

СЛЕДЯЩАЯ НАГРУЗКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ

УДК 539.3

К. Ф. Черных, И. В. Петренко

Санкт-Петербургский государственный университет,
199164 Санкт-Петербург

На примере плоской задачи теории упругости выявляются особенности учета следящей нагрузки (нормального давления) при геометрически нелинейном подходе. Используются обозначения и терминология, принятые в [1-4].

1. Для плоской однородной задачи нелинейной теории упругости с заданными на контуре области напряжениями (рис. 1) имеют место простые компактные зависимости [1-4]:

$$\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \bar{\zeta}} = 0 \quad (\zeta \in \overset{\circ}{V}); \quad (1.1)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} \quad (\zeta \in \overset{\circ}{V}); \quad (1.2)_1$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|} \quad (\zeta \in \overset{\circ}{V}); \quad (1.2)_2$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{i\overset{\circ}{\gamma}} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{-i\overset{\circ}{\gamma}} = 2e^{i\overset{\circ}{\gamma}} [\sigma_{\nu\nu}^{\circ}(\overset{\circ}{s}) + i\sigma_{\nu t}^{\circ}(\overset{\circ}{s})] \quad (\zeta \in \overset{\circ}{S}). \quad (1.3)$$

Здесь $\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_i$ — комплексные компоненты несимметричного тензора номинальных напряжений; $\zeta = \overset{\circ}{x}_1 + i\overset{\circ}{x}_2$, $z = x_1 + ix_2$ — комплексные координаты материальной точки до и после деформации; $\Phi(|\partial z / \partial \zeta|, |\partial z / \partial \bar{\zeta}|, \lambda)$ — упругий потенциал; λ — кратность удлинения в направлении третьей координатной оси $\overset{\circ}{x}_3$.

Через определенные из краевой задачи (1.1)–(1.3) основные искомые функции $\partial z / \partial \zeta$ и $\partial z / \partial \bar{\zeta}$ находятся: поворот материальной частицы ω и кратность изменения площади Δ

$$e^{i\omega} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1}, \quad \Delta = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2,$$

комплексные компоненты тензора условных напряжений (симметричного тензора Био)

$$\overset{\circ}{\Sigma}_1 \equiv \overset{\circ}{\sigma}_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_{22} = \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \zeta|},$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}_2 \equiv \overset{\circ}{\sigma}_{11} - \overset{\circ}{\sigma}_{22} + i2\overset{\circ}{\sigma}_{12} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial z / \partial \bar{\zeta}|},$$

комплексная координата материальной точки после деформации

$$z = \int \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right).$$

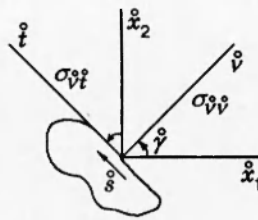


Рис. 1

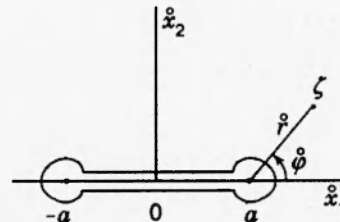


Рис. 2

2. Упругому потенциалу

$$\Phi = \sigma^* \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \alpha \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \quad (2.1)$$

отвечает в главных координатных осях деформации связь между главными условными напряжениями σ_i и главными кратностями удлинений:

$$\sigma_1 = \sigma^* \{1 + (1/2)[(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)]\} + (1/2)\alpha[(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)],$$

$$\sigma_2 = \sigma^* \{1 + (1/2)[(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)]\} - (1/2)\alpha[(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)].$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, т. е. при отсутствии деформации, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma^*$. Таким образом, σ^* — предварительное всестороннее (в плоскости $x_1 x_2$) растягивающее условное напряжение. Из выражения (2.1) видно, что рассматриваемому упругому потенциалу (2.1) соответствует предварительно напряженный (физически) линейный материал. Отметим связь упругих постоянных σ^*, α с традиционными:

$$\sigma^* \rightarrow \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \alpha \rightarrow \frac{E}{1 + \nu}. \quad (2.2)$$

Принятому материалу отвечают

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{\Psi(\zeta)}, \quad z = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)} d\bar{\zeta}.$$

При этом для бесконечной области с отверстием, содержащим начало координат, имеем

$$\Phi(\zeta) = a_0 + \Phi_0(\zeta), \quad \Phi_0(\zeta) = \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \frac{a_{-3}}{\zeta^3} + \dots,$$

$$\Psi(\zeta) = b_0 + \Psi_0(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta) = \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \frac{b_{-3}}{\zeta^3} + \dots,$$

где

$$a_0 = (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)/2\sigma^*; \quad b_0 = (\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty - i\bar{z} \sigma_{12}^\infty)/2\alpha;$$

σ_{ij}^∞ — условные напряжения на бесконечности.

3. В качестве базовой рассмотрим эталонную задачу о плоскости с прямолинейным разрезом ($-a \leq x_1 \leq a, x_2 = 0$), всесторонне растягиваемой на бесконечности (рис. 2), так что $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = \sigma^*, \sigma_{12}^\infty = 0 \rightarrow a_0 = 1, b_0 = 0$. Кроме того, на берега разреза действует равномерное нормальное давление σ_0 . Здесь следует различать три варианта:

1. Следящая нагрузка — нормальное давление σ_0 — отслеживает нормаль к деформированным берегам разреза. При этом статическое граничное условие (1.3) принимает вид

$$(\sigma^* + \sigma_0)\Phi_0(\zeta)e^{i\gamma} + (\alpha - \sigma_0)\Psi_0(\zeta)e^{-i\gamma} = -(\sigma^* + \sigma_0)e^{i\gamma}. \quad (3.1)$$

Здесь σ_0 , входя в коэффициенты граничного условия, является своеобразной параметрической нагрузкой. Существенно, что (и это является характерным свойством упругого потенциала (2.1)) уравнение (3.1) линейно относительно функций Гурса — Колосова (при значительной нелинейности общей задачи). К нему применим любой из практикуемых в линейной теории приемов решения. Более того, это граничное условие даже проще своего линейного аналога.

Решение уравнения (3.1) показывает, что разрез переходит в окружность с радиусом

$$R = \frac{R_0}{1 - \sigma_0/\alpha}, \quad R_0 = \frac{(1 + \sigma^*/\alpha)a}{2}, \quad (3.2)$$

что качественно более-менее подтверждается экспериментами на резиновых пластинах. Асимптотику напряженного состояния в окрестности правого конца разреза определяет величина

$$\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left(\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} \right)_* \frac{2 + (\alpha/\sigma^* - 1)(\sigma_0/\alpha)}{2[1 - (\sigma_0/\alpha)]} \quad \left(\left(\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} \right)_* = \sigma^* \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \right).$$

2. При геометрически нелинейном подходе также положим $\sigma_{\nu\nu}(\dot{s}) = -\sigma_0$, $\sigma_{\nu t}(\dot{s}) = 0$, т. е. будем понимать под σ_0 постоянную («мертвую») нормальную к берегам недеформированного разреза нагрузку. Отметим, что нагрузка такого рода реализуется в области ослабленных связей (при образовании так называемых тяжей в полимерах). При этом граничное условие (1.3) принимает вид

$$\sigma^*\Phi_0(\zeta)e^{i\gamma} + \alpha\overline{\Psi_0(\zeta)}e^{-i\gamma} = -(\sigma^* + \sigma_0)e^{i\gamma}.$$

Разрез переходит в окружность с радиусом

$$R = R_0 \left[1 + \frac{\alpha}{\sigma^*} \left(\frac{\sigma_0}{\alpha} \right) \right], \quad R_0 = \frac{(1 + \sigma^*/\alpha)a}{2}. \quad (3.3)$$

Асимптотику напряженного состояния определяет величина

$$\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left(\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} \right)_* \left[1 + \frac{\alpha}{\sigma^*} \left(\frac{\sigma_0}{\alpha} \right) \right] \quad \left(\left(\left. \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\varphi} \right|_{\varphi=0} \right)_* = \sigma^* \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \right).$$

Рассмотренный случай можно считать отвечающим первоначально нормальной нагрузке.

3. При использовании зависимостей линейной теории (с учетом, конечно, предварительного всестороннего растяжения) имеем выражение для асимптотики напряженного состояния. Таким образом, в случае первоначально нормальной нагрузки линейная теория приводит к правильной асимптотике. Что касается формы деформированного разреза, получаемый здесь результат неприемлем для ее описания (горизонтальный разрез переходит в вертикальный с перехлестыванием берегов). Этого и следовало ожидать, поскольку линейная теория неадекватно описывает большие повороты.

Примем обычное для металлов значение $\nu = 0,3$, при котором, согласно (2.2), $\alpha/\sigma^* = 1 - 2\nu = 0,4$. Для этих значений упругих постоянных на рис. 3, 4 показаны зависимости

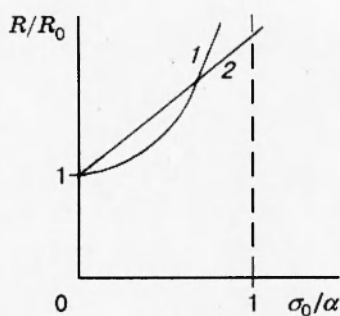


Рис. 3

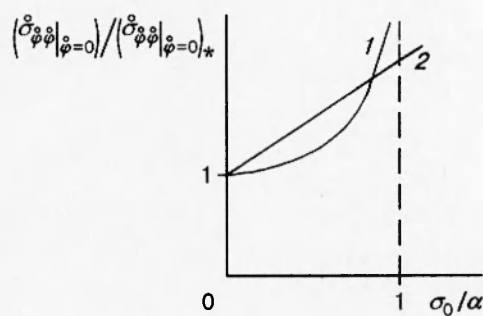


Рис. 4

R/R_0 (см. (3.2) и (3.3)) и $\sigma_{\phi\phi}^0|_{\phi=0} / \left(\sigma_{\phi\phi}^0|_{\phi=0} \right)_*$ от σ_0/α (линии 1 и 2 соответствуют случаям 1 и 2).

Отметим, что выявленный характер зависимостей от нормального давления справедлив и для угловых точек (вырезов).

Итак, на примере эталонной задачи получены (при линейном и геометрически нелинейном подходах) точные выражения для условных и линейных напряжений. Сопоставление найденных решений показало существенное различие влияния следящей и постоянной нагрузок на асимптотику напряжений и форму деформированного контура. Показана также приемлемость асимптотики напряжений в линейной теории в случае постоянной нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16511).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986.
2. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
3. Черных К. Ф. Нелинейная плоская теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной механике трещин // Успехи механики. 1986. Т. 12, вып. 4. С. 51–75.
4. Черных К. Ф. О необходимости учета геометрической нелинейности в проблеме хрупкого разрушения // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 6. С. 1336–1338.

Поступила в редакцию 14/XI 1994 г.,
в окончательном варианте — 5/V 1995 г.