этом интегральное уравнение (3.5) решалось методом последовательных приближений. Результаты численных расчетов приведены на фиг. 3 и 4. На фиг. 3 представлено распределение функции w вдоль прямой $y = x$ $(x \geqslant 0)$, а на фиг. 4 — вдоль прямой $y = 1$ и $y = 1/2$ $(x \geqslant 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кавлакан М. В., Михайлов А. М. Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании.— ДАН, 1980, т. 251, № 6.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила 6/VII 1983 г.

УДК 539.375

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В УПРУГОМ ТЕЛЕ

В. Г. НОВИКОВ, Б. М. ТУЛИНОВ

(Москва)

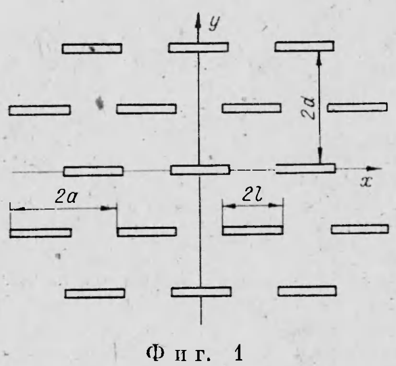
Задачи теории упругости для бесконечного изотропного тела, ослабленного двоякопериодической системой прямолинейных трещин, рассматривались в [1—11], где были сведены к численному решению сингулярного интегрального уравнения или бесконечной алгебраической системы. В данной работе построено аналитическое решение задачи для двоякопериодической системы прямолинейных трещин продольного сдвига, образующих ромбическую решетку. Получено выражение для макроскопического модуля сдвига среды с данной системой трещин.

1. Постановка и решение двоякопериодической задачи. Известно [12], что решения задач продольного сдвига сводятся к определению аналитической в области, занятой телом, функции $F(z)$, где $z = x + iy$. При этом компоненты напряжений σ_{xz}, σ_{yz} и смещение w определяются по формулам

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \mu_0 F(z);\ w = \operatorname{Re} f(z),\ F(z) = f'(z), \tag{1.1}$$

где μ_0 — модуль сдвига.

Пусть бесконечная упругая плоскость xOy ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных разрезов, параллельных действительной оси. Предполагается, что основной параллелограмм периодов имеет форму ромба. Внутри параллелограмма периодов по диагонали расположен разрез (фиг. 1). На берегах разрезов задана одинаковая в конгруэнтных точках самоуравновешенная нагрузка



Фиг. 1

$$\sigma_{yz} = -T(x),\ |x| < l,\ y = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим $2g(x)$ разрыв смещения при переходе через разрез

$$2g(x) = w(x, +0) - w(x, -0),\ |x| \leqslant l.$$

Пусть приложенная нагрузка $T(x)$ является четной функцией координаты x. Тогда $T(x) = T(-x)$ и в силу симметрии функция $F(z)$ является четной двоякопериодической функцией. Можно показать [13, 14], что $F(z)$ выражается через производную функции $g(x)$ в виде

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^l \frac{g'(t) P'(t)\, dt}{P(t) - P(z)}, \tag{1.3}$$

где $P(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, а штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из граничного условия (1.2) получаем для функции $g'(t)$ уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{g'(t) P'(t)\, dt}{P(t) - P(x)} = -\frac{T(x)}{\mu_0}. \tag{1.4}$$

Обозначая $P(t)$ под знаком интеграла в соотношении (1.4) через новую переменную, приводим уравнение (1.4) к задаче обращения интеграла типа Коши, решение которой хорошо известно [14]. Опуская промежуточные выкладки, получим решение уравнения (1.4):

$$g'(t)=\frac{1}{\pi\mu_0\sqrt{P(t)-P(l)}}\left[C_0+P(t)\int_0^l\frac{\sqrt{P(x)-P(l)}}{P(x)-P(t)}\frac{P'(x)}{P(x)}T(x)\,dx\right], \tag{1.5}$$

где C_0 — постоянная. Из (1.1), (1.3) и (1.5) получаем распределение напряжений в виде

$$\sigma_{xz}-i\sigma_{yz}=\frac{1}{\pi\sqrt{P(z)-P(l)}}\left[C_0+P(z)\int_0^l\frac{\sqrt{P(t)-P(l)}}{P(t)-P(z)}\frac{P'(t)}{P(t)}T(t)\,dt\right]. \tag{1.6}$$

Рассмотрим случай приложения однородной нагрузки $T(x)=\tau_0$. Тогда из (1.6) следует

$$\sigma_{xz}-i\sigma_{yz}=i\tau_0+\frac{C}{\sqrt{P(z)-P(l)}}, \tag{1.7}$$

где C — постоянная (отличная от C_0), значение которой определяется из условия двоякой периодичности смещения $w(x, y)$. Можно показать, что $w(x, y)$ является периодической функцией координаты x, а из условия периодичности смещения по координате y следует выражение для C

$$C=-\tau_0 d[P(l)-e_2]\sqrt{\lambda_+-\lambda_-}/2K(k), \tag{1.8}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [15];

$$e_1=P\left(\frac{a-id}{2}\right),\quad e_2=P(a),\quad e_3=P\left(\frac{a+id}{2}\right), \tag{1.9}$$

$$A=e_2^2+3e_2P(l)+2e_1e_3,$$

$$\lambda_\pm=\frac{-A\pm\sqrt{A^2+[P(l)-e_2]^2(e_1-e_3)^2}}{[P(l)-e_2]^2},$$

$$k=\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_--\lambda_+}}.$$

Для коэффициента интенсивности напряжений [11] в случае однородной нагрузки из соотношений (1.7)—(1.9) имеем выражение

$$\frac{K}{K_0}=d\frac{P(l)-e_2}{K(k)}\sqrt{\frac{\lambda_+-\lambda_-}{2a|P'(l)|}},$$

где $K_0=\tau_0\sqrt{a}$. Зависимость K/K_0 от безразмерной длины трещин l/a приведена на фиг. 2. Кривым *1—5* соответствуют значения $d/a=\infty$ (периодическая система коллинеарных трещин); 4; 2; 1 и 1/2. При больших значениях d/a (кривые *1—3*) коэффициент интенсивности напряжений монотонно возрастает с увеличением длины трещин. При значении d/a порядка единицы (кривая *4*) зависимость приобретает немонотонный характер, который выражен тем отчетливей, чем меньше значение d/a (кривая *5*). После стадии возрастания коэффициент интенсивности напряжений начинает уменьшаться с увеличением длины трещин и лишь при достаточно сильном сближении трещин вновь возрастает. Данный результат согласуется с выводом [1, 4] о возможном эффекте упрочнения при росте системы трещин.

2. Макроскопические параметры решетки трещин. Определим связь между средними деформациями $\langle\varepsilon_{yz}\rangle$ и средними напряжениями $\langle\sigma_{yz}\rangle$ в среде, содержащей описанную выше систему трещин, берега которых свободны от нагрузок. Пусть

$$\langle\varepsilon_{yz}\rangle=\gamma_0, \tag{2.1}$$

где γ_0 — постоянная. При отсутствии трещин такая деформация создала бы в среде напряжение $\sigma_{yz}=\tau_0$, где

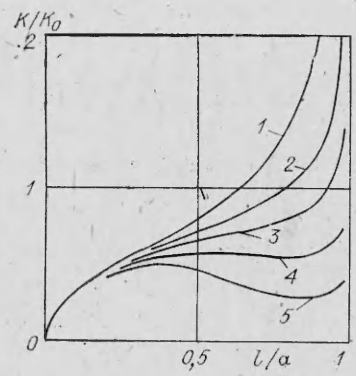
$$\tau_0=\mu_0\gamma_0. \tag{2.2}$$

Для среды с трещинами имеем

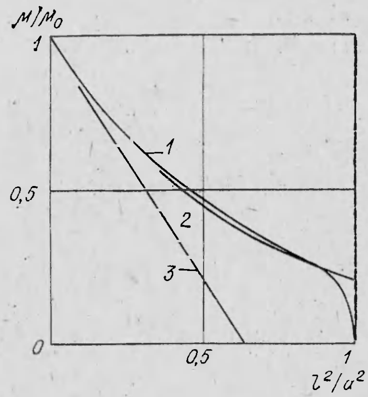
$$\langle\sigma_{yz}\rangle=\mu\langle\varepsilon_{yz}\rangle, \tag{2.3}$$

где μ — макроскопический модуль сдвига трещиноватой среды. Из (2.1)—(2.3) следует

$$\mu/\mu_0=\langle\sigma_{yz}\rangle/\tau_0. \tag{2.4}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Вычисляя $\langle\sigma_{yz}\rangle$, определим из соотношения (2.4) значение μ.

Для среднего напряжения $\langle\sigma_{yz}\rangle$ имеем

$$\langle\sigma_{yz}\rangle = \frac{1}{2ad}\int_S \sigma_{yz}(x, y)\,dxdy, \tag{2.5}$$

где S — основной параллелограмм периодов; $\sigma_{yz}(x, y)$ — микроскопическое распределение напряжений, получаемое из решения двоякопериодической задачи.

Представим $\sigma_{yz}(x, y)$ в виде

$$\sigma_{yz}(x, y) = \tau_0 + \tau(x, y). \tag{2.6}$$

Тогда для $\tau(x, y)$ получаем краевую задачу (1.1), (1.2) при $T(x) = \tau_0$, решение которой дается формулами (1.7)—(1.9). Подставляя значение $\tau(x, y)$ из (1.7) в соотношения (2.4)—(2.6), находим макроскопический модуль сдвига μ. Опуская промежуточные выкладки, приводим конечный ответ для случая $a = d$:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 - \frac{[K^4(1/\sqrt{2}) + a^4P^2(l)]^{1/4}}{K(k_1)}\int_0^1 \frac{tf(t)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)[a^4P^2(l) + K^4(1/\sqrt{2})t^4]}}, \tag{2.7}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), & t^2 < P(l)/\operatorname{Im} e_1, \\ 2K(1/\sqrt{2}) - F(\varphi, 1/\sqrt{2}), & t^2 > P(l)/\operatorname{Im} e_1, \end{cases}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{2tK(1/\sqrt{2})\,a\sqrt{P(l)}}{a^2P(l) + K^2(1/\sqrt{2})\,t^2},$$

$$k_1^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{K^2(1/\sqrt{2})}{\sqrt{K^4(1/\sqrt{2}) + a^4P^2(l)}}\right],$$

$F(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода [15]. Из (2.7) следуют асимптотические выражения при $l \ll a$

$$\mu/\mu_0 \simeq 1 - \pi l^2/2a^2 \tag{2.8}$$

и при $l \to a$

$$\mu/\mu_0 \simeq -C_1/\ln(1 - l^2/a^2),$$

где $C_1 = 0{,}7854$.

Предложенный в [16, 17] подход, основанный на приближенном учете взаимодействия трещин, в случае ромбической решетки трещин при $d = a$ дает для макроскопического модуля сдвига значение

$$\mu/\mu_0 = \exp(-\pi l^2/2a^2). \tag{2.9}$$

Зависимости (2.7), (2.9) и (2.8) приведены на фиг. 3, кривые 1—3 соответственно. Все кривые имеют при $l \ll a$ одинаковое асимптотическое поведение, которое дается формулой (2.8). Зависимость (2.8) аппроксимирует соотношение (2.7) лишь при не слишком больших значениях l^2/a^2. Например, при $l^2/a^2 = 0{,}4$ отличие приближенного выражения (2.8) от точного (2.7) составляет около 30%. Соотношение (2.9) вплоть до значений $l^2/a^2 = 0{,}9$ дает значение μ/μ_0, отличающееся от (2.7) менее чем на 6%. Таким образом, приближенный подход [16, 17] применим с хорошей степенью точности почти до момента полного разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении.— ПМТФ, 1965, № 5.
2. **Кудрявцев Б. А., Партон В. З.** Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972.
3. **Фильштинский Л. А.** Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974.
5. **Delameter W. R., Herrmann G., Barnett D. M.** Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks.— Trans. ASME, ser. E, 1975, vol. 42, N 1.
6. **Саврук М. П.** Двоякопериодическая система трещин продольного сдвига в упругом теле.— ПМ, 1975, т. 11, № 12.
7. **Линьков А. М.** Интегральное уравнение плоской задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезов, нагруженных самоуравновешенными нагрузками.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
8. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Двоякопериодическая задача теории трещин.— Проблемы прочности, 1976, № 12.
9. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976.
10. **Тусупов М. Т., Алдамжаров К. Б.** К решению задачи теории упругости для плоскости с двоякопериодической системой щелей.— Вест. АН КазССР, 1979, № 1.
11. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981.
12. **Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.** О хрупких трещинах продольного сдвига.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
13. **Чибрикова Л. И.** О краевой задаче Римана для автоморфных функций.— Учен. зап. Казанского ун-та, 1956, т. 116, № 4.
14. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
15. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
16. **Вавакин А. С., Салганик Р. Л.** Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями. —Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
17. **Вавакин А. С., Салганик Р. Л.** Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2.

Поступила 10/XII 1983 г.

УДК 550.34

ДАВЛЕНИЕ И ТЕМПЕРАТУРА ПОДЗЕМНЫХ ЖИДКОСТЕЙ КАК ПРЕДВЕСТНИКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Т. К. РАМАЗАНОВ

(Москва)

Накоплено много экспериментального материала [1—5], представляющего интерес для флюидных предвестников землетрясений, проявляющихся в виде гидрогеодинамических и геотермических эффектов. Хорошо известны [4] реакции подземных вод на упругие деформации земной коры, обусловленные приливными силами, и было обнаружено [3] периодическое изменение дебитов самоизливающихся скважин. Указанные реакции напорных пластов приобретают особые значения в связи с прогнозированием землетрясений, поскольку процесс подготовки землетрясений всегда связан с изменениями напряженно-деформированного состояния горных пород.

Попеременные изменения объема насыщенной породы вызывают повышение или снижение уровня жидкости в водоносном горизонте, в котором расположенная система скважин при наличии хороших самописцев уровня представляет собой своеобразный сейсмограф.

В данной работе на основе теории гетерогенных сред дан строгий анализ реакции периодических длинноволновых возмущений напряженного состояния полностью насыщенного жидкостью пласта на возмущения и взаимодействия полей порового давления и температуры. Полученные амплитудно-частотные характеристики напорного пласта могут прогнозировать землетрясения, а также процессы приливов — отливов в твердой оболочке Земли.

1. Пусть матрица полностью насыщенного жидкостью пласта линейно-упругая и жидкость слабосжимаемая. Тогда при малых возмущениях порового давления уравнения неразрывности твердой и жидкой фаз, закон фильтрации и уравнения сохранения энергии каждой фазы линеаризуются. Эти уравнения при равенстве температур