УДК 532.5
DOI: 10.15372/PMTF202215129

АНАЛИЗ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ В НАКЛОННОМ КАНАЛЕ

П. К. Ядав, А. К. Верма

Национальный технологический институт им. Мотилала Неру, Аллахабад, Индия
E-mails: pramodky@mnnit.ac.in, amitverma8627@gmail.com

Исследовано течение электропроводящих несмешивающихся ньютоновских жидкостей с различными вязкостями по наклонному каналу под действием магнитного поля. Течение жидкости в наклонном канале инициировано постоянным градиентом давления и описывается уравнениями Навье — Стокса. Получены аналитические выражения для скорости, расхода жидкости и сдвиговых напряжений на стенке канала. Выполнен анализ влияния различных параметров задачи на характеристики течения.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, несмешивающиеся ньютоновские жидкости, переменная вязкость, число Гартмана, магнитная гидродинамика

Введение. Интерес к исследованию несмешивающихся жидкостей [1, 2] обусловлен их использованием в гидрологии подземных вод, различных промышленных процессах и устройствах и т. д.

В ряде работ исследуется течение несмешивающихся жидкостей в наклонном канале. В [3] изучено движение воды в наклонном канале и определены скорость жидкости и ее расход при различных значениях числа Рейнольдса. В работе [4] исследовано течение вязкой жидкости через горизонтальный слой, находящийся между двумя твердыми плоскостями. В [5] изучено движение двухфазной жидкости под давлением в наклонном канале, в [6] — ламинарное течение вязкой жидкости в открытом наклонном канале. Анализ течения вязкой жидкости в неоднородной пористой среде выполнен в работе [7]. В [8] изучено течение жидкости между двумя изотермическими стенками.

Результаты исследования течения несмешивающихся жидкостей в наклонном канале имеют практическое значение [9]. В работе [10] исследовано течение электропроводящей жидкости с переменной вязкостью при наличии постоянного магнитного поля, в [11] — нестационарное ламинарное течение запыленной проводящей жидкости с переменной вязкостью при наличии магнитного поля. В работах [12, 13] изучалось движение крови с изменяющейся вязкостью в пористых кровеносных сосудах в радиальном направлении. В [14] рассмотрено течение жидкости с переменной вязкостью в эксцентрически вращающемся цилиндре и исследовано влияние чисел Нуссельта, Рейнольдса и других параметров на характеристики течения. В работе [15] исследовался поток смешивающихся жидкостей с переменной вязкостью через капиллярную трубку, расположенную вертикально.

В природе существуют различные электропроводящие жидкости, такие как ртуть, жидкий натрий и т. д. В работе [16] решена двумерная задача о течении вязкой стационарной несжимаемой электропроводящей жидкости, инициированном растяжением трубы. В предположении о постоянных свойствах жидкости в [17] получено аналитическое решение задачи о течении в канале с электроизолированными стенками двух проводящих несмешивающихся ньютоновских жидкостей. Нестационарное течение Куэтта электропроводящей вязкой несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными пластинами под действием постоянного поперечного магнитного поля изучено в работе [18]. В [19] исследовано поведение потока электропроводящей жидкости, протекающего через две горизонтальные пластины, и показано, что решение рассматриваемой задачи имеет большое значение при проектировании магнитогидродинамических (МГД) генераторов. В [20] изучался двухфазный поток несмешивающихся жидкостей в горизонтальном пористом канале. В работе [21] предложена математическая модель МГД-течения микрополярной жидкости в мембране, в [22] решена задача о течении жидкости в пористой среде. В работе [23] выполнено моделирование движения крови в артерии с использованием модели течения двухфазной несмешивающейся микрополярной ньютоновской жидкости под действием магнитного поля. В [24] исследовано течение ньютоновской жидкости через концентрические цилиндры и изучено влияние безразмерных параметров задачи на скорость, расход жидкости и напряжение.

Следует отметить, что вязкость жидкостей зависит от температуры и концентрации. Существует большое количество исследований вязкости, зависящей от температуры, но очень мало исследований вязкости, зависящей от концентрации. Установлено, что концентрация может зависеть от пространственных координат. В работах [25–27] исследовалась зависимость вязкости жидкости от пространственных координат.

В данной работе представлены результаты исследования МГД-течения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с переменной вязкостью по наклонному каналу. Получено аналитическое решение рассматриваемой задачи и проанализировано влияние параметров жидкости на характер ее течения.

1. Математическая формулировка задачи и ее решение. Решается задача о двумерном МГД-течении двух несмешивающихся ньютоновских жидкостей в наклонном канале. Предполагается, что стенки канала находятся на расстоянии друг от друга, равном $2h$, и наклонены к горизонту под углом φ (рис. 1). Предполагается, что направление потока совпадает с направлением оси x, а ось y направлена по нормали к потоку. Направ-

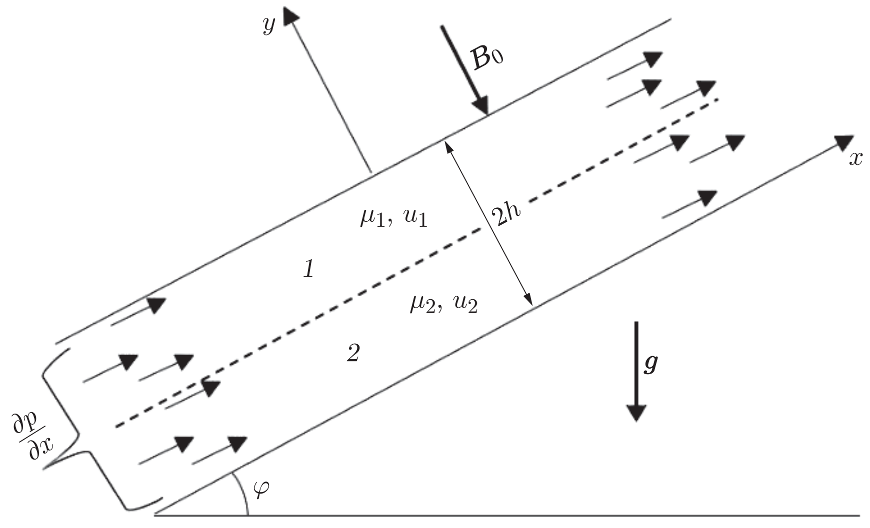

Рис. 1. Схема течения ньютоновской жидкости:
1 — область 1, *2* — область 2

ление магнитного поля совпадает с направлением внутренней нормали к потоку. Течение несмешивающихся жидкостей обусловлено наличием градиента давления на входе в канал. Течение полагается одномерным установившимся и ламинарным. Предполагается, что вязкость жидкости является функцией координаты y.

2. Уравнения задачи. Ниже приведены основные уравнения неразрывности и движения, описывающие МГД-поток ньютоновской жидкости с переменной вязкостью:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0; \tag{1}$$

$$\rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu\,\nabla^2 \boldsymbol{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + (\nabla\mu) \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{f}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность жидкости; μ — вязкость жидкости, являющаяся функцией координаты y; $\boldsymbol{f}$ — вектор внешней силы; $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ — сила Лоренца, индуцированная магнитным полем.

Одномерный поток несмешивающихся ньютоновских жидкостей направлен вдоль оси x (см. рис. 1), т. е. $\boldsymbol{u} = (u(y), 0, 0)$. Пусть $u_1(y)$, $u_2(y)$ — скорости потока в верхней и нижней областях канала соответственно. Течение жидкости в наклонном канале происходит под действием постоянного градиента давления ∇p, действующего в направлении потока, на жидкость действует сила тяжести. Несмешивающиеся жидкости в потоках имеют одинаковую плотность ρ и различные вязкости μ_1, μ_2.

Таким образом, уравнение (2) в областях 1 и 2 записывается в следующем виде:

— в области 1 ($0 \leqslant y \leqslant h$)

$$\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial y} - \sigma B_0^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\varphi = 0; \tag{3}$$

— в области 2 ($-h \leqslant y \leqslant 0$)

$$\mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \sigma B_0^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\varphi = 0 \tag{4}$$

(σ — электропроводность обеих жидкостей; B_0 — интенсивность магнитного поля; φ — угол наклона канала; g — гравитационная сила; $\partial p/\partial x$ — приложенный градиент давления).

Введем следующие безразмерные величины:

$$y^* = \frac{y}{h}, \quad u_1^* = \frac{u_1}{U}, \quad u_2^* = \frac{u_2}{U}, \quad P^* = \frac{h^2}{u_0 U}\,P, \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\mu_0}. \tag{5}$$

Здесь U, μ_0 — характерные скорость и вязкость соответственно; $P = \partial p/\partial x$ — постоянный градиент давления, одинаковый в обеих областях течения.

В безразмерных переменных уравнения (3), (4) записываются в следующем виде:

— в области 1 ($0 \leqslant y \leqslant 1$)

$$\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \frac{d\mu_1}{dy}\frac{du_1}{dy} - \mathrm{H}^2 u_1 - \alpha = 0; \tag{6}$$

— в области 2 ($-1 \leqslant y \leqslant 0$)

$$\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} + \frac{d\mu_2}{dy}\frac{du_2}{dy} - \mathrm{H}^2 u_2 - \alpha = 0. \tag{7}$$

Здесь $\alpha = P + \mathrm{G}\sin\varphi$; $\mathrm{G} = h^2\rho g/(\mu_0 U)$ — параметр гравитации; $\mathrm{H} = \sqrt{\sigma B_0^2 h^2/\mu_0}$ — число Гартмана.

3. Краевые условия. В настоящей работе используются следующие краевые условия и условия сопряжения на границе между областями:

— условия непроскальзывания:

$$y = h\colon \quad u_1 = 0, \qquad y = -h\colon \quad u_2 = 0; \tag{8}$$

— условия непрерывности скоростей и напряжений сдвига на границе раздела между областями 1 и 2:

$$y = 0\colon \quad u_1 = u_2, \qquad \tau_1 = \tau_2. \tag{9}$$

В безразмерных переменных условия (8), (9) записываются следующим образом:

$$u_1(1) = 0, \quad u_1(-1) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0), \quad \mu_1 \frac{du_1}{dy}\Big|_{y=0} = \mu_2 \frac{du_2}{dy}\Big|_{y=0}. \tag{10}$$

4. Решение задачи. Ниже приводится решение задачи для двух случаев.

Случай 1. Для вязкости ньютоновской жидкости в верхней и нижней областях канала принимаются зависимости $\mu_1 = 1 - \xi y^2$ и $\mu_2 = 1 - \eta y^2$ соответственно [10], где $0 < \xi < 1$ и $0 < \eta < 1$ — вещественные параметры.

Уравнения Навье — Стокса (6), (7) записываются следующим образом:

— в области 1 ($0 \leqslant y \leqslant 1$)

$$(1 - \xi y^2) \frac{d^2 u_1}{dy^2} - 2\xi y \frac{du_1}{dy} - \mathrm{H}^2 u_1 = \alpha; \tag{11}$$

— в области 2 ($-1 \leqslant y \leqslant 0$)

$$(1 - \eta y^2) \frac{d^2 u_2}{dy^2} - 2\eta y \frac{du_2}{dy} - \mathrm{H}^2 u_2 = \alpha. \tag{12}$$

Случай 2. Для вязкости ньютоновской жидкости в верхней и нижней областях канала принимаются зависимости $\mu_1 = 1 + \xi y^2$ и $\mu_2 = 1 + \eta y^2$ соответственно, где $0 < \xi < 1$; $0 < \eta < 1$.

Уравнения Навье — Стокса (6), (7) записываются в следующем виде:

— в области 1 ($0 \leqslant y \leqslant 1$)

$$(1 + \xi y^2) \frac{d^2 u_1'}{dy^2} + 2\xi y \frac{du_1'}{dy} - \mathrm{H}^2 u_1' = \alpha; \tag{13}$$

— в области 2 ($-1 \leqslant y \leqslant 0$)

$$(1 + \eta y^2) \frac{d^2 u_2'}{dy^2} + 2\eta y \frac{du_2'}{dy} - \mathrm{H}^2 u_2' = \alpha. \tag{14}$$

На основе решения уравнений (11), (12) и (13), (14) были определены скорости жидкости в областях 1 и 2 для двух законов распределения вязкости.

4.1. *Определение скорости.* В области 1 выражения для скорости жидкости для случаев 1 и 2 имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(y) &= C_1 P_{\frac{\sqrt{\xi - 4\mathrm{H}^2} - \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}} (y\sqrt{\xi}) + C_2 Q_{\frac{\sqrt{\xi - 4\mathrm{H}^2} - \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}} (y\sqrt{\xi}) - \frac{\alpha}{\mathrm{H}^2}, \\ u_1'(y) &= C_3' P_{\frac{\sqrt{\xi + 4\mathrm{H}^2} - \sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}} (y\sqrt{\xi}) + C_4' Q_{\frac{\sqrt{\xi + 4\mathrm{H}^2} - \sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}} (y\sqrt{\xi}) - \frac{\alpha}{\mathrm{H}^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

в области 2 — вид

$$
\begin{aligned}
u_2(y) &= C_3 P_{\frac{\sqrt{\eta-4\mathrm{H}^2}-\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}}(y\sqrt{\eta}) + C_4 Q_{\frac{\sqrt{\eta-4\mathrm{H}^2}-\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}}(y\sqrt{\eta}) - \frac{\alpha}{\mathrm{H}^2},\\
u_2'(y) &= C_3' P_{\frac{\sqrt{\eta+4\mathrm{H}^2}-\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}}(iy\sqrt{\eta}) + C_4' Q_{\frac{\sqrt{\eta+4\mathrm{H}^2}-\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}}}(iy\sqrt{\eta}) - \frac{\alpha}{\mathrm{H}^2}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

В (15), (16) P, Q — полиномы Лежандра первого и второго рода, степень которых отмечена нижним индексом; $C_1, \ldots, C_4$, $C_1', \ldots, C_4'$ — произвольные константы, которые были определены с использованием краевых условий (10) и пакета MATHEMATICA.

4.2. *Расход жидкости.* Расход жидкости при ее течении по наклонному каналу вычисляется по формуле

$$
Q_1 = \int\limits_0^1 u_1\,dy + \int\limits_{-1}^0 u_2\,dy,
$$

где u_1, u_2 — скорости жидкости в областях 1 и 2 соответственно.

4.3. *Напряжения сдвига на стенках канала.* Выражение для напряжения сдвига на верхней стенке имеет вид

$$
\tau_{w_1} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{y=1} = (1 - \xi y^2)\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{y=1},
$$

на нижней стенке — вид

$$
\tau_{w_2} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=-1} = (1 - \eta y^2)\,\frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=-1}.
$$

5. Результаты исследования и их обсуждение. Исследовано влияние различных безразмерных параметров задачи на скорость, расход жидкости и напряжение сдвига на стенках канала. Значения безразмерных параметров взяты из ранее опубликованных работ: значение градиента давления — из работы [28], значение вязкости — из работы [10], значения числа Гартмана, характеризующего магнитное поле, — из работ [29, 30].

На рис. 2 приведено распределение скорости жидкости в наклонном канале при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, $\varphi = 60^\circ$ и различных значениях параметра гравитации G. Видно, что в обоих случаях скорость жидкости уменьшается при увеличении параметра гравитации. Это обусловлено тем, что сила гравитации действует в направлении, противоположном направлению потока. Аналогичное поведение жидкости описано в работе [7].

На рис. 3 показано распределение скорости жидкости при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, $\mathrm{G} = 2$ и различных углах наклона канала φ. Скорость жидкости уменьшается при увеличении угла наклона канала φ при обоих законах распределения вязкости. Аналогичное поведение жидкости описано в работе [31].

На рис. 4, 5 приведены распределения скорости при различных значениях параметров ξ и η соответственно. При увеличении параметров вязкости в случае 1 скорость несмешивающихся жидкостей в обеих областях увеличивается, в случае 2 уменьшается. В случае 1 при увеличении параметра вязкости вязкость в обеих областях стремится к нулю, что приводит к увеличению скорости несмешивающейся жидкости в этих областях. В случае 2 при увеличении параметра вязкости вязкость в обеих областях увеличивается, что приводит к уменьшению скорости жидкости в них. Эти результаты согласуются с результатами, полученными в работе [10].

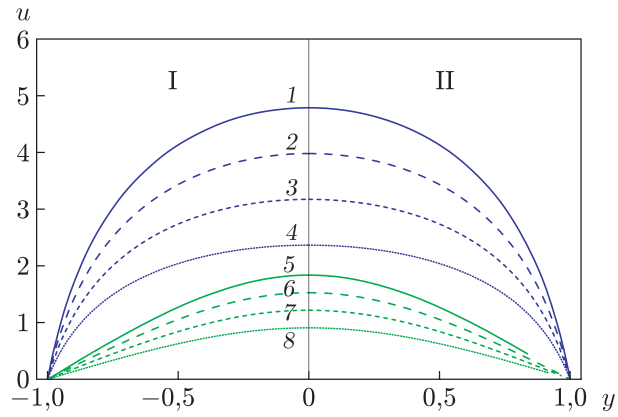

Рис. 2

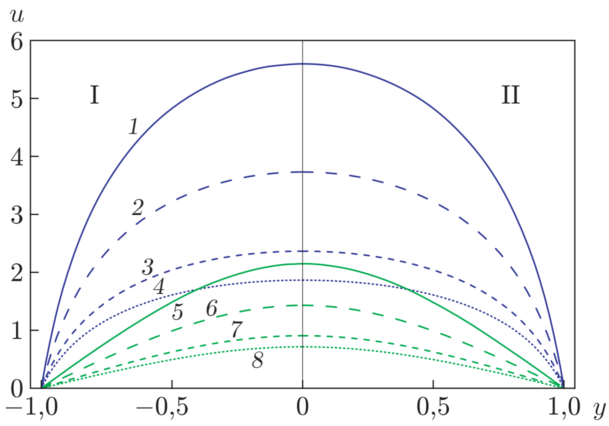

Рис. 3

Рис. 2. Распределение скорости жидкости в наклонном канале при H = 0,2, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, $\varphi = 60^\circ$ и различных значениях параметра гравитации G:
I — область 1, II — область 2; *1–4* — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — G = 1, *2, 6* — G = 2, *3, 7* — G = 3, *4, 8* — G = 4

Рис. 3. Распределение скорости жидкости в наклонном канале при H = 0,2, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, G = 2 и различных углах наклона канала φ:
I — область 1, II — область 2; *1–4* — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — $\varphi = 0$, *2, 6* — $\varphi = 30^\circ$, *3, 7* — $\varphi = 60^\circ$, *4, 8* — $\varphi = 90^\circ$

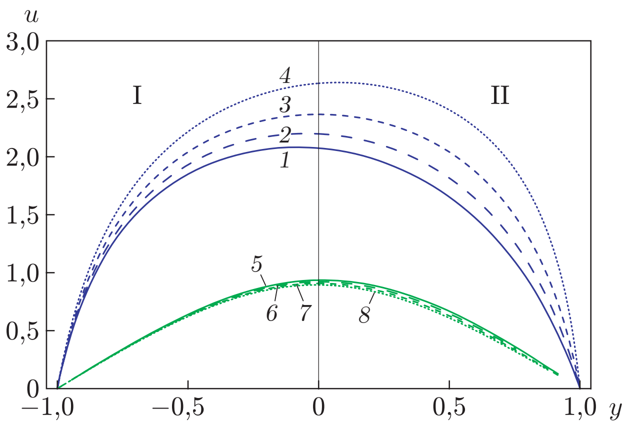

Рис. 4

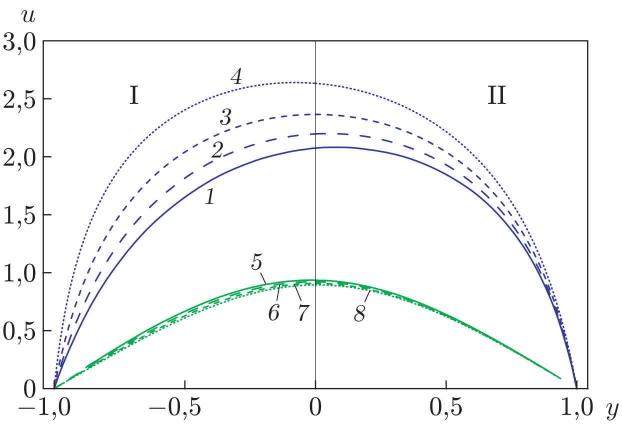

Рис. 5

Рис. 4. Распределение скорости жидкости в наклонном канале при H = 0,2, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, G = 2, $\varphi = 60^\circ$ и различных значениях параметра ξ:
I — область 1, II — область 2; *1–4* — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — $\xi = 0{,}6$, *2, 6* — $\xi = 0{,}7$, *3, 7* — $\xi = 0{,}8$, *4, 8* — $\xi = 0{,}9$

Рис. 5. Распределение скорости жидкости в наклонном канале при H = 0,2, $P = -10$, $\xi = 0{,}8$, G = 2, $\varphi = 60^\circ$ и различных значениях параметра η:
I — область 1, II — область 2; *1–4* — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — $\eta = 0{,}6$, *2, 6* — $\eta = 0{,}7$, *3, 7* — $\eta = 0{,}8$, *4, 8* — $\eta = 0{,}9$

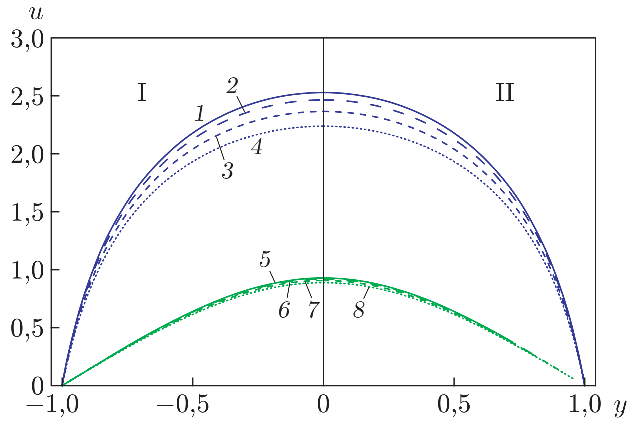

Рис. 6

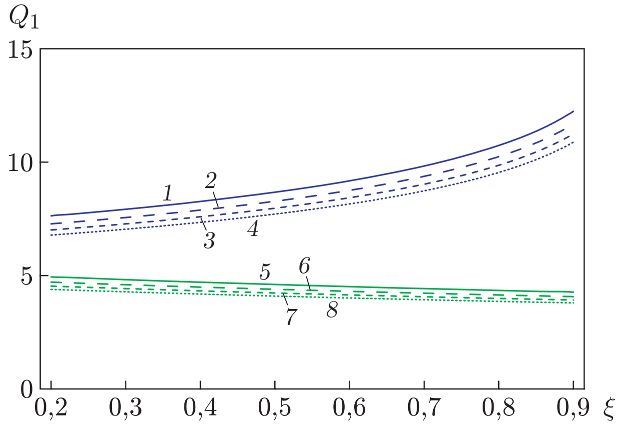

Рис. 7

Рис. 6. Распределение скорости жидкости в наклонном канале при $\varphi = 60°$, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, $\mathrm{G} = 2$ и различных значениях параметра H:
I — область 1, II — область 2; *1–4* — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — $\mathrm{H} = 0{,}1$, *2, 6* — $\mathrm{H} = 0{,}2$, *3, 7* — $\mathrm{H} = 0{,}3$, *4, 8* — $\mathrm{H} = 0{,}4$

Рис. 7. Зависимость расхода жидкости от параметра ξ при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\eta = 0{,}5$, $\mathrm{G} = 2$ и различных значениях угла наклона канала φ:
1–4 — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — $\varphi = 0$, *2, 6* — $\varphi = 30°$, *3, 7* — $\varphi = 60°$, *4, 8* — $\varphi = 90°$

На рис. 6 представлено распределение скорости при $\varphi = 60°$, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}8$, $\mathrm{G} = 2$ и различных значениях параметра H. С увеличением числа Гартмана H скорость ньютоновской жидкости в канале в обоих случаях уменьшается. В случае 2 число Гартмана оказывает менее существенное влияние на профиль скорости, чем в случае 1. Этот результат согласуется с результатами, полученными в работах [12, 23]. Скорость несмешивающихся ньютоновских жидкостей достаточно высока при изменении вязкости в областях 1 и 2 по законам $\mu = 1 - \xi y^2$ и $\mu = 1 - \xi y^2$ соответственно и минимальна при изменении вязкости в областях 1 и 2 по законам $\mu = 1 + \xi y^2$ и $\mu = 1 + \eta y^2$ соответственно.

На рис. 7 приведены зависимости расхода жидкости от параметра ξ при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\eta = 0{,}5$, $\mathrm{G} = 2$ и различных значениях угла наклона канала φ. С увеличением параметра ξ расход жидкости увеличивается при изменении вязкости по закону, соответствующему случаю 1, и уменьшается при изменении вязкости по закону, соответствующему случаю 2. Расход жидкости уменьшается с увеличением угла наклона канала φ.

На рис. 8 показаны зависимости расхода жидкости от параметра гравитации G при $P = -10$, $\eta = 0{,}5$, $\xi = 0{,}8$, $\varphi = 60°$ и различных значениях параметра H. Из приведенных зависимостей следует, что с увеличением числа Гартмана расход жидкости уменьшается.

На рис. 9 представлена зависимость напряжения сдвига на верхней стенке канала от параметров η и ξ при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\varphi = 60°$, $\mathrm{G} = 4$. Напряжение сдвига на верхней стенке канала можно уменьшить путем уменьшения вязкости несмешивающихся ньютоновских жидкостей в области 1. Напряжение сдвига на стенке максимально при минимальном значении η.

В табл. 1 приведены значения напряжения сдвига на верхней стенке канала при различных значениях параметров H и ξ. Из результатов, приведенных в табл. 1, следует, что напряжение сдвига верхней стенки можно уменьшить за счет увеличения напряженности магнитного поля. В случае если число Гартмана и параметр вязкости равны нулю, напряжение сдвига на стенке максимально.

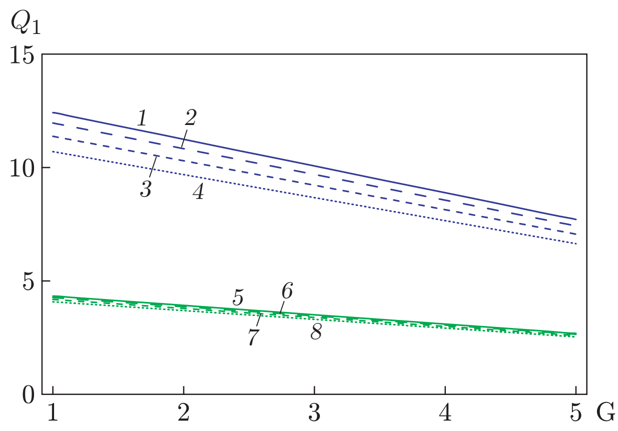

Рис. 8

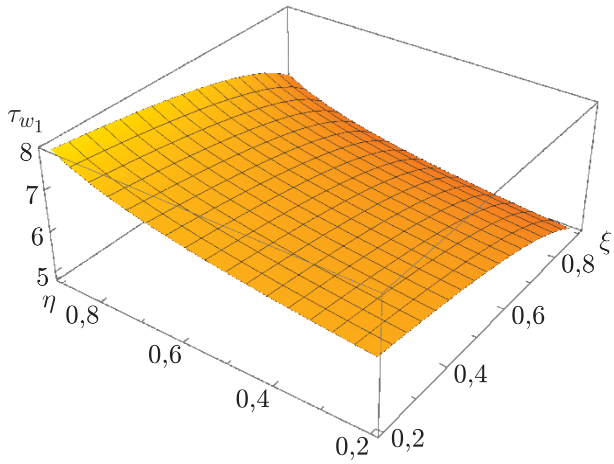

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость расхода жидкости от параметра гравитации G при $P = -10$, $\eta = 0{,}5$, $\xi = 0{,}8$, $\varphi = 60°$ и различных значениях параметра H:
1–4 — случай 1, *5–8* — случай 2; *1, 5* — H = 0,2, *2, 6* — H = 0,3, *3, 7* — H = 0,4, *4, 8* — H = 0,5

Рис. 9. Зависимость напряжения сдвига на верхней стенке канала τ_{w_1} от параметров η и ξ при H = 0,2, $P = -10$, $\varphi = 60°$, G = 4

Таблица 1

Значения напряжения сдвига на верхней стенке канала при G = 2, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\varphi = 60°$ и различных значениях числа Гартмана H и параметра ξ

H	τ_{w_1}			
	$\xi = 0{,}2$	$\xi = 0{,}4$	$\xi = 0{,}6$	$\xi = 0{,}8$
0,1	7,207 384 432	7,028 636 880	6,486 156 867	5,976 413 386
0,2	7,081 526 924	6,897 841 319	6,341 854 423	5,821 760 575
0,3	6,882 723 221	6,691 825 344	6,116 582 180	5,582 428 827
0,4	6,625 235 637	6,426 061 869	5,829 570 990	5,281 159 376
0,5	6,325 427 992	6,118 124 664	5,501 981 520	4,942 212 618

В табл. 2 приведены значения напряжения сдвига на нижней стенке канала при различных значениях параметров H и ξ. Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что при изменении вязкости по закону, соответствующему случаю 2, сдвиговое напряжение на верхней стенке канала τ_{w_2} увеличивается при уменьшении числа Гартмана. При изменении вязкости по закону, соответствующему случаю 1, зависимость напряжения сдвига на нижней стенке канала от параметров ξ, η является обратной соответствующей зависимости на верхней стенке канала (рис. 10).

Заключение. Проведено исследование поведения несмешивающихся ньютоновских жидкостей с различной вязкостью при их течении по наклонному каналу под действием постоянного магнитного поля. Получены следующие результаты.

Параметр гравитации G и угол наклона канала φ можно использовать для уменьшения расхода несмешивающихся ньютоновских жидкостей с различной вязкостью в наклонном канале.

Таблица 2

Значения напряжения сдвига на нижней стенке канала при $\mathrm{G} = 2$, $P = -10$, $\eta = 0{,}8$, $\varphi = 60^\circ$ и различных значениях числа Гартмана H и параметра ξ

H	τ_{w_2}			
	$\xi = 0{,}2$	$\xi = 0{,}4$	$\xi = 0{,}6$	$\xi = 0{,}8$
0,1	6,372 533	6,425 142 76	6,520 897 3	6,564 709 93
0,2	6,326 001	6,379 329 33	6,476 403 3	6,520 824 60
0,3	6,250 275	6,304 737 40	6,403 900 4	6,449 287 29
0,4	6,147 923	6,203 853 13	6,305 724 9	6,352 367 09
0,5	6,022 238	6,079 863 83	6,184 880 6	6,232 985 50

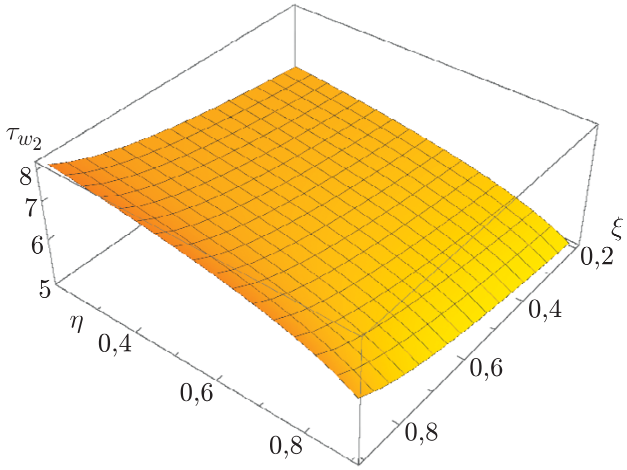

Рис. 10. Зависимость напряжения сдвига на нижней стенке канала τ_{w_2} от параметров η и ξ при $\mathrm{H} = 0{,}2$, $P = -10$, $\varphi = 60^\circ$, $\mathrm{G} = 4$

Число Гартмана H оказывает менее существенное влияние на напряжение сдвига на стенке канала по сравнению с углом наклона канала.

Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для уменьшения мощности при извлечении одной жидкости из канала путем заливки в него другой жидкости с другой вязкостью [32], а также при разработке методов транспортировки нефти, при изучении движения подземных вод и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Devakar M., Raje A., Kumar S.** Numerical study on an unsteady flow of an immiscible micropolar fluid sandwiched between Newtonian fluids through a channel // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 6. P. 980–991.
2. **Srinivas J., Ramana Murthy J. V.** Thermal analysis of a flow of immiscible couple stress fluids in channel // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2016. V. 57, N 6. P. 997–1005.
3. **Jeffreys H.** The flow of water in an inclined channel of rectangular section // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1925. V. 49, N 293. P. 793–807.
4. **Zhuravleva E. N.** Viscous fluid flow in a layer with a free boundary // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2022. V. 63, N 3. P. 383–391.
5. **Matar O. K., Sisoev G. M., Lawrence C. J.** Two-layer flow with one viscous layer in inclined channels // Math. Modell. Natur. Phenomena. 2008. V. 3, N 1. P. 126–148.

6. **Prakash S.** Liquid flowing down an open inclined channel // Indian J. Pure Appl. Math. 1970. V. 2. P. 1093–1109.
7. **Yadav P. K., Singh P., Tiwari A., Deo S.** Stokes flow through a membrane built up by non-homogeneous porous cylindrical particles // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 5. P. 816–826.
8. **Makinde O. D., Gbolagade A. W.** Second law analysis of incompressible viscous flow through an inclined channel with isothermal walls // Roman. J. Phys. 2005. V. 50, N 9/10. P. 923–930.
9. **Goncharenko B. N., Urintsev A. L.** Stability of flow of a viscous liquid down an inclined plane // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1975. V. 16, N 2. P. 293–296.
10. **Verma V. K., Datta S.** Magnetohydrodynamic flow in a channel with varying viscosity under transverse magnetic field // Adv. Theor. Appl. Mech. 2010. V. 3, N 2. P. 53–66.
11. **Attia H. A.** Unsteady flow of a dusty conducting fluid between parallel porous plates with temperature dependent viscosity // Turkish J. Phys. 2005. V. 29, N 4. P. 257–267.
12. **Tiwari A., Chauhan S. S.** Effect of varying viscosity on a two-layer model of the blood flow through porous blood vessels // Europ. Phys. J. Plus. 2019. V. 134, N 1. P. 1–41.
13. **Tiwari A., Chauhan S. S.** Effect of varying viscosity on two-layer model of pulsatile flow through blood vessels with porous region near walls // Transport Porous Media. 2019. V. 129, N 3. P. 721–741.
14. **Dai R. X., Dong Q., Szeri A. Z.** Flow of variable viscosity fluid between eccentric rotating cylinders // Intern. J. Non-linear Mech. 1992. V. 27, N 3. P. 367–389.
15. **Meiburg E., Vanaparthy S. H., Payr M. D., Wilhelm D.** Density-driven instabilities of variable-viscosity miscible fluids in a capillary tube // Ann. NY Acad. Sci. 2004. V. 1027, N 1. P. 383–402.
16. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Magnetohydrodynamic (MHD) flow and heat transfer due to a stretching cylinder // Energy Convers. Management. 2008. V. 49, N 11. P. 3265–3269.
17. **Prathap K., Umavathi J. C.** Dispersion of a solute in Hartmann two-fluid flow between two parallel plates // Applicat. Appl. Math. 2013. V. 8, N 2. P. 436–464.
18. **Attia H. A., Al-Kaisy A. M. A., Ewis K. M.** MHD Couette flow and heat transfer of a dusty fluid with exponential decaying pressure gradient // J. Appl. Sci. Engng. 2011. V. 14, N 2. P. 91–96.
19. **Manyonge W. A., Kiema D. W., Iyaya C. C. W.** Steady MHD Poiseuille flow between two infinite parallel porous plates in an inclined magnetic field // Intern. J. Pure Appl. Math. 2012. V. 76, N 2. P. 661–668.
20. **Yadav P. K., Jaiswal S.** Influence of an inclined magnetic field on the Poiseuille flow of immiscible micropolar Newtonian fluids in a porous medium // Canad. J. Phys. 2018. V. 96, N 9. P. 1016–1028.
21. **Yadav P. K., Jaiswal S., Puchakatla J. Y.** Micropolar fluid flow through the membrane composed of impermeable cylindrical particles coated by porous layer under the effect of magnetic field // Math. Methods Appl. Sci. 2020. V. 43, N 4. P. 1925–1937.
22. **Madasu K. P., Bucha T.** Effect of magnetic field on the slow motion of a porous spheroid: Brinkman's model // Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91, N 4. P. 1739–1755.
23. **Jaiswal S., Yadav P. K.** A micropolar-Newtonian blood flow model through a porous layered artery in the presence of a magnetic field // Phys. Fluids. 2019. V. 31, N 7. 071901.
24. **Yadav P. K., Verma A. K.** Analysis of immiscible Newtonian and non-Newtonian micropolar fluid flow through porous cylindrical pipe enclosing a cavity // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135, N 8. P. 1–35.

25. **Shukla J. B., Parihar R. S., Rao B. R. P., Gupta S. P.** Effects of peripheral-layer viscosity on peristaltic transport of a bio-fluid // J. Fluid Mech. 1980. V. 97, N 2. P. 225–237.
26. **Haber S., Brenner H.** Inhomogeneous viscosity fluid flow in a wide-gap Couette apparatus: Shear-induced migration in suspensions // Phys. Fluids. 2000. V. 12, N 12. P. 3100–3111.
27. **Thiele M.** Stationary transverse diffusion in a horizontal porous medium boundary-layer flow with concentration-dependent fluid density and viscosity // Transport Porous Media. 1999. V. 36. P. 341–355.
28. **Murthy J. R., Srinivas J.** Second law analysis for poiseuille flow of immiscible micropolar fluids in a channel // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 65. P. 254–264.
29. **Jangili S., Murthy J.** Thermodynamic analysis for the MHD flow of two immiscible micropolar fluids between two parallel plates // Frontiers Heat Mass Transfer. 2015. V. 6, N 1. P. 1–11.
30. **Nezhad A., Shahri M.** Entropy generation case studies of two-immiscible fluids under the influence of a uniform magnetic field in an inclined channel // J. Mech. 2016. V. 32, N 6. P. 749–757.
31. **Malashetty M. S., Umavathi J. C., Kumar J. P.** Two fluid flow and heat transfer in an inclined channel containing porous and fluid layer // Heat Mass Transfer. 2004. V. 40. P. 871–876.
32. **Shail R.** On laminar two-phase flows in magnetohydrodynamics // Intern. J. Engng Sci. 1973. V. 11, N 10. P. 1103–1108.

Поступила в редакцию 22/IV 2022 г.,
после доработки — 18/I 2023 г.
Принята к публикации 27/II 2023 г.