18. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. Изд-во АН СССР, 1962.
19. Yun K.-S., Weissman S., Mason E. A. High-temperature transport properties of dissociating nitrogen and dissociating oxygen. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 6, p. 672.
20. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд. иностр. лит., 1961.
21. Vanderslice J. T., Weissman S., Masson E. A., Fallon R. J. High-temperature transport properties of dissociating hydrogen. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2, p. 155.
22. Гурвич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Изд-во АН СССР, 1962.
23. Кринберг И. А. Расчет температуры низкоточной дуги в воздухе. Докл. на 2-ом Сибирском совещании по спектр. анализу. Иркутск, 1963.
24. Кринберг И. А. К теории столба электрической дуги, горящей в условиях естественной конвекции. I. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 5, стр. 888.
25. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Успехи физ. наук, 1960, т. 70, № 2, стр. 201.
26. Колесников В. Н., Обухов-Денисов В. В. Эффективное сечение рассеяния медленных электронов на атомах водорода. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 4, стр. 1001.
27. Neynaber R. H., Marino L. L., Rothe E. W., Trujillo S. M. Low-energy electron scattering from atomic nitrogen. Phys. Rev., 1963, vol. 129, No. 5, p. 2069.
28. Shkarofsky I. P., Bachynsky M. P., Johnston T. W. Collision frequency associated with high temperature air and scattering cross sections of the constituents. Planat. and Sp. Sci., 1961, vol. 6, p. 24.
29. Brüche E. Über den Querschnitt von Wasserstoff- und Stickstoffmolekülen gegenüber langsamen Elektronen. Ann. Phys., 1927, B. 82, H. 7, S. 912.
30. Даутов Г. Ю. Цилиндрическая дуга в аргоне. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 21.
31. King L. A. The voltage gradient of the free burning arc in air or nitrogen. Proc. 5-th Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, 1962, Amsterdam, vol. 1, p. 871.
32. Suits C. G. High pressure arcs in common gases in free convection. Phys. Rev., 1939, vol. 55, No. 6, p. 561.
33. Somers P. J., Smit J. A. Measurments on arc discharges in nitrogen at 1 atm and higher pressure. Appl. Scient. Res. B, 1956, vol. 6, No. 1—2, p. 75.
34. Goldman K. Characteristics of the argon arc., Proc. 5-th Int. Conf. Ionization Phenomen in Gases, 1962, Amsterdam, vol. 1, p. 863.
35. Энгель А. Ионизованные газы. Физматгиз, 1959.
36. Edels H., Wnittaker D. The determination of arc temperatures from shock velocities. Proc. Roy. Soc. A, 1957, vol. 240, No. 1220, p. 54.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАГРЕВЕ ТОКОМ В УСЛОВИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

М. А. Каганов, В. А. Янгарбер

(Ленинград)

Рассмотрим температурное поле, возникающее в однородной среде вокруг электрода сферической формы при постоянной силе тока. Изменение температуры будет обусловлено выделением джоулева тепла в среде, внутри электрода, а также на границе между электродом и средой (вследствие наличия контактного сопротивления). Такого рода задача представляет интерес для расчета режима контактной электросварки, определения условий работы заземлений и некоторых других приложений. До сих пор она решалась лишь приближенно для конкретных численных примеров [1].

Ход изменения температуры на контакте между электродом и средой может быть использован для определения теплофизических характеристик среды [2,3]. Однако в расчетных формулах для определения коэффициентов теплопроводности и температуропроводности не учитывалось тепло, выделяемое в объеме исследуемого образца. Это может привести к существенной погрешности, особенно для материалов с относительно высоким удельным сопротивлением (полупроводники).

Повышение температуры T на расстоянии r_0 от центра электрода через время t после включения тока I будет определяться уравнением теплопроводности

$$\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{I^2\rho}{16\pi^2\lambda r^4} \tag{1}$$

при начальном условии

$$T(r,t)\big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

и граничных условиях

$$q=G\frac{\partial T}{\partial t}\Big|_{r=r_0}-4\pi\lambda r_0^2\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_0},\qquad T(r,t)\to 0\quad (r\to\infty) \tag{3}$$

Здесь r_0 — радиус электрода, λ и k — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности среды, ρ — удельное электрическое сопротивление среды, G — полная теплоемкость электрода, q — мощность, выделяемая внутри электрода и на его поверхности.

Теплопроводность материала электрода считаем достаточно большой, чтобы пренебречь перепадом температуры по его радиусу.

Уравнение (1) будем решать методом источников. Заменой

$$\frac{kt}{r_0^2}=\tau,\qquad \frac{r}{r_0}-1=x,\qquad u=r_0(x+1)T+\frac{A}{2(x+1)}$$

задача (1) — (3) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u(x,\tau)|_{\tau=0}=\frac{A}{2(x+1)}\equiv f(x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)\Big|_{x=0}=-q^*+\gamma\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big|_{x=0},\qquad u(x,\tau)\to 0\quad (x\to\infty) \tag{4}$$

$$A=\frac{I^2\rho}{16\pi^2\lambda r_0}=\frac{Q}{4\pi\lambda},\qquad q^*=\frac{q+Q}{4\pi\lambda},\qquad \gamma=\frac{Gk}{4\pi\lambda r_0^3}=\frac{c_1}{3c_2},\qquad Q=\frac{I^2\rho}{4\pi r_0}$$

Здесь Q — мощность, рассеиваемая в среде, c_1, c_2 — объемная темплоемкость электрода и среды соответственно.

Решение задачи (4) ищется в виде (см. [4])

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_0^\infty\left[f(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right\}+f(-\xi)\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right\}\right]d\xi \tag{5}$$

Здесь $f(-\xi)=\varphi(\xi)$ — непрерывное продолжение функции $f(\xi)$ на отрицательную полуось; таким образом, $\varphi(0)=f(0)={}^1/_2A$. Подчиним функцию φ трем дополнительным условиям

$$\varphi'(0)=-f'(0) \tag{6}$$

$$\varphi'(\xi)e^{-\delta\xi^2}=o(1),\qquad \xi\varphi(\xi)e^{-\delta\xi^2}=o(1),\qquad (\delta>0)\quad \text{при } \xi\to\infty \tag{7}$$

наконец, функция $\varphi(\xi)$ такова, что $u(x,\tau)$ удовлетворяет граничному условию (4) при $x=0$. Введем функционал

$$P(\psi)=\int\limits_0^\infty\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\tau}\right\}\psi(\xi)\,d\xi,\qquad P(1)=\sqrt{\pi\tau}$$

Тогда в силу аддитивности и однородности функционала P в предположении справедливости условия (7) для функции ψ имеем

$$\begin{aligned} P(\xi\psi)&=2\tau\psi(0)+2\tau P\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)\\ P(\xi^2\psi)&=2\tau P(\psi)+4\tau^2\frac{d\psi(0)}{d\xi}+4\tau^2P\left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Так как, очевидно, $f(\xi)$ удовлетворяет условию (7), то формулы (8) имеют место, сли ψ заменить на f или на φ.

Из равенств (7), (8) и граничного условия (4) при $x = 0$, учитывая условие (6), получим

$$P(f') - P(\varphi') - P(f + \varphi) = -P(2q^*) + \gamma P(f'' + \varphi'')$$

что, очевидно, имеет место, если φ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(\varphi) \equiv \varphi'' + \gamma^{-1}\varphi' + \gamma^{-1}\varphi = -f'' + \gamma^{-1}f' - \gamma^{-1}f + 2\gamma^{-1}q^*$$

Разыскивается $\varphi(\xi)$ в виде

$$\varphi(\xi) = -f(\xi) + 2q^* + h(\xi) \tag{9}$$

Тогда функция $h(\xi)$ есть решение задачи

$$L(h) = \frac{2}{\gamma} f'(\xi), \qquad h(0) = A - 2q^* = -q^{**} = -\frac{2q + Q}{4\pi\lambda}, \qquad h'(0) = 0 \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$h(\xi) = \frac{q^{**}}{\gamma\Delta\alpha} \Delta\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi}\right) + \frac{2}{\gamma\Delta\alpha} \int_0^\xi f'(z)\, \Delta e^{\alpha(\xi - z)}\, dz \tag{11}$$

Здесь α_1 и α_2 — корни уравнения $\gamma\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ $(\gamma > 0)$, а символ Δ определяется так: $\Delta y(\alpha) = y(\alpha_1) - y(\alpha_2)$ для любой функции $y(\alpha)$.

Подставляя (11) в (9) и в (5), получаем

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left\{ \int_0^\infty f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right] d\xi + \int_0^\infty \left[\frac{2}{\gamma\Delta\alpha} \Delta\left(\int_0^\xi f'(z)\, e^{\alpha(\xi - z)}\, dz\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{q^{**}}{\gamma\Delta\alpha} \Delta\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\xi}\right) - f(\xi) + 2q^*\right] \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right] d\xi \right\}$$

Отсюда получаем окончательное выражение для температурного поля в однородной среде при нагреве током постоянной силы

$$T(x, \tau) = \frac{1}{4\pi\lambda r_0 (x + 1)} \left\{ -\frac{Q}{2(x+1)} + (q + Q)\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] + \right.$$

$$+ \frac{2q + Q}{2\gamma\Delta\alpha} \Delta\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha^2\tau - \alpha x}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right)\right]\right) +$$

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\tau}\right\} \operatorname{sh}\frac{\xi x}{2\tau} \frac{d\xi}{\xi + 1} -$$

$$\left. - \frac{Q}{2\gamma\Delta\alpha} \Delta\left(e^{\alpha^2\tau - \alpha x} \int_0^\infty e^{-\alpha\xi}\left[1 - \Phi\left(\frac{\xi + x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right)\right] \frac{d\xi}{(\xi + 1)^2}\right) \right\} \tag{12}$$

Здесь $\Phi(z)$ — интеграл вероятности. Интегралы, входящие в правую часть (12), легко могут быть вычислены для конкретных значений параметров, причем в силу быстрого убывания подынтегральной функции с возрастанием ξ процесс численного интегрирования быстро сходится.

В приложениях часто важно знать температуру поверхности электрода, т. е. правую часть (12) при $r = r_0$. Выражение для температуры $T(r_0, t)$ на поверхности электрода может быть представлено в более простом виде

$$T(r_0, t) = \frac{1}{8\pi\lambda r_0 \gamma\Delta\alpha} \left[(q + 2Q)\Delta\left(\frac{\mu(\alpha\sqrt{\tau}) - 1}{\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - Q\Delta\left(e^{\alpha^2\tau} \int_0^\infty e^{-\alpha\xi}\left[1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right)\right] \frac{d\xi}{(\xi + 1)^2}\right.\right. \tag{13}$$

$$\mu(z) = \exp\{z^2\}[1 + \Phi(z)]$$

Заметим, что формула (13) в случае, когда $Q = 0$ $(A = 0)$, совпадает с выражением для температуры шарового зонда, используемого для измерения теплофизических характеристик дисперсных материалов [5].

Из формулы (12) предельным переходом при $t \to \infty$ легко получить выражение температуры среды в установившемся режиме

$$T_* = \frac{1}{4\pi\lambda r}\left[q + Q\left(1 - \frac{r_0}{2r}\right)\right]$$

В ряде случаев для анализа теплового режима электрода достаточно рассмотреть ход температуры во времени в ближайший период после включения тока и в период установления стационарного режима. Воспользуемся (13) для приближенного подсчета $T(r_0, \tau)$ при $\tau \ll 1$ и $\tau \gg 1$. Имеем

$$T(r_0, \tau) = \frac{\tau}{4\pi\lambda r_0 \gamma}\left(q + \frac{4}{3} Q \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\right) + o(\tau^{3/2}) \qquad \text{при } \tau \ll 1$$

Если собственная теплоемкость электрода мала (например, случай полого шара), то при условии $\gamma^2 \ll \tau \ll 1$ получим

$$T(r_0, \tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi^{3/2}\lambda r_0}\left(q + \frac{1}{2}\sqrt{\pi\tau}\, Q\right) + o(\tau)$$

$$T = \frac{2q + Q}{8\pi\lambda r_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left(1 + \frac{Q}{Q + 2q}\right)\right] + o\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad \text{в случае } \tau \gg 1$$

Полученные результаты могут быть использованы также при расчете температурного поля среды $T^*(r, t)$, когда ток подается в виде прямоугольного импульса продолжительностью t_0. Тогда в силу аддитивности решения уравнения теплопроводности относительно источников постоянной мощности

$$T^*(r, t) = T(r, t) - T(r, t - t_0) \qquad \text{при } t \geq t_0$$

Если при этом $kt_0 / r_0^2 \ll 1$, то

$$T^* \approx t_0 \frac{\partial T(r, t)}{\partial t}$$

Очевидно, далее, что если выключить ток после того как установился стационар ный режим, то поле температуры $T^{**}(r, t)$ будет убывать к нулю по закону

$$T^{**}r, t) = T_* - T(r, t)$$

Заметим, наконец, что, хотя все выкладки были проведены для случая $\Delta\alpha \neq 0$, это не ограничивает общности. Если $\Delta\alpha = 0$ $(\gamma = 1/4)$, то решением задачи (10) является функция $c_1 e^{\alpha_1 \xi}(1 + c_2\xi)$, соответственно изменится и вид (12). Однако можно и при $\Delta\alpha = 0$ воспользоваться прежним видом (12), следует лишь в этом равенстве перейти к пределу при $\alpha_1 \to \alpha_2 \to -2$. Далее, случай $\gamma = 0$ также включен в решение (12). При этом надо в (12) перейти к пределу при $\gamma \to 0$, $\alpha_1 \to -1$, $\alpha_2 \to -\infty$. Для простоты запишем выражение для $u(x, \tau)$ в случае $\gamma = 0$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \left\{ f(\xi) \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\tau}\right] + \left[2\int_0^\xi f'(\xi)\, e^{z-\xi}\, dz + q^{**}e^{-\xi} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f(\xi) + 2q^*\right] \exp\left[-\frac{(x + \xi)^2}{4\tau}\right]\right\} d\xi$$

В частности, на поверхности электрода $(x = 0)$ при $\gamma = 0$ имеем

$$T(r_0, \tau) = \frac{q + Q}{8\pi\lambda r_0}\left[1 - \mu(-\sqrt{\tau})\right] - \frac{Q}{8\pi\lambda r_0} e^\tau \int_0^\infty e^\xi \left[1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right)\right] \frac{d\xi}{(\xi + 1)^2}$$

Поступила 6 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыкалин Н. Н. Теория нагрева стержней током при сварке встык сопротивлением. Сб. Тепловые процессы при контактной сварке, Изд-во АН СССР, 1959.
2. Cutler M. Thermoelectric measurements at small area contacts. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 6.
3. Cutler M., Cheney G. T. Measurement of thermal conductivity of electrical conductors at high temperatures. J. Appl. phys., 1963, vol. 34, No. 6.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2, 1956.
5. Каганов М. А. Прибор для определения тепловых характеристик почвы. Сб. тр. по агрономич. физике, 1952, № 5.