Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

УДК 532.516.539.3

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЗОВАННОЙ ФОРМЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Наблюдающееся в последние годы повышение интереса к изучению свободных конвективных структур обусловлено тем, что этот характерный тип течений, возникающих под действием сравнительно малых сил плавучести, вызванных малыми различиями в плотности жидкости, находящейся в поле массовых сил, часто встречается в природных условиях и технологических процессах. Именно термоконцентрационной конвекцией вызывается образование пространственно-регулярной по глубине тонкой структуры океана, атмосферы планет и звезд, мантии Земли и других геофизических систем [1]. Конвективные течения часто пространственно упорядочены и в горизонтальном направлении. Масштабы структур меняются в чрезвычайно широких пределах от нескольких миллиметров в лаборатории до десятков тысяч километров в атмосфере Солнца. Картина течения зависит от геометрии и размерности источника, стратификации среды [2, 3]. В однородной среде струя над точечным источником тепла вначале может быть ламинарной, а на некоторой высоте теряет устойчивость и турбулизируется. В температурно-стратифицированной среде нагретые частицы проходят горизонт нейтральной плавучести, а затем тормозятся и опускаются на него, формируя характерную грибовидную струю [4]. В среде с устойчивой стратификацией примеси наблюдаются два основных типа структур — вытянутые по горизонтали ячейки, разделенные высокоградиентными прослойками («термохалинная лестница») [1, 4], и ячейки, вытянутые по вертикали («солевые пальцы») [4]. Описание типов конвективных структур дано в [1, 4], а теория тепло- и массопереноса при конвекции приведена в [2].

Экспериментальные исследования конвекции над локализованным (точечным) источником [5, 6] и протяженным (линейным) источником [7] показали, что внутри ячеек также присутствуют «солевые пальцы». Это чрезвычайно затрудняет создание адекватных теоретических моделей, в которых нужно учитывать нелинейность уравнения состояния среды, эффекты Соре и Дюфо, перенос примесей и тепла, зависимости кинетических коэффициентов среды и коэффициентов теплового расширения и солевого сжатия от параметров состояния.

Для изучения основных закономерностей конвекции уравнения движения обычно записываются в приближении Буссинеска и дополнительно упрощаются согласно выбранной модели процесса. При этом часто предполагается постоянство коэффициента вовлечения [8, 9] и используются линеаризованные системы [10, 11].

При анализе системы нелинейных нестационарных уравнений со сложными граничными условиями необходимо применять достаточно мощные математические методы. Одним из них является теоретико-групповой анализ, позволяющий изучить инвариантные свойства системы уравнений термоконцентрационной конвекции. По-видимому, работа [12] —

одна из первых попыток такого анализа. В ней изучались только кристаллографические группы симметрий, допускаемые системой уравнений термоконцентрационной конвекции. Полный групповой анализ уравнений проводился в [13], на основе которого были получены зависимости масштабов возникающих динамических структур от мощности, выделяемой источником тепла. В то же время в [12, 13] нет ответов на многие вопросы, возникающие при исследовании термоконцентрационной конвекции.

Цель данной работы — вывод частично симметризованной формы исходной нелинейной нестационарной системы уравнений конвекции, более удобной для применения методов группового анализа, чтобы определить инвариантные свойства и выявить зависимости пространственно-временных масштабов течений в форме, допускающей непосредственное сравнение с экспериментом.

Постановка задачи. Система уравнений термоконцентрационной конвекции многокомпонентной среды в приближении Буссинеска имеет вид [14]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}\left(\sum_i \beta_i S_i - \alpha T\right),$$

$$\frac{\partial \bar{S}_i}{\partial t} + \nabla\cdot(S_i\mathbf{u}) = k_i\Delta S_i + H_i(\mathbf{R},t), \qquad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla T = \chi\Delta\bar{T} + F(\mathbf{R},t),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \rho_0\sum_i \beta_i H_i(\mathbf{R},t), \quad \rho = \rho_0\left(1 + \sum_i \beta_i\bar{S}_i - \alpha\bar{T}\right), \quad \bar{S}_i = S_{0i}(z) + S_i, \tag{1}$$

$$\bar{T} = T_0(z) + T, \qquad S_{0i}(z) = S_{0i}\left(1 - \frac{z}{\Lambda_i}\right), \qquad T_0(z) = T_0\left(1 + \frac{z}{\Lambda_T}\right).$$

Здесь p — давление за вычетом гидростатического давления, нормированное на ρ_0; ρ, ρ_0 — полная плотность среды и плотность среды при отсутствии примесей; $\mathbf{u}$ — поле скоростей; $\bar{T}$, $T_0(z)$ и T — полная, стратифицирующая и избыточная температуры; $\bar{S}_i$, $S_{0i}(z)$ и S_i — полная, стратифицирующая и добавочная концентрации i-й примеси; ν, χ, k_i — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии i-й примеси; α, β_i — коэффициенты температурного расширения и солевого сжатия i-й примеси; $F(\mathbf{R},t)$, $H_i(\mathbf{R},t)$ — источники тепла и i-й примеси.

Так как цель работы — групповой анализ системы (1), то начальные и граничные условия можно пока не оговаривать.

Основной вклад в перенос температуры и примесей за счет конвективных членов $\mathbf{u}\nabla T$ и $\mathbf{u}\nabla S_i$ дает соленоидальная часть поля скоростей. Поэтому удобно разделить $\mathbf{u}$ на потенциальную и соленоидальную составляющие. Просто положить равной нулю потенциальную составляющую скорости нельзя, так как она описывает расширение элемента среды и, таким образом, приводит к появлению сил плавучести, участвующих в формировании конвективного течения. Линейная комбинация части уравнений системы (1) (без использования уравнения Навье — Стокса) с учетом того, что в реальных ситуациях $\alpha\bar{T} \ll 1$, дает

$$\nabla\cdot\mathbf{u} \approx \Delta\left(\chi\alpha T - \sum_i \beta_i S_i\right) + \alpha F. \tag{2}$$

Используя (2), можно от исследования (решения) системы (1) перейти к исследованию (решению) приближенной системы, в которой уравнение непрерывности заменено на уравнение $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Тогда решение (1) сведется к последовательному решению приближенной системы с последующей подстановкой в (2) необходимых распределений температуры и примесей и определением потенциальной части поля скоростей. Сумма решений приближенной системы и уравнения (2) дает приближенное решение системы (1).

Следующим шагом при подготовке системы (1) к анализу является предварительная симметризация записи уравнений термоконцентрационной конвекции по отношению к переменным T и S_i.

Введение обобщенных возмущений плотности. В ряде работ [2, 13, 14] выделялись комбинации вида $\beta S - \alpha T$, $\chi\beta S - k_S\alpha T$, $\chi\alpha T - k_S\beta S$ и т. п. Можно заметить, что первая комбинация входит в уравнение Навье — Стокса системы (1), а третья — в соотношение (2). Переход от системы переменных (T, S) к системе из двух каких-либо упомянутых комбинаций приводит помимо изменения формы записи фундаментальных уравнений и к появлению комбинаций типа $\chi^2\alpha T - k_S^2\beta S$, $k_S^2\alpha T - \chi^2\beta S$ и т. д. В результате этого возникает возможность перейти к какой-то новой, более сложной паре (или системе в случае многокомпонентных сред) комбинаций физических полей. При этом нет никакой гарантии, что выбранные в качестве основных комбинации являются наиболее оптимальными. При всем изобилии вариаций все же имеется возможность с помощью единого подхода описать все реально возникающие комбинации. Достигается это путем введения обобщенных возмущений плотности.

Для начала рассмотрим комбинации вида

$$m_\lambda = \alpha T \left(\frac{\chi^N}{\prod\limits_{i=1}^{N} k_i} \right)^{\lambda/(N+1)} - \sum_{j=1}^{N} \beta_j S_j \left(\frac{k_j^N}{\chi \prod\limits_{i\neq j}^{N} k_i} \right)^{\lambda/(N+1)} \tag{3}$$

(λ — произвольное число). При этом выполняется соотношение

$$\varphi_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_N\lambda_{N+1}} m_{\lambda_{N+2}} \pm \varphi_{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{N+1}\lambda_{N+2}} m_{\lambda_1} + \\ + \varphi_{\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_{N+2}\lambda_1} m_{\lambda_2} \pm \ldots + \varphi_{\lambda_{N+2}\lambda_1\ldots\lambda_N} m_{\lambda_{N+1}} = 0, \tag{4}$$

где

$$\varphi_{\lambda_i\lambda_j\ldots\lambda_k\lambda_n} = \det \begin{vmatrix} \mu^{\lambda_i} & \mu_1^{\lambda_i} & \ldots & \mu_N^{\lambda_i} \\ \mu^{\lambda_j} & \mu_1^{\lambda_j} & \ldots & \mu_N^{\lambda_j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu^{\lambda_n} & \mu_1^{\lambda_n} & \ldots & \mu_N^{\lambda_n} \end{vmatrix};$$

$$\mu = \left(\frac{\chi^N}{\prod\limits_{i=1}^{N} k_i} \right)^{1/(N+1)}; \quad \mu_j = \left(\frac{k_j^N}{\chi \prod\limits_{i\neq j}^{N} k_i} \right)^{1/(N+1)}.$$

Отличительной чертой комбинаций (3) является то, что они описывают всевозможные комбинации T и S_i, получающиеся в системе (1) при линейной комбинации ее уравнений. Если значение N нечетное, то в (4) берутся только знаки $+$, а если четное, то знаки чередуются. Матрица, составленная из элементов $\varphi_{\lambda_i\lambda_j\ldots\lambda_n}$, антисимметрична, т. е. при четной перестановке индексов элемент матрицы не меняет знака, а при нечетной — меняет. Если хотя бы два индекса совпадают, то элемент равен нулю.

Из (4) видно, что, выбрав произвольно $N+1$ значение индекса λ, получим систему для $N+1$ функций $\{m_\lambda\}$, с помощью которых можно описать любое обобщенное возмущение плотности. Не конкретизируя значения выбираемых λ_i, можно с помощью (3) выразить температуру и концентрации примесей через систему $\{m_\lambda\}$, подставить в систему (1) и получить такую форму уравнений термоконцентрационной конвекции, в которой в самом общем виде присутствует любая комбинация T и S_i, но при этом нет конкретизации, которую можно провести после решения системы общего вида.

Частично симметризованная система уравнений термоконцентрационной конвекции в среде с одной примесью. Не так уж сложно произвести переход в системе (1) от переменных T, $\{S_i\}$ к переменным $\{m_\lambda\}$, используя соотношение (3). Но в случае больших N это приводит к громоздким выкладкам, поэтому для простоты рассматривается среда только с одной примесью — соленостью. Тогда система обобщенных возмущений плотности имеет вид

$$m_\lambda = (\chi/k_S)^{\lambda/2}\,\alpha T - (k_S/\chi)^{\lambda/2}\,\beta S$$

(k_S — коэффициент диффузии соли).

Выбрав две функции m_γ, m_δ с произвольными индексами γ и δ, выразив через них T и S и подставив результат в приближенный вариант системы (1), получим систему уравнений вида

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}\,(a_\gamma m_\gamma + a_\delta m_\delta)\,,\\
\frac{\partial m_\gamma}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla m_\gamma + w\left(\frac{T^\gamma}{\Lambda_T} + \frac{S^\gamma}{\Lambda_S}\right) = k_\gamma \Delta m_\gamma + k_{\delta\gamma}\Delta m_\delta + Q_\gamma,\\
\frac{\partial m_\delta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla m_\delta + w\left(\frac{T^\delta}{\Lambda_T} + \frac{S^\delta}{\Lambda_S}\right) = k_\delta \Delta m_\delta + k_{\gamma\delta}\Delta m_\gamma + Q_\delta,\\
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$; Λ_T, Λ_S — масштабы температурной и солевой стратификаций; $\gamma \neq \delta$;

$$T^\lambda = (\chi/k_S)^{\lambda/2}\,\alpha T_0; \quad S^\lambda = (k_S/\chi)^{\lambda/2}\,\beta S_0; \quad Q_\lambda = (\chi/k_S)^{\lambda/2}\,\alpha F - (k_S/\chi)^{\lambda/2}\,\beta H;$$

$$\lambda = \gamma, \delta; \quad a_\gamma = \varphi_{0\delta}/\varphi_{\gamma\delta}; \quad a_\delta = \varphi_{0\gamma}/\varphi_{\delta\gamma}; \quad k_{\gamma\delta} = \frac{\chi - k_S}{\varphi_{\gamma\delta}};$$

$$k_\gamma = \left(\chi\,(\chi/k_S)^{(\gamma-\delta)/2} - k_S\,(k_S/\chi)^{(\gamma-\delta)/2}\right)/\varphi_{\gamma\delta};$$

$$k_\delta = \left(k_S\,(\chi/k_S)^{(\gamma-\delta)/2} - \chi\,(k_S/\chi)^{(\gamma-\delta)/2}\right)/\varphi_{\gamma\delta};$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = (\chi/k_S)^{(\alpha-\beta)/2} - (k_S/\chi)^{(\alpha-\beta)/2}.$$

В системе (5) присутствуют лишь отношения и разности кинетических коэффициентов χ и k_S, т. е. она симметризована по ним. Коэффициенты a_γ, a_δ и k_γ, k_δ, $k_{\gamma\delta}$, $k_{\delta\gamma}$ взаимно симметричны, а (5) симметрична по отношению к ним. Обобщенные источники Q_λ также имеют симметричный вид. Кроме того, (5) симметрична относительно обобщенных возмущений плотности. В отличие от (1), где присутствует различие между T и S, в (5) функции m_γ и m_δ абсолютно равноправны, т. е. система (5) является системой симметризованного вида. Однако эта симметризация частична, так как она не включает симметризацию между ν и (χ, k_S), а также между векторными полями $\mathbf{u}$ и $(\nabla m_\gamma, \nabla m_\delta)$.

Группа Ли специального вида. Стандартный подход группового анализа системы

(5) состоит в нахождении непрерывной группы вида [15]

$$G\cdot\partial = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z + D\partial_t + U\partial_u + V\partial_v + W\partial_w + E\partial_p + M_\gamma\partial_{m_\gamma} + M_\delta\partial_{m_\delta}, \tag{6}$$

сохраняющей инвариантность (5) относительно преобразований дифференциальных $\{x, y, z, t\}$ и полевых $\{u, v, w, p, m_\gamma, m_\delta\}$ переменных, описываемых соотношением (6). Однако применение этого преобразования не позволяет выявить инвариантные свойства системы (5) по отношению к изменениям масштабов стратификации Λ_T и Λ_S, которые представляют большой интерес. Поэтому в данной работе используется группа специального вида

$$\tilde{G}\cdot\partial = G\cdot\partial + L_T\partial_{\Lambda_T} + L_S\partial_{\Lambda_S}. \tag{7}$$

При этом правило отыскания первого и второго продолжения группы $\tilde{G}\cdot\partial$ состоит в том, что A, B, C, D, U, V, W, E, M_γ, M_δ, L_T, L_S рассматриваются как функции всех переменных задачи, в том числе и Λ_T, Λ_S, а дифференциальные и полевые переменные как переменные группового анализа функциями Λ_T и Λ_S не являются, т. е. Λ_T и Λ_S можно рассматривать как параметрические переменные. Конечно, поля u, v, w, p, m_γ, m_δ как решения системы (5) являются функциями x, y, z, t и Λ_T, Λ_S, однако в рамках группового анализа полевые переменные обладают несколько иным смыслом.

При анализе (5) сначала ищется группа дифференциальных операторов этой системы, т. е. группа системы, в которой функции источников Q_γ и Q_δ положены равными нулю.

Применение специальной группы (7) к такой редуцированной системе позволяет определить бесконечномерную группу преобразований $\tilde{G}\cdot\partial$, генераторы которой имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
G_1\cdot\partial = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 2t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - \\
-2p\partial_p - 3m_\gamma\partial_{m_\gamma} - 3m_\delta\partial_{m_\delta} + 4\Lambda_T\partial_{\Lambda_T} + 4\Lambda_S\partial_{\Lambda_S}, \\
G_2\cdot\partial = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \qquad G_3\cdot\partial = A\partial_x + \frac{\partial A}{\partial t}\partial_u - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}x\partial_p, \\
G_4\cdot\partial = B\partial_y + \frac{\partial B}{\partial t}\partial_v - \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}y\partial_p, \\
G_5\cdot\partial = C\partial_z + \frac{\partial C}{\partial t}\partial_w - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}z\partial_p - C\left(\frac{T^0}{\Lambda_T} + \frac{S^0}{\Lambda_S}\right)\left(gz\partial_p + k^{\gamma/2}\partial_{m_\gamma} + k^{\delta/2}\partial_{m_\delta}\right), \\
G_6\cdot\partial = D\partial_t, \qquad G_7\cdot\partial = E\partial_p, \qquad G_8\cdot\partial = gz\partial_p + k^{\gamma/2}\partial_{m_\gamma} + k^{\delta/2}\partial_{m_\delta}, \\
G_9\cdot\partial = gz\partial_p + k^{-\gamma/2}\partial_{m_\gamma} + k^{-\delta/2}\partial_{m_\delta}, \\
G_{10}\cdot\partial = \frac{gz^2}{2}\partial_p + k^{\gamma/2}z\partial_{m_\gamma} + k^{\delta/2}z\partial_{m_\delta} + \frac{\Lambda_T^2}{T^0}\partial_{\Lambda_T}, \\
G_{11}\cdot\partial = \frac{gz^2}{2}\partial_p + k^{-\gamma/2}z\partial_{m_\gamma} + k^{-\delta/2}z\partial_{m_\delta} + \frac{\Lambda_S^2}{S^0}\partial_{\Lambda_S}, \\
G_\lambda\cdot\partial = gJ(\lambda, z, t)\partial_p + k^{\pm\gamma/2}J'_z\partial_{m_\gamma} + k^{\pm\delta/2}J'_z\partial_{m_\delta} + \frac{\Lambda_\lambda^2}{R_\lambda^0}J''_{zz}\partial_{\Lambda_\lambda}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь A, B, C, E — произвольные функции t, Λ_T, Λ_S, а D — Λ_T, Λ_S;

$$\lambda = \begin{Bmatrix}\chi\\ k_S\end{Bmatrix}; \qquad \Lambda_\lambda = \begin{Bmatrix}\Lambda_T\\ \Lambda_S\end{Bmatrix}; \qquad R_\lambda^0 = \begin{Bmatrix}T^0\\ S^0\end{Bmatrix}; \qquad k = \chi/k_S;$$

$$J(\lambda, z, t) = \int_0^z \Phi_\lambda(\zeta, t)\, d\zeta, \quad \text{где} \quad \Phi_\lambda(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi\zeta - \xi^2\lambda t}\, d\xi$$

— решение уравнения $\Phi'_{\lambda_t} - \lambda\Phi''_{\lambda_{\zeta\zeta}} = 0$, а $\varphi(\xi)$ — произвольная функция такая, что

$$|\Phi_\lambda| < \infty, \qquad |\Phi'_{\lambda_\zeta}| < \infty, \qquad |\Phi''_{\lambda_{\zeta\zeta}}| < \infty.$$

При этом для верхнего значения λ в фигурных скобках берутся верхние значения Λ_λ и R^0_λ и знаки плюс в выражениях для $G_\lambda \cdot \partial$, а для нижнего значения λ — соответственно нижние значения Λ_λ и R^0_λ и знаки минус.

Необходимо отметить, что умножение любого генератора $G_i \cdot \partial$ на произвольную функцию масштабов стратификаций Λ_T и Λ_S создает новый генератор, применение которого к системе (5) оставляет ее инвариантной.

Часть генераторов системы (8) обладает достаточно прозрачным физическим смыслом. Так, генератор $G_1 \cdot \partial$ описывает скейлинг-инвариантные свойства решений системы (5); $G_2 \cdot \partial$ указывает на цилиндрическую симметрию конвективного течения относительно оси z; $G_3 \cdot \partial, G_4 \cdot \partial$ и $G_5 \cdot \partial$ — генераторы галилеевых преобразований, учитывающих изменение поля давления в среде; $G_6 \cdot \partial$ говорит об инвариантности решений по отношению к сдвигам во времени; $G_7 \cdot \partial$ отражает тот факт, что силы, создаваемые в среде за счет давления, являются чисто потенциальными; $G_8 \cdot \partial$ и $G_9 \cdot \partial$ указывают на то, что если обобщенные плотности получают постоянные добавки, то изобары в среде смещаются вдоль оси z.

Для того чтобы выявить физический смысл генераторов $G_{10} \cdot \partial, G_{11} \cdot \partial$, проинтегрируем их линейную комбинацию

$$G \cdot \partial = aG_{10} \cdot \partial + bG_{11} \cdot \partial, \tag{9}$$

где a, b — произвольные числа.

Интегрирование (9) и переход к переменным T и S дают явный вид преобразований, оставляющих систему (5) инвариантной:

$$T^* = T + a\varepsilon z/\alpha, \qquad S^* = S - b\varepsilon z/\beta, \qquad p^* = p + \varepsilon(a+b)gz^2/2,$$
$$\Lambda^*_T = \frac{\Lambda_T}{1 - a\varepsilon\frac{\Lambda_T}{\alpha T_0}}, \qquad \Lambda^*_S = \frac{\Lambda_S}{1 - b\varepsilon\frac{\Lambda_S}{\beta S_0}} \tag{10}$$

(звездочкой обозначены новые переменные, а ε — произвольный параметр преобразования).

Из (10) видно, что при соответствующих изменениях масштабов температурной и солевой стратификаций (соотношения для Λ^*_T, Λ^*_S) и дополнительных стратифицирующих добавках к полям температуры и солености (соотношения для T^*, S^*) таких, что масштабы этих стратификаций обратно пропорциональны коэффициентам температурного расширения и солевого вклада в плотность, изобары поля давления (соотношение для p^*) либо сгущаются (при $a + b > 0$), либо разреживаются (при $a + b < 0$). При $a + b = 0$ поле давлений не изменяется, но тогда не изменяется и поле возмущений плотности, так как в этом случае

$$\rho^* \equiv \beta S^* - \alpha T^* = \beta S - \alpha T - (a+b)z\varepsilon = \beta S - \alpha T \equiv \rho.$$

Следует заметить, что распределения полной температуры T и полной солености S являются инвариантами данного преобразования, так как

$$\bar{T}^* \equiv T_0^*(z) + T^* = T_0\left(1 + \frac{z}{\Lambda_T^*}\right) + T + \frac{a\varepsilon}{\alpha}z =$$

$$= T_0\left(1 + \frac{z}{\Lambda_T}\left(1 - \frac{a\varepsilon}{\alpha T_0}\Lambda_T\right)\right) + T + \frac{a\varepsilon}{\alpha}z = T_0\left(1 + \frac{z}{\Lambda_T}\right) + T \equiv \bar{T}.$$

Аналогичная последовательность соотношений имеет место и для $\bar{S}$. Значит, сгущение изобар носит чисто гидростатический характер (это подтверждается видом добавки $(a+b)gz^2\varepsilon/2$ к полю давлений) и не влияет на характер конвективного течения, что находится в полном соответствии с отбрасыванием гидростатической части давления в системе (1).

Выявить физический смысл бесконечного набора генераторов $G_\lambda \cdot \partial$ в самом общем виде не представляется возможным, так как вид функции $\varphi(\xi)$ достаточно произволен. С другой стороны, чтобы не быть голословными, рассмотрим какой-нибудь простой частный случай. Для этого воспользуемся линейной комбинацией двух генераторов

$$G \cdot \partial = aG_\chi \cdot \partial + bG_{k_S} \cdot \partial \tag{11}$$

таких, что $\varphi(\xi) \equiv 1$ как для $G_\chi \cdot \partial$, так и для $G_{k_S} \cdot \partial$. В этом случае

$$\Phi_\chi(\zeta, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}e^{-\frac{\zeta^2}{4\chi t}}, \qquad \Phi_{k_S}(\zeta, t) = \sqrt{\frac{\pi}{k_S t}}e^{-\frac{\zeta^2}{4k_S t}}.$$

Явный вид преобразований, соответствующих (11), следующий:

$$p^* = p + \pi g\varepsilon\left[a\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\chi t}}\right) + b\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{k_S t}}\right)\right],$$

$$T^* = T + \frac{a\varepsilon}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}e^{-\frac{z^2}{4\chi t}}, \qquad S^* = S - \frac{b\varepsilon}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{k_S t}}e^{-\frac{z^2}{4k_S t}}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\Lambda_T^*} = \frac{1}{\Lambda_T} + \frac{a\varepsilon}{T^0}\frac{z\sqrt{\pi}}{2(\chi t)^{3/2}}e^{-\frac{z^2}{4\chi t}}, \qquad \frac{1}{\Lambda_S^*} = \frac{1}{\Lambda_S} + \frac{a\varepsilon}{S^0}\frac{z\sqrt{\pi}}{2(k_S t)^{3/2}}e^{-\frac{z^2}{2k_S t}}.$$

Как видно из (12), преобразования от старых координат к новым носят аддитивный диффузионный характер при наличии двух расщепленных динамических слоев — температурного и солевого, размеры которых изменяются по законам $\sqrt{\chi t}$ и $\sqrt{k_S t}$ соответственно. При этом видно, что поправки к полю температуры и градиенту исходного распределения температурной стратификации зависят от коэффициента температуропроводности, а поправки к солености и градиенту исходного распределения солевой стратификации — от коэффициента диффузии соли.

Полученный результат имеет непосредственное отношение к устойчивости экспериментальных данных по термоконцентрационной конвекции. Дело в том, что если заливка экспериментального бассейна производится послойно, то после выполнения процедуры необходимо выждать определенное время, чтобы произошло сглаживание резких градиентов плотности на границах слоев и сформировалась стратификация с постоянным градиентом. В идеале для достижения постоянного градиента необходимо выждать бесконечно большое время. Так как в реальных ситуациях это невозможно, то приходится проводить эксперименты при наличии диффузионных поправок к постоянному градиенту плотности исходной ожидаемой стратификации. В то же время из (12) следует, что уравнения

(5) термоконцентрационной конвекции инвариантны по отношению к изменениям полей, обусловленным подобными поправками. Это означает, что фундаментальные свойства течений устойчивы по отношению к диффузионным возмущениям распределений плотности в экспериментальных бассейнах и природных условиях.

Здесь еще раз надо подчеркнуть, что свойства генераторов $G_\chi \cdot \partial$ и $G_{k_S} \cdot \partial$ не исчерпываются преобразованиями (12) и определяются видом функции $\varphi(\xi)$ в каждом конкретном случае.

Пространственно-инвариантные свойства конвективных течений. Представленные результаты группового анализа (8) получены из исходных уравнений конвекции при равных нулю функциях источников температуры и соли. Следовательно, генераторы $G_i \cdot \partial$ порождают так называемые группы G_D дифференциальных операторов. Наложение условия инвариантности функций источников относительно операторов $G_i \cdot \partial$ и учет граничных условий сокращают число допускаемых операторов. В дальнейшем будут рассмотрены только те ситуации, в которых функция источника соли тождественно равна нулю, что позволяет проводить непосредственное сравнение с результатами экспериментальных работ [3, 5, 6].

Независимо от типа стратификации жидкости (солевой, температурной или той и другой одновременно) точечный источник тепла $F(\mathbf{R}, t) = F_0\delta(x)\delta(y)\delta(z)\theta(t)$ допускает генератор $G_2 \cdot \partial$, что означает наличие цилиндрической симметрии возникающего течения.

Структуры течений от горизонтального ($F(\mathbf{R}, t) = F_0\delta(y)\delta(z)\theta(t)$ или $F_0\delta(x)\delta(z)\theta(t)$) и вертикального ($F(\mathbf{R}, t) = F_0\delta(x)\delta(y)\theta(t)$) линейных источников инвариантны относительно переносов вдоль источников (генераторы $G_3 \cdot \partial \ldots G_5 \cdot \partial$ соответственно при $A_t' = B_t' = C_t' \equiv 0$).

Течение от вертикального плоского источника $F(\mathbf{R}, t) = F_0\delta(y)\theta(t)$ проявляет инвариантные свойства относительно переносов параллельно плоскости источника (генераторы $G_3 \cdot \partial$, $G_5 \cdot \partial$ при $A_t' = C_t' \equiv 0$).

Горизонтальный плоский источник ($F(\mathbf{R}, t) = F_0\delta(z)\theta(t)$) допускает генераторы $G_2 \cdot \partial \ldots G_4 \cdot \partial$ при $A_t' = B_t' \equiv 0$, это означает проявление структур, инвариантных относительно переносов и поворотов в плоскости, параллельной плоскости источника, что включает в себя симметрию ячеек Бенара. Все указанные инвариантные свойства течений наблюдались экспериментально [3, 5, 6].

Ни один из типов источников не допускает генератора $G_6 \cdot \partial$, означающего инвариантность течения относительно сдвигов во времени, что подчеркивает переходный характер процесса формирования конвективного течения.

Результаты [3] по конвекции от горизонтального плоского источника тепла, выявившие конвективные ячейки не только гексагональной формы, но и целые сложные орнаменты ячеек, указывают на то, что условие заполнения каким-либо правильным многоугольником бесконечной плоскости не является всеобъемлющим критерием существования конвективных ячеистых структур бенаровского типа. При этом возникает вопрос о применении результатов группового анализа к подобным структурам, и может появиться сомнение в универсальности групповых методов применительно к рассматриваемым задачам конвекции. Кажущееся противоречие разрешается тем, что, строго говоря, генераторы описывают локальные свойства среды, например симметрию течения внутри ячейки как мелкомасштабного образования. Таким образом, возможность описания на языке этих генераторов регулярных плоских картин, получаемых с помощью всего лишь двух векторов трансляций, — скорее исключение, нежели правило. С этой точки зрения не существует противоречия между теоретико-групповыми и экспериментальными [3] результатами.

Аналогичная проблема возникает при описании конвекции от горизонтального нагретого цилиндра [3], когда в небольшой области, окружающей отдельную всплывающую струю, течение проявляет цилиндрическую симметрию и в то же время имеется трансляционная инвариантность всего течения вдоль теплового источника.

Скейлинг-инвариантные свойства конвективных течений. Большой интерес представляет зависимость пространственных и временных масштабов конвективных структур от подводимой мощности и от масштабов исходных стратификаций температуры и солености.

Остановимся сначала на зависимости масштабов от подводимой мощности. Для этого воспользуемся линейной комбинацией генераторов вида

$$G \cdot \partial = G_1 \cdot \partial + a(\Lambda_T) G_\chi \cdot \partial + b(\Lambda_S) G_{k_S} \cdot \partial. \tag{13}$$

Подбирая соответствующим образом функции $a(\Lambda_T)$, $b(\Lambda_S)$ и $\varphi_\chi(\xi)$, $\varphi_{k_S}(\xi)$, можно добиться того, чтобы $G \cdot \partial$ принял вид

$$G \cdot \partial = x \cdot \partial_x + y \cdot \partial_y + z \cdot \partial_z + 2t \cdot \partial_t - (2p + P(z,t)) \cdot \partial_p - (3m_\gamma + M_\gamma(z,t)) \cdot \partial_{m_\gamma} -$$
$$- (3m_\delta + M_\delta(z,t)) \cdot \partial_{m_\delta} - u \cdot \partial_u - v \cdot \partial_v - w \cdot \partial_w. \tag{14}$$

Следующий шаг состоит в применении генератора (14) к системе уравнений (5) с источником тепла. Явный вид преобразований переменных, определяемых генератором (14), получается путем интегрирования уравнений Ли, соответствующих этому генератору и имеющих вид

$$\frac{d\tilde{x}}{d\xi} = x, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\xi} = \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{z}}{d\xi} = z, \quad \frac{d\tilde{t}}{d\xi} = 2\tilde{t}, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = -u, \quad \frac{d\tilde{v}}{d\xi} = -\tilde{v}, \quad \frac{d\tilde{w}}{d\xi} = -\tilde{w},$$
$$\frac{d\tilde{p}}{d\xi} = -2\tilde{p} - P(\tilde{z},\tilde{t}), \qquad \frac{d\tilde{m}_\gamma}{d\xi} = -3\tilde{m}_\gamma - M_\gamma(\tilde{z},\tilde{t}), \qquad \frac{d\tilde{m}_\delta}{d\xi} = -3\tilde{m}_\delta - M_\delta(\tilde{z},\tilde{t})$$

(тильда означает новые переменные, а ξ — групповой параметр). Кроме того, должно выполняться условие, что $\xi = 0$ является неподвижной точкой преобразования, т. е.

$$\tilde{x}(\xi)\Big|_{\xi=0} = x, \qquad \tilde{y}(\xi)\Big|_{\xi=0} = y$$

и т. д. по всем переменным.

Следующий шаг в использовании результатов группового анализа состоит в замене старых переменных на новые в системе (5). Правила замены получаются после интегрирования уравнений Ли, которое дает законы преобразования переменных:

$$\tilde{x} = kx, \quad \tilde{y} = ky, \quad \tilde{z} = kz, \quad \tilde{t} = k^2 t, \quad \tilde{u} = k^{-1}u, \quad \tilde{v} = k^{-1}v, \quad \tilde{w} = k^{-1}w,$$
$$\tilde{p} = k^{-2}\Big[p - \int\limits_1^{\ln k} P\left(\lambda z, \lambda^2 t\right) \lambda \, d\lambda\Big], \qquad \tilde{m}_{\gamma,\delta} = k^{-3}\Big[m_{\gamma,\delta} - \int\limits_1^{\ln k} M_{\gamma,\delta}\left(\lambda z, \lambda^2 t\right) \lambda^2 \, d\lambda\Big].$$

Здесь $k = e^\xi$; производные по пространственным координатам и времени преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = k^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{t}},$$

а член, содержащий источник, — по закону

$$F(x,y,z,t) = k^{3-d} F(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t})$$

(d — параметр размерности источника).

Подстановка полученных соотношений, например, в уравнение для переноса величины m_γ системы (5) дает

$$\frac{\partial \tilde{m}_\gamma}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{m}_\gamma + \tilde{w} \left(\frac{\tilde{T}^\gamma}{\tilde{\Lambda}_T} + \frac{\tilde{S}^\gamma}{\tilde{\Lambda}_S} \right) = k_\gamma \tilde{\Delta} \tilde{m}_\gamma + k_{\delta\gamma} \tilde{\Delta} \tilde{m}_\delta + k^{-2-d} \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}),$$

где $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Delta}$ — набла- и дельта-операторы по новым переменным.

Изменения масштабов динамических структур происходят за счет изменения интенсивности источника. Поэтому инвариантность (5) при изменении интенсивности источника может быть достигнута только за счет компенсации этого изменения коэффициентом при источниковом члене. Пусть интенсивность источника возросла в q раз. Тогда для инвариантности уравнений необходимо выполнение соотношения

$$k = q^{1/(2+d)}.$$

В общем случае теплового источника размерностью d, которая может быть и нецелой (например, если источник выполнен в виде одной из фрактальных фигур Коха), зависимость пространственного масштаба от подводимой мощности представима в виде

$$L = L_0(\nu, \chi, k_S, \alpha, \beta, \ldots) F_0^{1/(2+d)}$$

(L_0 — величина, не зависящая от интенсивности источника F_0).

Применим это соотношение для частных случаев.

Точечный источник тепла. Функция источника задается в виде $F(\mathbf{R}, t) = F_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z) \theta(t)$. Тогда

$$L = L_0(\nu, \chi, k_S, \alpha, \beta, \ldots) F_0^{1/2}.$$

Линейный источник тепла. В общем случае $F(\mathbf{R}, t) = F_0 \delta(x) \delta(z - y \operatorname{tg} \gamma) \theta(t)$, где γ — угол наклона источника к горизонту. В результате имеет место

$$L = L_0(\nu, \chi, k_S, \alpha, \beta, \ldots) F_0^{1/3}.$$

Плоский источник тепла. В общем случае источник можно задать в виде $F(\mathbf{R}, t) = F_0 \delta(z + a \cdot x + b \cdot y) \theta(t)$, где a и b определяют пространственную ориентацию плоскости. И тогда изменение масштаба от мощности происходит по закону

$$L = L_0(\nu, \chi, k_S, \alpha, \beta, \ldots) F_0^{1/4}.$$

В случае точечного источника результат [13] совпадает с приведенным в данной работе.

Если в среду поместить не тепловой источник, а источник примеси, то оказывается, что имеют место точно такие же зависимости, как и для источника тепла. При этом, если плавучесть примеси является отрицательной (соль, сахар и т. п.), картина течения зеркально отразится относительно плоскости $z = 0$, как это было показано в [10].

При изучении зависимости размеров элементов структуры от начальных температурной и концентрационной стратификаций одним из основных является вопрос о том, пространственные масштабы каких функций физических полей меняются пропорционально Λ_T^a и Λ_S^b (a и b — произвольные числа).

Для этого составим линейную комбинацию генераторов

$$G \cdot \partial = G_1 \cdot \partial + A G_\chi \cdot \partial + B G_{k_S} \cdot \partial, \tag{15}$$

где A, B — в общем случае числа, удовлетворяющие соотношениям

$$4\Lambda_T + A\frac{\Lambda_T^2}{\chi T^0}J'_{\chi t} = \frac{\Lambda_T}{a}, \qquad 4\Lambda_S + B\frac{\Lambda_S^2}{k_S S^0}J'_{k_S t} = \frac{\Lambda_S}{b}. \tag{16}$$

Выполнение соотношений (16) автоматически гарантирует получение искомых зависимостей.

Интегрирование (15) позволяет ввести функцию

$$\Psi_\lambda = m_\lambda - \frac{1}{3}\left[k^{\lambda/2}J'_{\chi z} + k^{-\lambda/2}J'_{k_S z}\right], \tag{17}$$

пространственные масштабы которой пропорциональны Λ_T^a, Λ_S^b при одновременной скейлинг-инвариантности самой функции при изменении Λ_T и Λ_S.

Как следует из (8), J_χ, J_{k_S} — в общем случае функции вида

$$\Phi(\lambda, z, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \Lambda_T, \Lambda_S)e^{\pm i\xi z - \xi^2\lambda t}\,d\xi. \tag{18}$$

Рассмотрим простейший случай, когда для всех J_λ определяющая функция $\varphi(\xi, \Lambda_T, \Lambda_S)$ едина и имеет вид

$$\varphi(\xi, \Lambda_T, \Lambda_S) = -\frac{1}{2}\delta''(\xi) \tag{19}$$

($\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака).

Последовательно подставляя (19) в (18), а результаты интегрирования в (17) и переходя к исходным физическим полям — температуре T и солености S, получим явный вид функции Ψ_λ:

$$\Psi_\lambda = \left(\frac{\chi}{k_S}\right)^{\lambda/2}\left(\alpha\bar{T} - \frac{\chi}{\chi - k_S}\right) - \left(\frac{k_S}{\chi}\right)^{\lambda/2}\left(\beta\bar{S} - \frac{k_S}{\chi - k_S}\right) \tag{20}$$

(обозначения $\bar{T}$ и $\bar{S}$ были введены ранее и описывают полные поля температуры и солености).

Следует отметить, что при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ из (20) получаем

$$\Psi_0 = 1 + \beta\bar{S} - \alpha\bar{T} = H, \qquad \Psi_1 = -\chi - k_S + \chi\alpha\bar{T} - k_S\beta\bar{S} = G,$$

где H и G — приведенная плотность и потенциал кинетической дилатации, которые использовались в [13] в качестве полевых переменных.

В зависимости от подводимой мощности в [16] были выделены три типа слоистого течения от точечного источника, различие между которыми состоит в том, что в одном случае предельная высота структуры достигается сразу за счет первичной конвективной струи, поднимающейся непосредственно от источника, в другом — с учетом вторичных конвективных ячеек, последовательно формирующихся над первичным куполом. Третий случай является промежуточным для этих двух. Во всех случаях, как показали эксперименты, высота структуры пропорциональна $F_0^{1/2}$. Рассмотрим формирование течения с учетом того, что высота конвективных ячеек (толщина слоев) пропорциональна $F_0^{1/7}$ [16].

При включении теплового источника температурный перегрев жидкости, находящейся в его ближайшей окрестности, достигает десятков градусов. Как следует из [13], высота подъема первичной тепловой струи пропорциональна $F_0^{1/2}$. Пусть высота структуры определяется соотношением $L_{st} = L_0F_0^{1/2}$, высота первичной струи $L_p = L_1F_0^{1/2}$, высота конвективной ячейки $L_c = L_2 F_0^{1/7}$, где L_0, L_1, L_2 — постоянные величины, определяемые параметрами жидкости.

Пусть $n(F_0)$ — зависимость от мощности числа конвективных ячеек (слоев). Тогда в первом случае (в центре структуры) $L_{st_1} = L_{p_1}$. С другой стороны, $L_{st_1} = n(F_0)L_c$. В результате

$$n(F_0) = \frac{L_0}{L_2} F_0^{5/14}.$$

Во втором случае $L_{st_2} = L_{p_2} + n(F_0)L_c$, тогда

$$n(F_0) = \frac{L_0 - L_1}{L_2} F_0^{5/14}.$$

В промежуточном случае, когда часть слоев формируется около первичной струи, а остальные порождаются вторичными источниками над ней, аналогичный анализ показывает, что суммарное число слоев также пропорционально $F_0^{5/14}$.

Так как число слоев n является натуральной величиной, то зависимость $n(F_0)$ носит ступенчатый характер с огибающей, ведущей себя по закону $F_0^{5/14}$. Отсюда также следует, что существует набор критических значений мощности, при достижении которых число слоев увеличивается на единицу. Эти критические значения определяются соотношением $F_{0n}^* = (n/N_0)^{14/5}$ (N_0 — постоянная, определяемая параметрами среды, $n = 1, 2, \ldots$).

Полученная зависимость $n(F_0) \sim F_0^{5/14}$ универсальна при всех значениях мощности, когда реализуется слоистый режим конвекции.

В проведенном исследовании предполагалось, что кинетические коэффициенты среды являются постоянными величинами, не зависящими от температуры и концентрации примесей. Подобное утверждение справедливо далеко не для всех жидких и газообразных сред. Поэтому при углубленном изучении динамических структур необходимо более точно учитывать свойства конкретных сред, отражая этот факт уже в исходных гидродинамических уравнениях.

Проведенный анализ системы уравнений термоконцентрационной конвекции в стратифицированной жидкости показывает, что введение обобщенных возмущений плотности облегчает выполнение группового анализа и может быть рекомендовано при проведении численного моделирования процессов конвекции.

Показана универсальность введенных обобщенных возмущений плотности в том смысле, что они описывают всевозможные комбинации температуры и концентрации примесей, получающиеся в системе уравнений термоконцентрационной конвекции при линейной комбинации ее уравнений.

В полученную частично симметризованную систему равноправно входят как полевые переменные (температура и концентрация примесей), так и соответствующие им кинетические коэффициенты (температуропроводности и диффузии соли).

Определена бесконечномерная группа преобразований, отражающая свойства симметрии течений над различными типами источников.

Универсальным свойством термоконцентрационной конвекции является расщепление масштабов изменчивости различных переменных (скорости, температуры, соли).

Без привлечения дополнительных гипотез определены зависимости глобального масштаба структуры и ее отдельных элементов от подводимой мощности (потока плавучести), согласующиеся с данными экспериментов по конвекции.

Показано, что элементами бесконечного множества функций, проявляющих инвариантные свойства при изменении масштабов исходных стратификаций, являются в том числе приведенная плотность жидкости и потенциал кинетической дилатации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8291).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров К. Н.** Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
2. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977.
3. **Whitehead J. A.** Dislocations in convection and onset of chaos // Phys. Fluids. 1983. V. 26, N 10. P. 2899–2904.
4. **Turner J. S.** A physical interpretation of the observations of hot brine layers in the Red sea // Hot brines and recent heavy metal deposits in the Red sea. A geochemical and geophysical account / Ed. by E. T. Degens, D. A. Ross. Berlin: Springer, 1969. P. 164–173.
5. **Чашечкин Ю. Д., Тупицын В. С.** Структура свободного конвективного течения над точечным источником тепла в стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1101–1104.
6. **Чашечкин Ю. Д., Беляев В. С.** Режимы свободной термоконцентрационной конвекции над точечным источником тепла // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 574–577.
7. **Попов В. А., Чашечкин Ю. Д.** Свободная конвекция около горизонтального цилиндра в стратифицированной жидкости // ЖТФ. 1980. Т. 50, № 10. С. 2189–2200.
8. **Morton B. R., Taylor J. I., Turner J. S.** Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources //Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1956. V. 234, N 1196. P. 1–23.
9. **Morton B. R.** Buoyant plumes in a moist atmosphere // J. Fluid Mech. 1956. V. 2. P. 127–144.
10. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Свободная конвекция от точечного источника тепла в стратифицированной жидкости // ПММ. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 962–967.
11. **Getling A. V.** Evolution of two-dimensional disturbances in the Rayleigh — Benard problem and their preferred wavenumbers // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 165–186.
12. **McKenzie D. P.** The symmetry of convective transitions in space and time // J. Fluid Mech. 1988. V. 191. P. 287–339.
13. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Общие свойства свободных термоконцентрационных течений // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1990. Вып. 3. С. 69–75.
14. **Океанология.** Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана / Отв. ред. В. М. Каменкович, А. С. Монин. М.: Наука, 1978. Oxford University Press, 1961.
15. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
16. **Тупицын В. С., Чашечкин Ю. Д.** Свободная конвекция над точечным источником тепла в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 27–36.

Поступила в редакцию 24/II 1995 г.