарантирует гладкость профиля $S(x)$ [4]. Пусть P — общая кратность полюсов комплексной скорости $w(z)$ в G, т. е. $P = \sum\limits_{i:\, z_i \in G} p_i$, где $P < \infty$ и p_i — кратность полюса z_i. Величины P и p_i заранее неизвестны и определяются в процессе решения. Кроме того, предполагается выполненным естественное условие ограниченности скорости жидкости на бесконечности:

$$|w(z)| < w < +\infty, \quad |z| > R, \quad z \in G \tag{1.2}$$

(R — достаточно большое число). На свободной поверхности выполняются стандартные граничные условия для потенциала W:

$$W = \Phi(z) + i\Psi(z), \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi(x, S(x))}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi(x, S(x))}{\partial y}\right)^2\right] + \rho g S(x) = c_1, \quad \Psi(x, S(x)) = c_2$$

(ρ — плотность жидкости, c_1, c_2 — константы).

Для восстановления скорости $w(z)$ в G прежде всего найдем ее полюсы $z_k \in G$. Для этого на множестве $G^+ = C \backslash (G \cup S)$ определим функцию $R(\lambda)$ соотношением

$$R(\lambda) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\left(v_0^2 - 2gS(x)\right)\left(1 + (S'(x))^2\right)}\, dx}{(x + iS(x) - \lambda)^2}, \quad S' = \frac{dS}{dx}. \tag{1.4}$$

Очевидно, что функция $R(\lambda)$ голоморфна в G^+. Кроме того, можно показать, что аналитическое продолжение $R(z)$ функции $R(\lambda)$ в полную комплексную плоскость C является рациональной функцией (в сделанных предположениях относительно $w(z)$). При этом полюсы функции $R(z)$ совпадают с полюсами $w(z)$ в G. Действительно, используя граничные условия (1.3), с учетом того, что $w(z) = dW/dz$, и условие (1.1), легко вычислить комплексную скорость $w(z)$ на свободной границе:

$$w(x, S(x)) = \left[\frac{v_0^2 - 2gS(x)}{1 + (S'(x))^2}\right]^{1/2} (1 - iS'(x)). \tag{1.5}$$

Согласно (1.5), выражение (1.4) для $R(\lambda)$ запишем как

$$R(\lambda) = \int_S \frac{w(\xi)\, d\xi}{(\xi - \lambda)^2}, \quad \lambda \in G^+.$$

По известной теореме из комплексного анализа [5] с учетом (1.2) при $\lambda \in G^+$ получим равенство

$$R(\lambda) = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left[\frac{w(z)}{(z-\lambda)^2}, z_k\right],$$

где суммирование ведется по всем полюсам $z_k \in G$ функции $w(z)$. Каждый полюс z_k порядка p_k дает в $R(\lambda)$ вклад

$$\mathrm{Res}\left[\frac{w(z)}{(z-\lambda)^2}, z_k\right] = \sum_{l=2}^{p_k+1} \frac{A_l}{(z_k - \lambda)^l}$$

$(A_{p_k+1} \neq 0)$. Аналитическое продолжение $R(\lambda)$ из области G^+ в полную комплексную плоскость, таким образом, имеет вид

$$R(z) = 2\pi i \sum_k \frac{p_k(z)}{(z_k - z)^{p_k+1}}$$

($p_k(z)$ — полином степени не выше p_k — 1). Очевидно, что в случае, когда $w(z)$ не имеет особых точек в G, $R(z) \equiv 0$.

Отметим, что в рамках линейной теории волн для скорости на границе вместо (1.5) справедливо выражение

$$w(x, 0) = v_0(1 - (g/v_0^2)\, S(x) - iS'(x)). \tag{1.6}$$

Поэтому $R(\lambda)$ надо определять соотношением

$$R(\lambda) = -v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \nu S(x) - iS'(x)}{(x - \lambda)^2}\, dx, \quad \mathrm{Im}\,\lambda > 0 \tag{1.7}$$

($\nu = g/v_0^2$). В остальном все рассуждения аналогичны.

Таким образом, задача об отыскании полюсов комплексной скорости $w(z)$ в G свелась к более простой задаче отыскания полюсов рациональной функции $R(z)$, которая, в свою очередь, в рамках стандартной техники аппроксимаций Паде допускает точное решение [6]. Остановимся на этом подробнее.

Функция $R(\lambda)$ в окрестности любой точки $\lambda_0 \in G^+$ допускает разложение в ряд Тейлора

$$R(\lambda) = \sum_m c_m (\lambda - \lambda_0)^m. \tag{1.8}$$

Радиус сходимости ряда (1.8) не меньше расстояния от λ_0 до S. Выражения для коэффициентов этого разложения нетрудно получить в виде

$$c_m = \int_S \frac{w(\xi)\, d\xi}{(\xi - \lambda_0)^{m+2}}. \tag{1.9}$$

Согласно определению в обозначениях [6] аппроксимацией Паде $[L/M]$ функции $F(z)$ называется рациональная функция

$$[L/M] = \frac{A^{[L/M]}(z)}{B^{[L/M]}(z)},$$

если существуют полиномы $A^{[L/M]}(z)$ и $B^{[L/M]}(z)$ степени L и M соответственно такие, что

(1.10) $$[L/M] = F(z) + O(z^{L+M+1}).$$

Согласно (1.10), ищем аппроксимацию Паде (1.8) в форме

$$\sum c_m z^m = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_L z^L}{1 + b_1 z + \ldots + b_M z^M} + O(z^{L+M+1}),$$

где $z = \lambda - \lambda_0$. Полином $B^{[L/M]}(z)$, стоящий в знаменателе аппроксимации Паде, с точностью до числового множителя можно представить в виде определителя [6]

(1.11) $$Q^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \ldots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \ldots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_L & c_{L+1} & \ldots & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ z^M & z^{M-1} & \ldots & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель $C(L, M) = Q^{[L/M]}(0)$ обращается в нуль, когда порядок аппроксимации превосходит порядок аппроксимируемой рациональной функции. Точнее, справедлива следующая теорема.

Пусть

(1.12) $$R(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{l} \alpha_i z^i}{\sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j z^j}, \quad \sum_{j=0}^{m} \beta_j \neq 0,$$

тогда

(1.13) $$C(l+1, m) \neq 0, \; C(l, m+1) \neq 0,$$
$$C(l+i, m+j) = 0 \text{ при } i, j = 1, 2, \ldots$$

Условие (1.13) является также достаточным для того, чтобы $R(z)$ была рациональной функцией. На основании данной теоремы заключаем, что после вычисления конечного числа величин $C(L, M)$ определяем с помощью (1.11) знаменатель рациональной функции $R(z)$ точно.

Итак, мы нашли полюсы z_k функции $w(z)$ в области G и их кратности p_k. Для того чтобы найти $w(z)$ в G, т. е. полностью восстановить поле скоростей в толще жидкости, достаточно использовать формулу

(1.14) $$w(z) = \frac{(z - z_0)^N (-1)}{2\pi i \prod\limits_k (z - z_k)^{p_k}} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\left(v_0^2 - 2gS(x)\right)\left(1 + (S'(x))^2\right)\right]^{1/2} \prod\limits_k (x + iS(x) - z_k)^{p_k}\, dx}{(x + iS(x) - z_0)^N (x + iS(x) - z)}$$

в точном случае и формулу

(1.15) $$w(z) = \frac{(z - z_0)^N v_0 (-1)}{2\pi i \prod\limits_k (z - z_k)^{p_k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \nu S(x) - iS'(x)) \prod\limits_k (x - z_k)^{p_k}\, dx}{(x - z_0)^N (x - z)}$$

в рамках теории малых волн, где $G^+ \ni z_0$ — произвольная фиксированная точка, $N = P + 1$. Эти формулы легко получить, применив теорему

Коши к аналитической в области функции

$$f(z) = \frac{w(z) \prod_k (z - z_k)^{p_k}}{(z - z_0)^N}, \quad z \in G$$

с учетом соответственно (1.5) и (1.6).

Отметим, что в общем случае интегралы (1.9) берутся численно, например, если $S(x)$ задано экспериментально. Проиллюстрируем предлагаемый подход простым примером, в котором решение получается в явном виде.

2. Пример. В [1] найден профиль свободной поверхности, индуцируемый движущимся со скоростью v_0 на глубине h точечным вихрем:

$$(2.1) \qquad S(x) = \frac{\Gamma}{\pi v_0} \int_x^{+\infty} \frac{t \cos \nu (t - x) - h \sin \nu (t - x)}{t^2 + h^2} dt$$

($\nu = g/v_0^2$, Γ — интенсивность вихря). Так как этот профиль найден в рамках линейной теории волн, естественно восстанавливать $w(z)$ в этом же приближении, т. е. воспользоваться формулой (1.6). При этом все вычисления оказывается возможным проделать до конца и найти явный вид $w(z)$. Для $R(\lambda)$ вместо (1.7) удобно воспользоваться модифицированной формулой

$$R_\mu(\lambda) = \frac{-v_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \nu S(x) - iS'(x)}{(x - \mu)(x - \lambda)} dx$$

($G^+ \ni \mu$ — фиксированная точка). При таком выборе $R_\mu(\lambda)$ кратности нулей ее знаменателя уменьшаются на единицу по сравнению с (1.7) и совпадают с порядками полюсов $w(z)$. Формула (1.9) приобретает вид

$$(2.2) \qquad c_m = -\frac{v_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \nu S(x) - iS'(x)}{(x - \mu)(x - \lambda_0)^{m+1}} dx.$$

Полагая $\mu = i$, $\lambda_0 = i/2$ и подставляя (2.1) в (2.2), находим

$$c_k = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(-i)^{k+1}(h+1)(h+1/2)^{k+1}}.$$

Вычисляя элементы C-таблицы $C(L, M)$, получим $C(0, 1) = = \frac{\Gamma}{i2\pi(h+1)(h+1/2)} \neq 0$, $C(l, m) = 0$, $l = 1, 2, \ldots$, $m = 2, 3, \ldots$, откуда в соответствии с (1.12) заключаем, что $R(\eta)$ имеет вид $R(\eta) = = \alpha_0/(\beta_0 + \beta_1\eta)$, $\eta = z + i/2$. Нули знаменателя $R(\eta)$ найдем с помощью (1.11), где $L = 0$ и $M = 1$:

$$Q^{[0/1]}(\eta) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ \eta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что единственный нуль знаменателя $R(z)$ находится в точке $z_1 = -ih$, т. е. совпадает с положением вихря. Подставляя значение z_1 в (1.15), имеем комплексную скорость потока

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left(\frac{1}{z + ih} + \frac{1}{z - ih}\right) - \frac{\Gamma\nu}{\pi} e^{i\nu z} \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-i\nu t}}{t - ih} dt + v_0.$$

Это выражение совпадает с полученным в [1] путем решения прямой задачи.

3. Выводы. Стационарная задача о потенциальном обтекании погруженных твердых тел предлагаемым методом решается точно лишь в случае, когда обтекаемые тела можно представить конечной системой точечных особенностей. Отметим, что предположение о конечности числа особенностей комплексной скорости широко используется в задачах обтекания твердых тел [1—4, 7]. Когда особенности скорости не сводятся к конечной системе полюсов, можно говорить лишь о приближенном решении. Этот случай достаточно сложен и выходит за рамки настоящей работы. Отметим, что рассмотренный выше пример носит сугубо иллюстративный характер и интересен лишь тем, что позволяет прояснить суть предлагаемого подхода.

4. Устойчивость метода. Если профиль свободной поверхности $S(x)$ соответствует течению с комплексной скоростью $w(z)$, аналитической в области $D = \{z\colon \operatorname{Im} z < S(x) + \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, за исключением конечного числа полюсов $z_i \in G$ суммарного порядка P, то (1.11) и (1.14) однозначно восстанавливают $w(z)$ в G по $S(x)$. При дополнительном условии непрерывности второй производной функции $S(x)$ можно доказать непрерывность отображения $S(x) \to w(z)$, задаваемого (1.11), (1.14) в окрестности $S^0(x)$ в следующем смысле. Для любого $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из

$$\sup_{x \in R^1} \{ |S(x) - S^0(x)|,\ |S'(x) - (S^0(x))'| \} < \delta \tag{4.1}$$

будет вытекать $|w(z) - w^0(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in K \subset F$, где K — компакт, $F = G^0 \setminus \bigcup_{1}^{N} V_i(\rho)$, G^0, w^0 — область, занятая жидкостью, и комплексная скорость течения, соответствующие профилю $S^0(x)$, N — число полюсов w в G, $V_i(\rho) = \{z\colon |z - z_i^0| < \rho\}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно последовательно оценить величины $|c_n - c_n^0|$, $n = 0, 1, \ldots, 2N$, воспользовавшись (1.9), а также $|w(z) - w^0(z)|$ на множестве F с учетом того, что $|z_i - z_i^0| \to 0$ при $\delta \to 0$. В рамках линейной теории условие (4.1) можно заменить более слабым

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S - S^0|^2 + |S' - (S^0)'|^2}{(x^2 + \mu^2)^\alpha}\, dx < \delta \quad \left(\alpha < \frac{3}{2}\right).$$

Доказательство проводится аналогично.

5. Перспективы. Как отмечено в [8], известная несогласованность профилей поверхности, полученных теоретически (при решении прямых задач) и экспериментально, связана с неадекватностью модели обтекания, закладываемой в теоретические расчеты. Предлагаемый метод позволит дополнить это интересное замечание практическими результатами. Действительно, задача о локализации точечных полюсов скорости допускает точное решение. В силу этого на основе экспериментально полученных профилей свободной поверхности можно выявить характер обтекания различных тел: при каких условиях данное тело допускает представление точечными полюсами, найти их порядки и расположение, а также при каких условиях нарушается «точечное» представление. Например, можно исследовать случай обтекания цилиндра, который традиционно моделируется точечным диполем. Потенциал обтекания твердого тела не является аддитивной величиной [7], поэтому в случае, когда цилиндр движется в непосредственной близости от свободной поверхности, ее влияние существенно, так что можно предположить, что потенциал диполя перестает удовлетворительно описывать обтекание цилиндра. В силу устойчивости предлагаемого метода исчезающе малые ошибки в измерении входных данных (профиля поверхности) влекут исчезающе малые ошибки в решении, т. е. постановка подобных проблем в контексте предложенного подхода корректна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.** О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // М. В. Келдыш. Избранные труды. Механика.— М.: Наука, 1985.
2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Т. 1.

3. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
5. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1987.
6. **Бейкер Д., Грейвс-Моррис П.** Аппроксимации Паде.— М.: Мир, 1986.
7. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
8. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.

г. Люберцы *Поступила 22/XII 1987 г., в окончательном варианте — 24/VI 1988 г.*

УДК 532.529

С. И. Лежнин, И. И. Мулляджанов, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, Н. А. Прибатурин

ЭВОЛЮЦИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВОЗДУХОВОДЯНОЙ СМЕСИ СНАРЯДНОЙ СТРУКТУРЫ

При движении газо- и парожидкостных смесей имеют место разнообразные режимы течения (пузырьковый, снарядный, стержневой и др.), существенно различающиеся по гидро- и газодинамическим характеристикам. К настоящему времени достаточно хорошо теоретически и экспериментально изучено формирование и распространение волн давления в смеси жидкости с пузырьками газа. Что касается снарядного режима течения газожидкостной смеси, то имеющейся сейчас информации [1—4] недостаточно для понимания общей картины процесса формирования волн. Впервые модель распространения волн давления независимо предложена в [3, 4], где предполагалось, что распространение волны в такой среде есть результат безынерционного сжатия — расширения газового снаряда и передачи импульса пробке жидкости. В [3, 5] показано, что математическое описание эволюции волн сводится, как и в пузырьковой среде, к уравнению типа Кортевега—де Вриза, высказано предположение о возможности формирования в такой среде волн давления, форма и закономерности распространения которых такие же, как и в газожидкостной пузырьковой смеси.

В настоящей работе выполнено теоретическое и экспериментальное исследование формирования и распространения слабонелинейных ($\Delta p_0/p_0 < 1$) возмущений давления в реальной (с учетом апериодичности структуры и скольжения фаз) газожидкостной смеси снарядной структуры.

Рассмотрим распространение в одну сторону импульса конечной длительности малой амплитуды $\Delta p_0/p_0 < 1$ (p_0 — статическое давление). Согласно теоретическим оценкам [3], скорость распространения импульса по двухфазной смеси снарядной структуры должна определяться по той же формуле, что и для пызырьковой смеси: $c_0 = [\gamma p_0/\rho_1\varphi(1-\varphi)]^{1/2}$ (γ — показатель адиабаты газа, φ — объемное газосодержание смеси). Зададим начальную ширину импульса $L = c_0 t_0$ и его начальную амплитуду Δp_0. При этом исследуем волны, для которых $L > l$ (l — длина двухфазной ячейки пробка жидкости — газовый снаряд). Если ввести безразмерные параметры $\tau = tc_0\mathrm{M}/L$, $\mathrm{M} = (\gamma + 1)\Delta p_0/2\gamma p_0$, $\eta = x/L$, $p^* = \Delta p/\Delta p_0$, то, как показано в [5], эволюционное уравнение для волн в газожидкостной смеси снарядной структуры имеет точно такой же вид, как и в случае смеси жидкости с пузырьками газа:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \tau} + \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + p^* \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^3 p^*}{\partial \eta^3} = 0 \quad (1)$$

($\sigma^2 = \mathrm{M}(24L^2/l^2)$, σ, M — безразмерные критерии подобия).

В [3] отмечено, что особенность снарядной структуры — появление пространственной дисперсии при распространении но ней возмущения давления. Предельная частота распространения сигнала $2\omega_0 = 2c_0/l = 2[\gamma p_0/\rho_1 l^2\varphi(1-\varphi)]^{1/2}$. Из сравнения резонансных частот для пузырьковой среды [2] и для снарядной смеси ω_0 следует, что характерные частоты пульсаций в волнах, распространяющихся по рассматриваемой смеси, должны иметь низкое значение (несколько десятков герц, в пузырьковом потоке — килогерцы). Зная эти критерии, можно легко определить пути развития начального возмущения. Оценка показывает, что для снарядного