Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 3

УДК 532.51:534.12

Нелинейные несферические колебания пузырька газа при периодическом изменении давления окружающей жидкости*

А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Л.А. Косолапова, В.Г. Малахов

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, Казань

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

E-mail: aganin@kfti.knc.ru

Построена математическая модель динамики пузырька, в которой изменение формы межфазной поверхности представляется в виде ряда по сферическим гармоникам, а соотношения записываются с точностью до квадрата амплитуды искажения сферической формы пузырька. На режимах колебаний, близких к периодической сонолюминесценции отдельного пузырька в стоячей акустической волне, изучен характер колебаний воздушного пузырька в воде в зависимости от его начального радиуса и амплитуды изменения давления жидкости. Установлено, что за границей области линейно-устойчивых сферических колебаний могут иметь место несферические колебания ограниченной амплитуды. При этом наблюдаются как колебания с периодом, равным одному или нескольким периодам изменения давления жидкости, так и апериодические колебания. Показано, что пренебрежение искажениями в виде сферических гармоник с большими номерами ($i > 3$) может приводить к смене режимов колебаний. При этом влияние искажений на форму поверхности пузырька для гармоник с $i > 8$ незначительно.

Ключевые слова: газовый пузырек, нелинейные колебания, потенциальное течение.

Экспериментальное открытие в 1990 г. явления периодической сонолюминесценции отдельного пузырька в стоячей волне вызвало повышенное внимание исследователей к задачам динамики пузырька на этом режиме [1, 2]. Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования этого явления были направлены, в основном, на выяснение механизмов сонолюминесценции и повышение интенсивности свечения (повышение степени сжатия газа в пузырьке). С этой целью изучались зависимости радиальной динамики пузырька от используемых в экспериментах жидкостей и газов, окружающих условий, частоты, амплитуды и формы колебаний давления жидкости, диффузии газа через поверхность пузырька и т. д. [1, 2]. Теоретические исследования проводились с применением сферически симметричных моделей. Относительно недавно экспериментально удалось добиться существенного повышения интенсивности свечения [3].

Для осуществления высоких степеней сжатия пузырька, при которых возникает явление сонолюминесценции, необходимо, чтобы форма пузырька при его радиальных колебаниях оставалась близкой к сферической. Одной из первых

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00415) и Программы фундаментальных исследований отделения ЭММПУ РАН.

работ, посвященных исследованию устойчивости сферической поверхности раздела двух невязких несжимаемых жидкостей при ее малом отклонении от сферической формы, является работа [4]. Дальнейшее развитие проблема устойчивости сферического пузырька газа в жидкости в рамках линейной теории при учете поверхностного натяжения, вязкости и сжимаемости жидкости получила во многих работах [5–8 и др.].

В линейной теории выход за границу области устойчивости в параметрическом пространстве приводит к неограниченному росту амплитуды искажений, что физически можно интерпретировать как разрушение целостности пузырька. В реальности же пузырек может сохраняться и за пределами этих границ, например, в результате нелинейных эффектов, влияние которых по мере увеличения искажения сферической формы возрастает.

В работе [5] исследуется устойчивость сферической формы пузырька в квадратичном относительно амплитуд сферических гармоник приближении при учете поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Разрешающие соотношения в [5] получены с учетом трех первых гармоник. При этом влияние искажения формы пузырька на его сферические колебания не учитывалось.

Нелинейные эффекты, обусловленные немалыми искажениями сферической формы пузырька, на режиме, близком к сонолюминесценции, исследовались в [9] с применением уравнений, описывающих эллипсоидальные колебания пузырька с учетом вязкости и сжимаемости жидкости, а также сил поверхностного натяжения.

Целью настоящей работы является исследование нелинейных несферических колебаний пузырька в режиме, близком к режиму периодической сонолюминесценции, с учетом нелинейного взаимодействия сферических гармоник, задающих искажение сферической формы пузырька. Применяется математическая модель динамики пузырька, в которой соотношения записываются с точностью до квадрата амплитуды искажения сферической формы. При этом учитываются поверхностное натяжение, вязкость и сжимаемость жидкости. Обзор используемых в настоящее время моделей эволюции поверхности пузырька при ее представлении в виде ряда по сферическим поверхностным гармоникам приведен в [10].

ПОСТАНОВКА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Предполагается, что движение жидкости, окружающей пузырек, потенциальное. Влияние вязкости учитывается через динамическое граничное условие на межфазной поверхности. Жидкость около пузырька (в области $r \sim R_0$, где R_0 — характерный радиус пузырька) считается несжимаемой. Тогда движение жидкости в сферической системе координат $r,\ \theta,\ \varphi$ описывается уравнениями:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{p}{\rho_f} = f(t), \tag{1}$$

где t — время, p — давление, ρ_f — плотность жидкости, Φ — потенциал скорости, $f(t)$ — произвольная функция времени.

Считается, что газ в пузырьке идеальный, с равномерным распределением давления, подчиняющимся следующему закону:

$$p^- = p_b^0\left(\frac{V_0 - bV_0}{V - bV_0}\right)^\gamma. \tag{2}$$

Здесь p_b^0 — начальное давление газа в пузырьке, V_0, V — начальный и текущий объемы пузырька, b — постоянная, γ — показатель адиабаты.

На поверхности пузырька $r = r_s(\theta, t)$ записываются кинематическое граничное условие равенства проекций скоростей жидкости и поверхности по нормали **n** к деформированной поверхности

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=r_s} - \frac{1}{r_s^2}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|_{r=r_s}\frac{\partial r_s}{\partial \theta} = \frac{\partial r_s}{\partial t} \tag{3}$$

и динамическое граничное условие равенства нулю суммы проекций сил по нормали **n**

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn}, \tag{4}$$

где σ — поверхностное натяжение, τ_{nn} — вязкое напряжение,

$$\tau_{nn} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2},$$

μ — динамический коэффициент вязкости. Предположение о потенциальности поля скоростей в жидкости исключает возможность использования динамического граничного условия по касательной, поскольку система становится переопределенной. Поэтому в предлагаемой модели требуется выполнение только условия (4). Сравнение моделей с различными способами учета вязкости в [11] показывает возможность использования такого подхода.

Уравнение поверхности пузырька записывается в виде

$$r_S(\theta, t) = R(t)[1 + \epsilon(\theta, t)]. \tag{5}$$

Функции $R(t)$ и $\epsilon(\theta, t)$ будем называть, соответственно, радиусом и искажением сферической формы пузырька. Искажение сферической формы пузырька представляется как

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\eta), \tag{6}$$

где $P_i(\eta)$ – полиномы Лежандра, $\eta = \cos\theta$, $\varepsilon_i(t)$ — амплитуда искажения по i-й сферической гармонике.

Потенциал скоростей Φ записывается следующим образом:

$$\Phi = \frac{B_0(t)}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i(t)}{r^{i+1}} P_i(\eta). \tag{7}$$

С учетом (7) из (1) следует

$$f(t) = \frac{p_\infty}{\rho_f}, \tag{8}$$

где p_∞ — давление в жидкости вдали от пузырька.

Дальнейшие соотношения получены из (1)–(4) в предположении, что

$$\left|\varepsilon_i^3\right| \ll 1. \tag{9}$$

Подставим выражения (5)–(7) в уравнения (3), (4) с учетом (1) и (8). Применяя при интегрировании полученной системы по координате θ процедуру метода Бубнова-Галеркина и учитывая (9), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $R(t)$, $B_0(t)$, $\varepsilon_i(t)$, $\delta_i = B_i(t)/R^i$. Для сокращения записи уравнений примем соглашение о суммировании: если слагаемое содержит два одинаковых индекса, по этим индексам предполагается суммирование. Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\dot{R} = R^{-2}\left\{-B_0 + \left[-\frac{3}{2}B_0\varepsilon_i^2 + (i+1)\varepsilon_i\delta_i\right]\tilde{\alpha}_{ii}\right\}, \tag{10}$$

$$\dot{\varepsilon}_l = R^{-3}\left\{3B_0\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} - (l+1)\delta_l\tilde{\alpha}_{ll} - 3B_0\varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\alpha}_{ijl} + A_{ijl}\delta_i\varepsilon_j\right\}/\tilde{\alpha}_{ll}, \tag{11}$$

$$\dot{B}_0\left(2+\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right) - \dot{\delta}_i(i+1)\varepsilon_i\tilde{\alpha}_{ii} =$$

$$= -R^{-3}\left\{B_0^2 + \left[5B_0^2\varepsilon_i^2 - 4(i+1)B_0\varepsilon_i\delta_i + \frac{1}{2}(i+1)(2i+1)\delta_i^2\right]\tilde{\alpha}_{ii}\right\} - \frac{R(\tau_{nn},P_0)}{\rho_f} - \tag{12}$$

$$-\frac{2}{\rho_f}\left\{R\left(p^- - p_\infty\right) - \sigma\left[2 + \left(1-i-i^2\right)\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right]\right\},$$

$$\dot{B}_0\left(-\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} + \varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\alpha}_{ijl}\right) + \dot{\delta}_l\tilde{\alpha}_{ll} - \dot{\delta}_j(j+1)\varepsilon_i\tilde{\alpha}_{ijl} =$$

$$= -R^{-3}\left\{B_0\left(\delta_l - 2B_0\varepsilon_l\right)\tilde{\alpha}_{ll} + 5B_0^2\varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\alpha}_{ijl} - 4(j+1)B_0\varepsilon_i\delta_j\tilde{\alpha}_{ijl} + \frac{1}{2}B_{ijl}\delta_i\delta_j\right\} + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{\rho_f}\left\{\sigma\left[(l-1)(l+2)\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} + 2\left(1-i-i^2\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\alpha}_{ijl}\right] - R\left(\tau_{nn},P_l\right)\right\}, \quad l = 1,\ 2.$$

В (10)–(13) обозначено:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \int_{-1}^{1} P_iP_j\,d\eta, \quad \tilde{\alpha}_{ijk} = \int_{-1}^{1} P_iP_jP_k\,d\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijk} = \int_{-1}^{1} P_i'P_j'P_k(1-\eta^2)\,d\eta,$$

$$A_{ijk} = (i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk}, \quad B_{ijk} = (i+1)(j+1)\tilde{\alpha}_{ijk} + \tilde{\beta}_{ijk},$$

$$\left(\tau_{nn},P_0\right) = 2\frac{\mu}{R^3}\left\{2B_0[2 + (6 - \frac{3}{2}i(i+1))\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}] + (i+1)(i+2)(i-3)\varepsilon_i\delta_i\tilde{\alpha}_{ii}\right\},$$

$$\left(\tau_{nn},P_l\right) = 2\frac{\mu}{R^3}\left\{2B_0\left[-3\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} + \varepsilon_l\varepsilon_j(6\tilde{\alpha}_{ijl} - \frac{3}{2}\tilde{\beta}_{ijl})\right] + \right.$$

$$\left. +(l+1)(l+2)\delta_l\tilde{\alpha}_{ll} + \varepsilon_j\delta_i\left[2(i+2)\tilde{\beta}_{ijl} - (i+1)(i+2)(i+3)\tilde{\alpha}_{ijl}\right]\right\}.$$

Эта система с дальнейшим учетом предположений (9) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиуса $R(t)$ и искажений $\varepsilon_i(t)$

$$\left\{1 + \frac{1}{2}\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right\}R\ddot{R} + \frac{1}{2}R^2\varepsilon_i\ddot{\varepsilon}_i\tilde{\alpha}_{ii} = -\frac{3}{2}\dot{R}^2 - \left(3 - \frac{18i+9}{4i+4}\right)\dot{R}^2\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii} -$$

$$-\left(4-\frac{6i+3}{2i+2}\right)R\dot{R}\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_i\tilde{\alpha}_{ii}-\left(1-\frac{2i+1}{4i+4}\right)R^2\dot{\varepsilon}_i^2\tilde{\alpha}_{ii}-$$

$$-\frac{\mu}{\rho_f}\left\{4\frac{\dot{R}}{R}-\left[6i\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_i^2-(i+1)(i-2)\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_i\right]\tilde{\alpha}_{ii}\right\}+ \qquad (14)$$

$$+\frac{1}{\rho_f}\left\{p^- - p_\infty-\frac{\sigma}{R}\left[2+\left(1-i-i^2\right)\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right]\right\},$$

$$R\ddot{R}\left[\frac{l-2}{l+1}\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll}+\left(\frac{2l+5}{l+1}\tilde{\alpha}_{ijl}-3\tilde{\gamma}_{jil}\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right]-\frac{1}{l+1}R^2\ddot{\varepsilon}_l\tilde{\alpha}_{ll}+\left(\tilde{\alpha}_{ijl}-\tilde{\gamma}_{jil}\right)R^2\ddot{\varepsilon}_j\varepsilon_i=$$

$$=\dot{R}^2\left[\frac{3}{l+1}\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll}-\left(\frac{3l+9}{2(l+1)}\tilde{\alpha}_{ijl}+\frac{9\tilde{\beta}_{ijl}}{2(i+1)(j+1)}-3\tilde{\gamma}_{jil}\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right]-$$

$$-R^2\left[\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{ijl}+\frac{\tilde{\beta}_{ijl}}{2(i+1)(j+1)}-\tilde{\gamma}_{jil}\right]\dot{\varepsilon}_i\dot{\varepsilon}_j+$$

$$+R\dot{R}\left[\frac{5}{l+1}\dot{\varepsilon}_l\tilde{\alpha}_{ll}-\left(\frac{5l+11}{l+1}\tilde{\alpha}_{ijl}+\frac{3\tilde{\beta}_{ijl}}{(i+1)(j+1)}\right)\dot{\varepsilon}_j\varepsilon_i+(3\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j+5\dot{\varepsilon}_j\varepsilon_i)\tilde{\gamma}_{jil}\right]+ \qquad (15)$$

$$+\frac{\sigma}{\rho_f R}\left[(l-1)(l+2)\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll}+2(1-i-i^2)\varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\alpha}_{ijl}\right]-$$

$$-2\frac{\mu}{\rho_f}\left\{-[3l\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_l+(l+2)\dot{\varepsilon}_l]\tilde{\alpha}_{ll}+3\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_i\varepsilon_j[((j+1)(j+2-l)-2)\tilde{\alpha}_{ijl}+\right.$$

$$\left.+(\frac{l}{j+1}-1)\tilde{\beta}_{ijl}]-\dot{\varepsilon}_j\varepsilon_i[(j+2)(l-j-1)\tilde{\alpha}_{ijl}+(2-\frac{l}{j+1})\tilde{\beta}_{ijl}\right\},$$

где $\tilde{\gamma}_{ijk}=\dfrac{A_{ijk}}{(i+1)(k+1)}$.

В уравнениях (14), (15) не учитывается влияние сжимаемости жидкости. Вместе с тем, известно, что при сильных сжатиях пузырька сжимаемость жидкости может вызывать значительные потери энергии сжатия на акустическое излучение. Строгий учет влияния сжимаемости жидкости в рамках допущения (9) является довольно сложной задачей. Поэтому в настоящей работе сжимаемость жидкости учитывается приближенно в предположении, что несферические возмущения гаснут по мере удаления от пузырька так, что в дальней от пузырька области они отсутствуют. В этом случае можно использовать методику работы [12]. Тогда уравнение для радиуса пузырька примет следующий вид:

$$\left\{1-\frac{\dot{R}}{a}+\frac{4\mu}{a\rho_f R}+\frac{1}{2}\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right\}R\ddot{R}+\frac{1}{2}R^2\varepsilon_i\ddot{\varepsilon}_i\tilde{\alpha}_{ii}=$$

$$=-\left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}}{2a}\right)\dot{R}^2-\left(3-\frac{18i+9}{4i+4}\right)\dot{R}^2\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}-\left(4-\frac{6i+3}{2i+2}\right)R\dot{R}\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_i\tilde{\alpha}_{ii}-$$

$$-\left(1-\frac{2i+1}{4i+4}\right)R^2\dot{\varepsilon}_i^2\tilde{\alpha}_{ii}-\frac{\mu}{\rho_f}\left\{4\frac{\dot{R}}{R}-\left[6i\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_i^2-(i+1)(i-2)\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_i\right]\tilde{\alpha}_{ii}\right\}+ \qquad (16)$$

$$+\frac{1}{\rho_f}\left\{\left(1+\frac{\dot{R}}{a}\right)\left(p^- - p_\infty\right)+\frac{R}{a}\left(\dot{p}^- - \dot{p}_\infty\right)-\frac{\sigma}{R}\left[2+\left(1-i-i^2\right)\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right]\right\},$$

где a — скорость звука в жидкости. Анализ уравнений показывает, что если искажения ε_i и скорости $\dot{\varepsilon}_i$ для всех нечетных i равны нулю при $t = 0$, то они остаются таковыми и при $t > 0$, независимо от величины искажений по четным гармоникам.

Система (15), (16) с начальными условиями:

$$R(0)=R_0,\ \dot{R}(0)=0,\ \varepsilon_i(0)=\varepsilon_i^0,\ \dot{\varepsilon}_i(0)=0$$

решается методом Дормана–Принса седьмого порядка точности [13].

При вычислениях в представлении (6), (7) берется M гармоник, тогда система уравнений (15), (16) содержит $2M + 2$ неизвестных функций. Предполагается, что $\varepsilon_1 = 0$ и $\delta_1 = 0$, т. е. исключается перемещение центра тяжести пузырька.

Выражение для текущего объема пузырька с принятой точностью имеет вид

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon_i^2\tilde{\alpha}_{ii}\right).$$

Давление жидкости вдали от пузырька изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p\sin\omega t,$$

где Δp — амплитуда, $\omega = 2\pi/T$ — угловая частота, T — период.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Изучаются несферические колебания пузырька воздуха в воде. Принимаются следующие условия: $\gamma = 1{,}4$, $b = (8{,}5)^{-3}$, $a = 1500$ м/с, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}073$ кг/с^2, $\mu = 10^{-3}$ кг/мс, $p_0 = 0{,}1$ МПа, $\omega/2\pi = 26{,}5$ кГц.

Амплитуда колебаний давления и начальный радиус пузырька варьируются в интервалах 0,06 МПа $\le \Delta p \le$ 0,13 МПа, 3,5 мкм $< R_0 <$ 30 мкм. Начальные значения амплитуд искажения сферической формы пузырька полагаются равными $\varepsilon_i^0 = 10^{-8}$, $i = 2, 3 \ldots$. Выражение M = 1 в подписях к графикам означает, что в уравнениях (6), (7) учитывается одна (вторая или третья) сферическая гармоника.

Колебания пузырька при малых искажениях его сферической формы и сравнение с экспериментом

Для малых амплитуд искажения в уравнениях (15), (16) можно пренебречь квадратичными относительно величин ε_i слагаемыми (при этом уравнение относительно R остается нелинейным). Решение задачи при таком пренебрежении будем условно называть линейным, а решение, полученное по полным соотношениям, — нелинейным.

В линейном решении колебания амплитуды искажения ε_i либо затухают, либо остаются неизменными, либо неограниченно возрастают. Уменьшение и увеличение амплитуды искажения происходит по закону, близкому к экспоненциальному.

При затухающих колебаниях искажения ε_i сферическая форма пузырька является устойчивой по отношению к возмущениям в виде i-й гармоники, а при возрастающих колебаниях — неустойчивой.

Для оценки достоверности полученных результатов используются данные эксперимента [14] и результаты работы [8] по определению границы области устойчивости сферических колебаний пузырька в плоскости изменения параметров Δp, R_0. Эксперимент и расчеты проводились для воздушного пузырька в воде при частоте колебаний давления жидкости $\omega / 2\pi = 20{,}6$ кГц. Точки границы, полученные в эксперименте, показаны на рис. 1, *a* значками *1, 3*, результаты работы [8] — *2, 4*. Значками *3, 4* (*1, 2*) обозначены точки границы, в окрестности которых наблюдается развитие искажения в виде третьей (второй) сферической гармоники. Граница области устойчивости, рассчитанная по методике настоящей работы, приведена на рис. 1, *a* сплошной линией. Область устойчивости лежит ниже этой линии, а область неустойчивости — выше нее. В [8] задача решена с учетом вязкости жидкости, сжимаемости и теплопроводности.

Согласно результатам расчетов, для $\Delta p < 0{,}085$ МПа неустойчивость сферической формы развивается по третьей ($i = 3$) гармонике, а при $\Delta p > 0{,}085$ МПа форма поверхности пузырька оказывается наиболее чувствительной к возмущениям по второй ($i = 2$) гармонике. Видно, что согласование расчетных и экспериментальных данных можно считать удовлетворительным. Для высших гармоник ($i > 3$) сферическая форма поверхности пузырька согласно расчетам оказывается более устойчивой.

На рис. 1, *b* приведены границы области устойчивости для частоты $\omega / 2\pi = 26{,}5$ кГц без учета (пунктирная линия) и с учетом (сплошная линия) сжимаемости жидкости при амплитудах колебания давления жидкости, близких к тем, при которых возникает явление сонолюминесценциии. Видно, что учет сжимаемости увеличивает область устойчивости сферической формы пузырька. При этом наиболее опасным для пузырька при $\Delta p \geq 0{,}09$ МПа также является возмущение по второй гармонике. Отметим, что увеличение частоты колебаний давления жидкости приводит к уменьшению области устойчивых сферических колебаний.

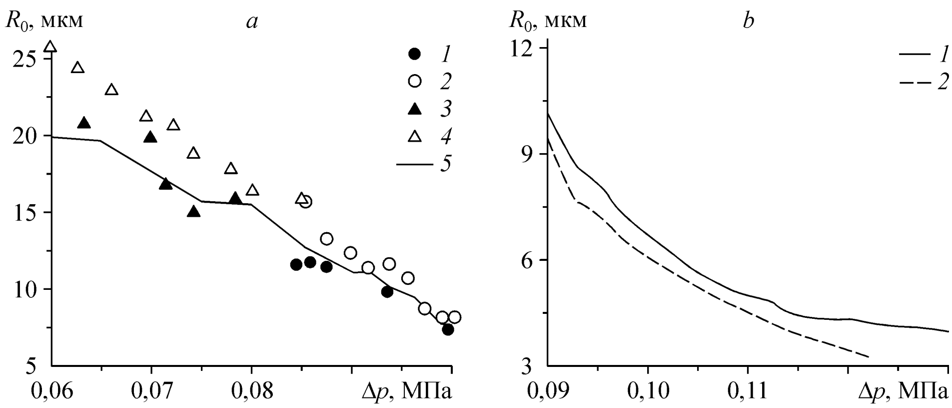

Рис. 1. Границы областей линейных устойчивых и неустойчивых сферических колебаний.

a — $\omega / 2\pi = 20{,}6$ кГц: эксперимент [14] (*1, 3*), результаты работы [8] (*2, 4*), результаты настоящей работы (*5*); неустойчивость развивается по третьей гармонике (*3, 4*), по второй гармонике (*1, 2*); *b* — $\omega / 2\pi = 26{,}5$ кГц: с учетом (*1*) и без учета (*2*) сжимаемости жидкости.

Колебания пузырька при немалых искажениях его сферической формы

Исследуется влияние взаимодействия между искажениями по разным гармоникам на режимы колебаний и форму поверхности пузырька. Расчеты проводятся для значений Δp, R_0, лежащих за границей области линейной устойчивости сферических колебаний.

На рис. 2 представлено развитие несферических колебаний пузырька для Δp = 0,11 МПа, R_0 = 5,141 мкм, $\varepsilon_2^0 = 10^{-8}$, $\varepsilon_i^0 = 0$, $i \geq 3$. При этих значениях Δp и R_0 сферические колебания пузырька устойчивы к возмущениям по гармоникам с номерами $i > 2$ и неустойчивы относительно возмущений по второй гармонике ε_2. Поэтому на начальном отрезке времени амплитуда колебаний $\varepsilon_2(t)$ постепенно нарастает. При этом вследствие имеющейся нелинейной связи между амплитудами искажений возбуждаются возрастающие колебания по другим гармоникам с четными номерами. Как отмечалось выше, для нечетных гармоник $\varepsilon_i(t) = 0$. На начальном отрезке времени, пока квадратичные относительно ε_i слагаемые в (15), (16) малы, амплитуда колебаний ε_2 возрастает как в линейном решении по закону, близкому к экспоненциальному. По мере увеличения амплитуды колебаний ε_2 скорость ее роста из-за влияния нелинейных слагаемых в уравнениях (15), (16) все более замедляется. Со временем колебания ε_2 становятся периодическими с периодом колебаний давления жидкости T. Аналогичные периодические колебания совершают амплитуды искажений и по другим четным гармоникам. Вместе с тем, их величина, а значит и вклад в несферические колебания пузырька, по мере уменьшения длины волны возмущения (увеличения i) довольно быстро убывают. В частности, амплитуда колебаний ε_4 примерно в 5 раз меньше, чем амплитуда колебаний ε_2 (см. рис. 2, *b*). Результаты вычислений показали, что влияние искажений по гармоникам с номерами $i > 8$ на несферические колебания пузырька несущественно.

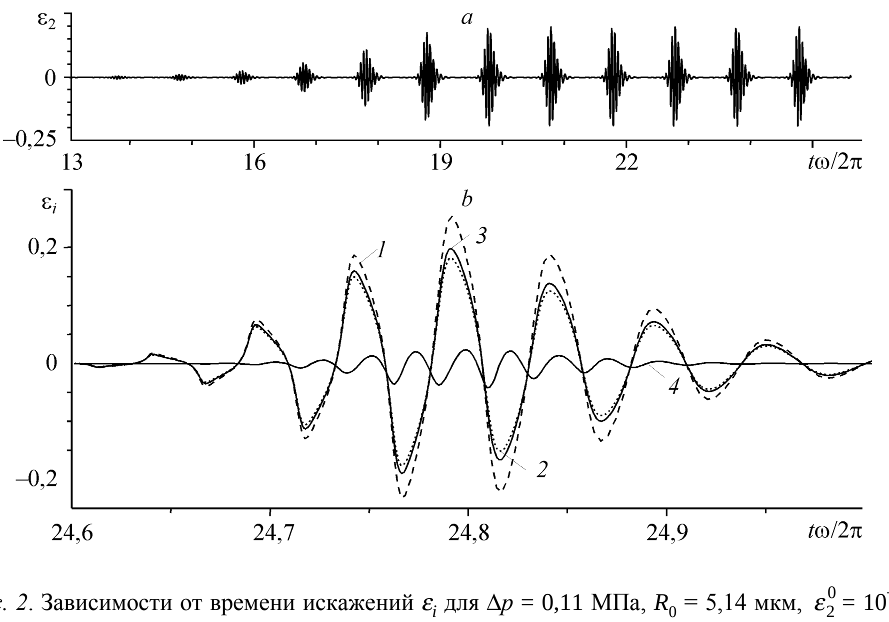

Рис. 2. Зависимости от времени искажений ε_i для Δp = 0,11 МПа, R_0 = 5,14 мкм, $\varepsilon_2^0 = 10^{-8}$: *a* — ε_2 при M = 8; *b* — ε_2 при M = 1 (*1*), 6 (*2*), 8 (*3*), ε_4 при M = 8 (*4*).

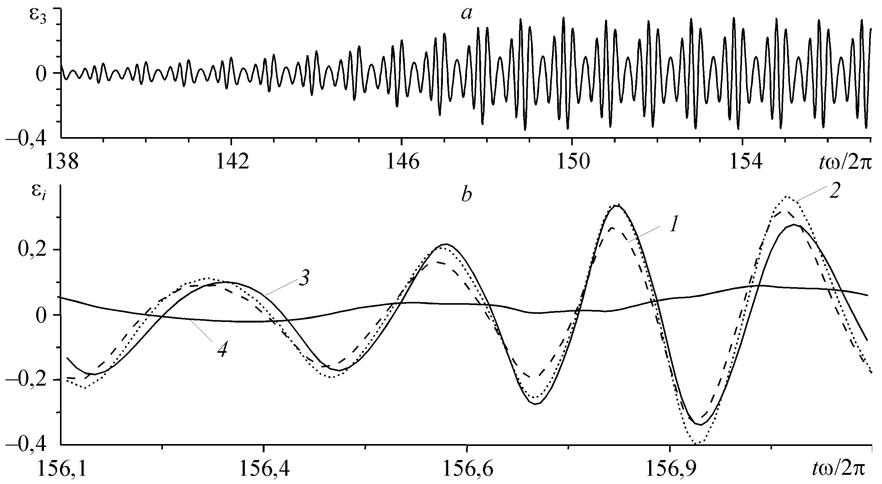

Рис. 3. Зависимости от времени искажений ε_i для Δp = 0,065 МПа, R_0 = 17,41 мкм, $\varepsilon_3^0 = 10^{-8}$: *a* — ε_3 при M = 8; *b* — ε_3 при M = 1 (*1*), 6 (*2*), 8 (*3*), ε_2 при M = 8 (*4*).

На рис. 3 показано развитие несферических колебаний пузырька для Δp = = 0,065 МПа, R_0 = 17,41 мкм, $\varepsilon_3^0 = 10^{-8}$, $\varepsilon_i^0 = 0$, $i \neq 3$. При таких значениях Δp и R_0 сферические колебания пузырька устойчивы к возмущениям по всем гармоникам, кроме третьей. Поэтому на начальном отрезке времени амплитуда искажения $\varepsilon_3(t)$ постепенно нарастает (см. рис. 3, *a*). В силу нелинейной связи между искажениями рост амплитуды колебаний $\varepsilon_3(t)$ инициирует развитие колебаний по всем другим гармоникам. Со временем колебания искажений становятся периодическими с периодом изменения давления жидкости *T*. Максимальным искажением, определяющим форму поверхности пузырька, является искажение $\varepsilon_3(t)$, т. к. сферические колебания пузырька неустойчивы к возмущениям по этой гармонике. Амплитуда колебаний искажения по второй гармонике значительно меньше (см. рис. 3, *b*).

Результаты, приведенные на рис. 2, 3, показывают, что учет в искажении сферической формы пузырька гармоник с номерами i > 3 приводит к уменьшению наибольшей амплитуды искажения на 15–20 %. При этом форма поверхности пузырька качественно не меняется и в зависимости от параметров задачи остается

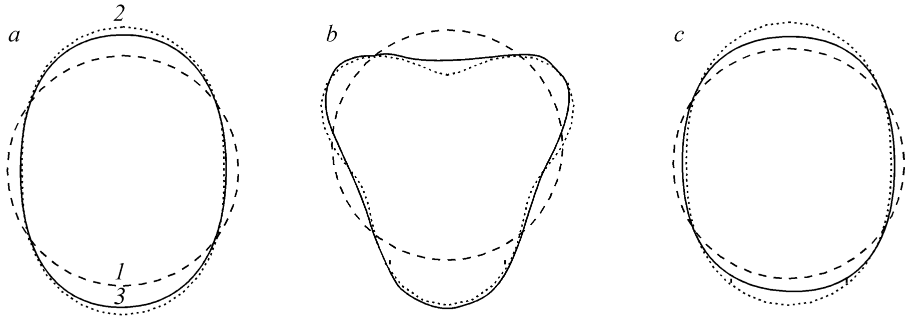

Рис. 4. Формы поверхности пузырька в момент времени t^*: *1* — сфера радиуса $R(t^*)$, *2* — M = 1, i = 2 (*a*, *c*), 3 (*b*); *3* — M = 8.

R_0 = 5,141 (*a*), 17,41 (*b*), 8,132 (*c*) мкм, Δp = 0,11 (*a*), 0,065 (*b*), 0,095 (*c*) МПа, t^*/T = 24,8 (*a*), 154,9 (*b*), 80,8 (*c*).

либо близкой к эллипсоидальной (см. рис. 4, *a*, *c*), если наибольшей является амплитуда искажения второй гармоники, либо трехлепестковой (см. рис. 4, *b*), если наибольшая амплитуда наблюдается у третьей гармоники.

В зависимости от вида искажения $\epsilon(\theta, t)$ и значений параметров Δp, R_0 могут иметь место различные режимы нелинейных колебаний. На рис. 5 изображены зависимости $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_4(t)$ для Δp = 0,095 МПа, $\varepsilon_3^0 = 10^{-8}$, R_0 = 8,128 мкм (см. рис. 5, *a*–*c*) и R_0 = 8,132 мкм (см. рис. 5, *d*–*f*). Как показали вычисления, значения Δp, R_0 находятся за границей области устойчивости относительно искажений по второй гармонике и в пределах области устойчивости относительно искажений по третьей гармонике. Поэтому развитие колебаний формы пузырька происходит иначе, чем в случаях, рассмотренных выше на рис. 2 и 3. Здесь колебания формы инициируются затухающими колебаниями искажения ε_3. За счет нелинейной связи колебания ε_3 возбуждают колебания искажений и по всем другим гармоникам. При этом искажение по второй гармонике постепенно нарастает, поскольку сферическая форма к такому возмущению неустойчива. Рост искажения $\varepsilon_2(t)$

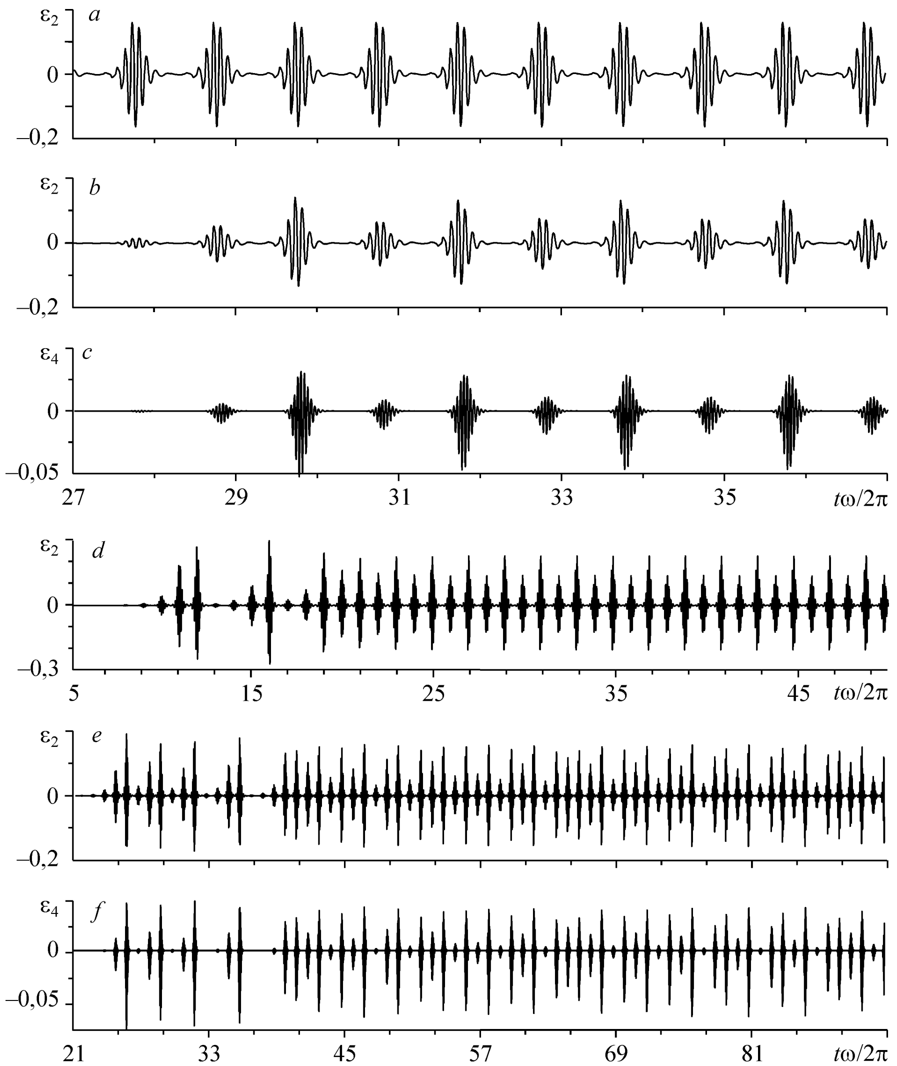

Рис. 5. Зависимости от времени искажений ε_2, ε_4 при Δp = 0,095 МПа, R_0 = 8,128 мкм (*a*, *b*, *c*), 8,132 мкм (*d*, *e*, *f*): M = 1 (*a*, *d*), 8 (*b*, *c*, *e*, *f*).

приводит к росту искажений по другим гармоникам с четными номерами. Как отмечалось выше, колебания искажений с четными номерами не поддерживают колебания искажений с нечетными номерами. Поэтому рост $\varepsilon_2(t)$ и возбуждаемых им колебаний искажений с другими четными номерами происходит при затухании колебаний искажений с нечетными номерами. Наибольшая амплитуда возникает у искажения по второй гармонике. При этом со временем для R_0 = 8,128 мкм устанавливаются колебания с периодом, равным $2T$ (см. рис. 5, *b*, *c*), а для R_0 = 8,132 мкм (см. рис. 5, *e*, *f*) колебания на рассмотренном интервале времени приобретают апериодический характер.

При задании для этих же значений Δp и R_0 начального искажения не по третьей, а по второй гармонике (ε_2^0 = 10^{-8}, $\varepsilon_i^0 = 0$ при $i > 2$) развитие колебаний формы пузырька будет иным лишь на начальном интервале времени. С течением времени картина колебаний окажется такой же, как изображенная на рис. 5, *b*, *c*, *e*, *f*.

Если искажение формы поверхности пузырька определить одной второй гармоникой, то с течением времени колебания $\varepsilon_2(t)$ становятся периодическими: при R_0 = 8,128 мкм (см. рис. 5, *a*) они имеют период T, а при R_0 = 8,132 мкм (см. рис. 5, *d*) – $2T$. Таким образом, если влияние искажений с четными номерами $i > 2$ не учитывать, то происходит изменение режимов колебаний, а также увеличение наибольшей амплитуды искажения ε_2 ≈ на 20 % по сравнению со случаем учета многих гармоник.

Режимы колебаний искажений $\varepsilon_i(t)$ можно также описать с помощью зависимостей максимальной на периоде изменения давления величины искажения ε_i^T ($\varepsilon_i^T = \max\limits_{(k-1)T \le t \le kT} |\varepsilon_i(t)|$, k — номер периода) от значения начального радиуса R_0. Такие зависимости представлены на рис. 6. Значения ε_i^T определяются при достаточно большом числе k, когда колебания приобретают выраженный периодический (или апериодический) характер. На рис. 6, *a* приведены зависимости $\varepsilon_i^T(R_0)$ для Δp = 0,065 МПа в случае, когда искажение сферической формы поверхности представляется одной третьей гармоникой (без учета влияния искажений по гармоникам с другими номерами) или рядом из восьми гармоник. Видно, что на рассмотренном интервале изменения R_0 наблюдаются периодические колебания. Границе области линейной устойчивости соответствует значение R_0 = 17,402 мкм. При выходе за эту границу имеет место ограниченный рост амплитуд искажения ε_i^T. Наибольшей оказывается амплитуда ε_3^T (линия *1*), когда искажение сферической

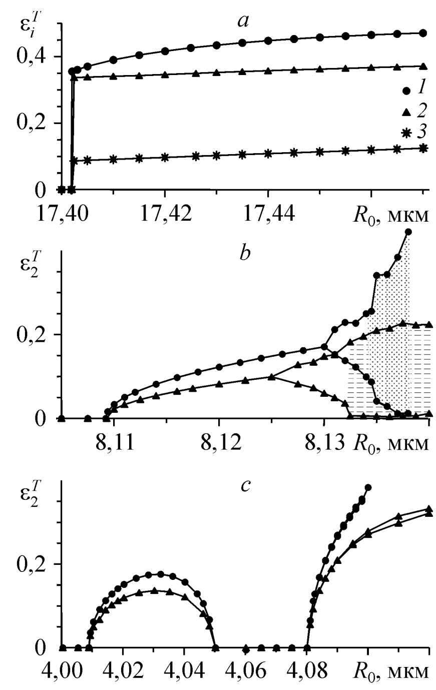

Рис. 6. Зависимости максимального на периоде изменения давления жидкости значения искажения ε_i^T от начального радиуса пузырька для R_0 для Δp = 0,065 (*a*), 0,095 (*b*), 0,13 (*c*) МПа.

поверхности пузырька определяется одной третьей гармоникой. При M = 8 происходит уменьшение амплитуды ε_3^T (*2*). Другие гармоники имеют существенно меньшую амплитуду колебаний. Зависимость $\varepsilon_2^T(R_0)$ показана на рисунке линией *3*.

Для Δp = 0,095 МПа (см. рис. 6, *b*) наблюдается более сложная зависимость $\varepsilon_i^T(R_0)$. Линией *1* на рис. 6, *b* представлены результаты для пузырька, искажение которого определяется одной второй гармоникой, линией *2* — решение при M = 8. В обоих случаях с ростом R_0 происходит изменение режима колебаний от колебаний с периодом T к колебаниям с периодом $2T$ и затем к апериодическим колебаниям. Совокупность всех значений ε_2^T, наблюдаемых на апериодическом режиме колебаний, показана затемненными областями. При этом для M = 8 смена режимов колебаний происходит начиная с меньших значений R_0, чем при решении задачи для одной второй гармоники.

Для Δp = 0,13 МПа (см. рис. 6, *c*) апериодические колебания не возникают, но наблюдаются интервалы изменения R_0, где колебания имеют периодический характер с периодами T и $2T$, а также интервалы, где колебания затухают. Видно, что для Δp = 0,095, 0,13 МПа в конце рассмотренных интервалов изменения R_0 пренебрежение влиянием искажений по гармоникам с номерами $i > 2$ (*1*) приводит к значительному завышению максимальной на периоде внешнего воздействия амплитуды искажения ε_2^T.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель несферических колебаний пузырька газа в жидкости, в которой ее вязкость учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. Вне межфазной границы движение жидкости предполагается потенциальным. Сжимаемость жидкости учитывается только в дальней от пузырька области. Изменение формы поверхности пузырька представляется в виде ряда по сферическим гармоникам. В уравнениях учтены члены второго порядка малости по отношению к амплитудам искажения сферической формы пузырька.

В рамках данной модели изучены несферические колебания воздушного пузырька в воде при периодическом изменении давления жидкости со значениями частоты и амплитуды, близкими к тем, при которых возникает явление однопузырьковой сонолюминесценции. Установлено, что при значениях амплитуды изменения давления жидкости и начального радиуса, лежащих за границей области линейно-устойчивых сферических колебаний, наблюдаются нелинейные несферические колебания с ограниченной амплитудой искажения сферической формы. При этом пренебрежение влиянием искажения пузырька по высокочастотным гармоникам может приводить к изменению режимов колебаний и вызывает увеличение амплитуд искажений. Показано, что несферические колебания могут иметь период, равный одному или двум периодам изменения давления жидкости, а также быть апериодическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Putterman S.J., Weninger K.P.** Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2000. — Vol. 32. — P. 445–476.
2. **Маргулис М.А.** Сонолюминесценция // Успехи физ. наук. — 2000. — Т. 170, № 3. — С. 263–287.
3. **Flannigan D.J., Suslick K.S.** Plasma formation and temperature measurement during single-bubble cavitation // Nature. — 2005. — Vol. 434. — P. 52–55.

4. **Plesset M.S.** On the stability of the fluid flow with spherical symmetry // J. Appl. Phys. — 1954. — Vol. 25, No. 1. — P. 96–98.
5. **Гасенко В.Г., Соболев В.В.** Поведение сферической кавитационной полости в звуковом поле // Волновые процессы в двухфазных системах. — Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. — 1975. — С. 207–258.
6. **Brenner M.P., Lohse D., Dupont T.F.** Bubble shape oscillations and the on set of sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, No. 5. — P. 954–957.
7. **Wu C.C., Roberts P.H.** Bubble shape instability and sonoluminescence // Phys. Lett. A. — 1998. — Vol. 250. — P. 131–136.
8. **Hao Y., Prosperetti A.** The effect of viscosity on the spherical stability of oscillating gas bubbles // Phys. Fluids. — 1999. — Vol. 11, No. 6. — P. 1309–1317.
9. **Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.** Эллипсоидальные колебания газового пузырька при периодическом изменении давления окружающей жидкости // Изв. РАН. МЖГ. — 2005. — № 5. — С. 45–52.
10. **Аганин А.А., Ильгамов М.А.** Динамика пузырька в вязкой жидкости с немалыми искажениями сферической формы // Динамика газовых пузырьков и аэрозолей. – Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова–Ленина, 2003. — С. 7–22.
11. **Ильгамов М.А., Аганин А.А., Косолапова Л.А. и др.** Модели динамики несферического пузырька с учетом вязкости жидкости // Тр. Матем. Центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 16. Модели механики сплошной среды. Материалы 16-й сессии Междунар. школы по моделям механики сплошной среды, Казань, 2002. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2002. — С. 192–201.
12. **Нигматуллин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.** О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // ДАН. — 1996. — Т. 348, № 6. — С. 768–771.
13. **Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
14. **Holt R.G., Gaitan D.F.** Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, No. 18. — P. 3791–3794.

Статья поступила в редакцию 15 мая 2006 г.,
после переработки — 23 октября 2007 г.