

УДК 532.526.3

## Блок расчета положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛОГОС\*

А.В. Бойко<sup>1</sup>, Ю.М. Нечепуренко<sup>2</sup>, Р.Н. Жучков<sup>3</sup>, А.С. Козелков<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики РАН, Москва

<sup>3</sup>РФЯЦ—ВНИИЭФ, Саров, Нижегородская область

E-mail: boiko@itam.nsc.ru

Настоящая работа посвящена описанию и обоснованию оригинального блока расчета положения ламинарно-турбулентного перехода в дозвуковых пограничных течениях, основанного на  $\epsilon^N$ -методе и позволяющего проводить более точные расчеты обтекания тел при наличии в пограничном слое так называемого естественного перехода к турбулентности. На примере обтекания плоской пластины демонстрируется совместная работа блока и решателя RANS из аэродинамической части пакета ЛОГОС. Полученные расчетные положения начала и конца ламинарно-турбулентного перехода совпадают с известными референтными значениями.

**Ключевые слова:** пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, линейная теория устойчивости, ЛОГОС.

### Введение

Турбулизация течения существенно влияет на аэро- и гидродинамические характеристики обтекаемых объектов, поэтому ламинарно-турбулентный (Л-Т) переход в пограничных слоях, струях, следах, каналах, трубах и в других течениях жидкостей и газов представляет значительный практический интерес. Однако хорошо известно, что ни одна из существующих универсальных программ расчета нестационарных течений таких, как широко распространенный пакет ANSYS CFX, не в состоянии рассчитать Л-Т переход непосредственно, поскольку подобные программы не способны достаточно точно воспроизвести эволюцию малых (по амплитуде и масштабам) возмущений в ламинарном сдвиговом течении. Проблемы адекватного моделирования Л-Т перехода схожи с проблемами адекватного моделирования турбулентности, но вопросы разработки и верификации соответствующих моделей значительно менее проработаны несмотря на то, что этим вопросам были посвящены обширные специальные исследования (см., например, библиографию в [1]).

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке ФГУП «РФЯЦ—ВНИИЭФ» (договор 13058–12), и РФФИ (проекты 13-01-00270, 13-01-00350).

В последние годы ситуация не сильно изменилась [2] и инженерные программы по-прежнему требуют параметризации Л-Т перехода. В них в том или ином виде задается само положение Л-Т перехода и имеется ряд эмпирических параметров, настраиваемых на конкретные приложения с учетом шероховатости обтекаемой поверхности, конфигурации течения и природы возмущений в набегающем потоке. Поскольку переход к турбулентности может проходить по различным сценариям в зависимости от вышеперечисленных и других факторов, для достижения универсальности приходится вводить большое число таких параметров. Настройка соответствующей программы на новые задачи требует проведения времязатратных и дорогих экспериментов в аэродинамических и гидродинамических трубах и/или натуральных испытаний.

Альтернативой параметрическому подходу являются специальные модели, воспроизводящие распространение возмущений в ламинарном сдвиговом течении. Положение перехода к турбулентности определяется с их помощью  $e^N$ -методом, т.е. по критериям основанным на достижении возмущениями некоторой пороговой амплитуды. Этот подход используют ведущие аэрокосмические фирмы в своих закрытых кодах. Наиболее известные из них GTPT (Graphical Transition Prediction Toolkit) и NOLOT (NONLocal Transition analysis), разработанные в середине 1990-х годов.

Настоящая работа посвящена описанию и обоснованию блока расчета положения Л-Т перехода для дозвуковых течений, реализующего  $e^N$ -метод и предназначенного для интеграции в аэродинамическую часть пакета программ ЛОГОС [3].

Схема предлагаемого блока и его взаимодействия с решателем осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) изображена на рис. 1. В соответствии с ней, сначала выполняется расчет ламинарного обтекания рассматриваемого тела и определяются линии тока в пограничном слое. Вдоль выбранных линий тока уточняется пограничный слой и решаются уравнения распространения малых возмущений. По нарастанию возмущений и заданным пороговым амплитудам для каждой линии тока определяются положения начала и конца Л-Т перехода. Эти данные поступают в решатель RANS и выполняется расчет обтекания с ламинарно-турбулентным пограничным слоем. Ламинарная часть пограничного слоя снова подается в блок расчета Л-Т перехода и положения начала и конца перехода уточняются.

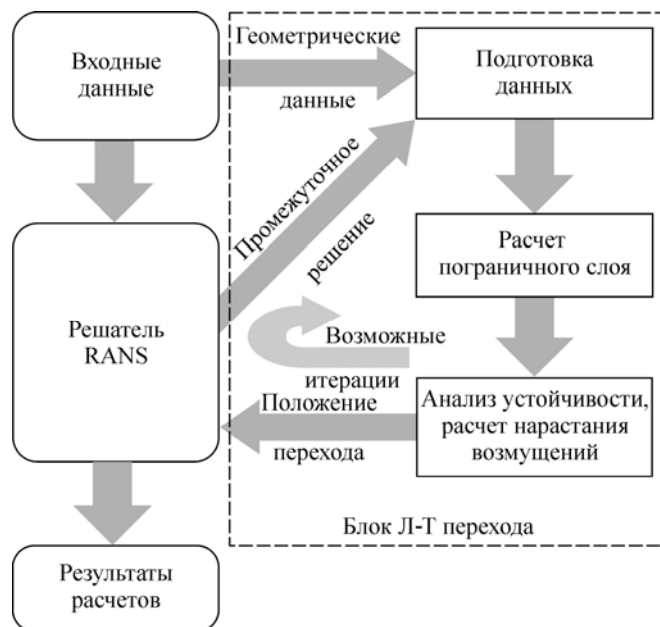


Рис. 1. Схема блока расчета положения Л-Т перехода и его взаимодействия с решателем RANS.

В разделе 1 описываются и обсуждаются два основных сценария перехода к турбулентности — естественный и обходной. В разделе 2 описывается  $\epsilon^N$ -метод, дается краткий обзор его теоретического и экспериментального обоснования и обсуждаются способы учета положения ламинарно-турбулентного перехода в решателях RANS, основанных на различных моделях турбулентности. Далее на примере двумерного течения в предположении малости кривизны поверхности в области Л-Т перехода описываются основные составляющие блока расчета Л-Т перехода. Разделы 3 и 4 представляют оригинальный метод определения частот, которым отвечают наиболее нарастающие возмущения, и границ их областей усиления, а также метод анализа нарастания этих возмущений на основе линейной теории аэрогидродинамической устойчивости. В разделе 5 описана возможная пространственная аппроксимация для рассматриваемой конфигурации. Раздел 6 посвящен уточнению пограничного слоя на основе данных, полученных решателем RANS. В разделе 7 приводятся и обсуждаются результаты совместной работы блока расчета Л-Т перехода и решателя RANS из аэродинамической части пакета ЛОГОС.

### 1. Сценарии перехода к турбулентности

С инженерной точки зрения различают естественный и, как противоположность ему, обходной сценарии Л-Т перехода. Естественный сценарий характерен в основном для аэродинамических приложений. Он начинается с возникновения и постепенного нарастания в пограничном слое неустойчивых исходно малых по амплитуде вихревых возмущений, вызванных неоднородностью внешнего потока, вибрациями обтекаемого потоком тела, акустикой и т. п. Заметные искажения среднего потока в этом сценарии наблюдаются только на поздней — довольно короткой нелинейной стадии перехода.

В крейсерском режиме полета одна из основных причин возникновения возмущений в пограничном слое — неоднородность набегающего потока. Ее мерой является степень турбулентности  $Tu$ , определяемая как отношение среднеквадратичной амплитуды скоростей возмущений с масштабами меньше характерных размеров обтекаемого потока к скорости набегающего потока. В декартовых координатах, обозначая компоненты скорости возмущения через  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , а скорость набегающего потока — через  $U_\infty$ , степень турбулентности можно выразить как

$$Tu = \frac{\left( (u'^2 + v'^2 + w'^2)/3 \right)^{1/2}}{U_\infty} 100 \%$$

Результаты летных измерений степени турбулентности набегающего потока на планере, т. е. при малых  $U_\infty$ , приведены на рис. 2. С ростом скорости полета величина  $Tu$  при прочих равных условиях уменьшается. Например, в условиях крейсерского полета ТУ-154 (900 км/ч) степени турбулентности набегающего потока меньше показанных на рис. 2 более чем на порядок. При степенях турбулентности менее 0,1 % на первый план в причинах возникновения возмущений в пограничном слое как правило выходят другие факторы — прежде всего акустика и вибрации, вызванные, например, работой двигателя самолета или вентилятора аэродинамической трубы, а также шероховатость поверхности. Это приводит к тому, что положение перехода перестает зависеть от дальнейшего уменьшения  $Tu$ .

В свою очередь, при  $Tu$ , лежащей в диапазоне от 2 до 6 %, обычно реализуется обходной сценарий, а при еще большей степени турбулентности набегающего потока переход происходит при минимальных числах Рейнольдса, при которых возможна развитая турбулентность. Степень турбулентности выше 2 % характерна прежде всего

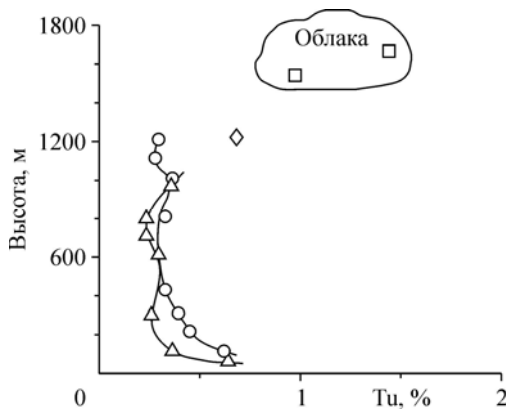


Рис. 2. Степень турбулентности набегающего потока при летных измерениях на планере [4].

$U_\infty = 25$  м/с, символы — результаты измерений при различных погодных условиях.

для течения между лопатками турбин, потока за лопастями вертолета, следа за фюзеляжем или крылом летательного аппарата и т. п. В этом случае процесс Л-Т перехода в пограничном слое на обтекаемом таким потоком теле начинается с внезапного появления при малых числах Рейнольдса турбулентных пятен — пространственных образований в виде локализованных областей турбулентных пульсаций, сносящихся по потоку и одновременно увеличивающихся в размерах, что приводит ниже по течению к полной турбулизации пограничного слоя. Переход к турбулентности происходит в области линейной устойчивости малых возмущений, поэтому такой сценарий называют обходным.

Образование турбулентных пятен приводит к чередованию ламинарных и турбулентных режимов в точках пограничного слоя. Это чередование можно характеризовать коэффициентом или функцией перемежаемости  $\gamma$ , принимающей значения от 0 до 1 и определяющей отношение времени существования турбулентного режима ко всему времени наблюдения в данной точке. По сравнению с естественным сценарием, в этом случае средние и интегральные характеристики течения начинают постепенно меняться от ламинарных к турбулентным существенно выше по потоку и процесс перехода имеет большую протяженность вдоль обтекаемого потоком тела.

Коэффициент перемежаемости можно использовать также для описания естественного перехода, при котором турбулентные пятна возникают лишь на поздней нелинейной стадии турбулизации течения или вообще отсутствуют. В последнем случае с физической точки зрения наличие перемежаемости можно трактовать как то, что положение перехода к турбулентности в целом испытывает стохастические по времени низкочастотные колебания между двумя предельными положениями (см., например, [2]). Нужно, однако, иметь в виду, что при естественном переходе, как уже отмечалось выше, искажение среднего потока наблюдается только на поздней — довольно короткой — нелинейной стадии перехода и, следовательно, область нарастания коэффициента перемежаемости от нуля до единицы по отношению ко всей длине обтекаемого потоком тела как правило довольно короткая. Поэтому различать положения начала и конца Л-Т перехода имеет смысл только если расчетный шаг в направлении нормальном к границе Л-Т перехода достаточно мал (как в задаче, рассматриваемой в разделе 7) и/или обтекаемая поверхность относительно короткая [5].

## 2. Определение положения перехода к турбулентности

Переход ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое является непрерывным процессом, начиная от возбуждения возмущений и кончая установлением развитого турбулентного течения, однако при решении инженерных задач широко используется понятие «точки начала перехода» или числа Рейнольдса перехода  $Re_{пер}$ . Различные способы экспериментального определения  $Re_{пер}$  основаны на регистрации начала заметных изменений структуры течения и его интегральных характеристик: отклонения профиля средней скорости от профиля скорости ламинарного течения, изменений распределения полного давления (один из наиболее распространенных

методов), коэффициентов трения и теплоотдачи, появления первых турбулентных вспышек и ненулевой перемежаемости.

Как уже отмечалось выше, в ряде случаев, в частности в области малых чисел Рейнольдса и при обходном сценарии перехода, интерес представляет протяженность области перехода к турбулентности. В работе [6] на основе анализа результатов измерений функции перемежаемости было показано, что для двумерных потоков эта функция хорошо аппроксимируется выражением вида

$$\gamma(x) = 1 - e^{-\mu(x-x_{\text{пер}})^2}, \quad (1)$$

где  $x$  — продольная координата,  $x_{\text{пер}}$  — положение начала области перехода (точка начала перехода), а  $\mu = -0,412/(x_{\gamma=0,75} - x_{\gamma=0,25})^2$ . Непосредственно из соотношения (1), учитывая, что  $\mu$  не зависит от  $x$ , и определяя положение конца области перехода (точку окончательной турбулизации течения) как  $x_{\text{турб}} = x_{\gamma=0,99}$ , для  $\gamma(x)$  несложно вывести следующую формулу

$$\gamma(x) = 1 - 0,01^{(x-x_{\text{пер}})^2/(x_{\text{турб}}-x_{\text{пер}})^2}.$$

Дальнейшее уточнение функции перемежаемости сводится к построению ее более точной зависимости от  $x_{\text{пер}}$ ,  $x_{\text{турб}}$  и других определяющих параметров, а также анализу зависимостей между этими параметрами. К настоящему времени предложено несколько таких формул для широкого круга двумерных пристенных течений (см., например, [7, 8, 9]).

Альтернативой явного задания функции перемежаемости является ее определение из уравнения переноса общего вида с некоторыми зависящими от модели эмпирическими параметрами. Одной из наиболее продвинутых в этом направлении является так называемая  $\gamma$ - $\text{Re}_{\theta}$ -модель перемежаемости для обходного сценария перехода [10], позволяющая использовать функцию перемежаемости для моделирования не только двумерных, но и ряда трехмерных течений. Однако при этом также требуется определить параметры  $x_{\text{пер}}$  и  $x_{\text{турб}}$ , существенные для замыкания модели, причем процедура их определения в исходной версии модели является коммерческой тайной. Чтобы обойти это препятствие, ряд авторов предложили свои варианты процедуры определения  $x_{\text{пер}}$  и  $x_{\text{турб}}$  (см. например, [11, 12]). Основная проблема этих подходов — отсутствие достаточно обширной базы данных об Л-Т переходе в различных течениях для аккуратной калибровки.

В большинстве алгебраических моделей турбулентности, в отличие от изложенных в работах [10, 11, 12], «включение» турбулентности происходит на одном шаге сетки (или нескольких, чтобы избежать численной неустойчивости), что по существу отвечает естественному переходу. Вместе с тем, в ряде однопараметрических моделей турбулентности, основанных на понятии турбулентной вязкости, турбулентность включается «плавно», умножением членов, учитывающих турбулентную вязкость, на  $\gamma(x)$  [13].

Для аэродинамических приложений также активно используется модель турбулентности Спаларта–Аллмараса [14], предполагающая короткий переход к турбулентности. Для этого в уравнении, описывающем модель, используется специальный турбулизующий член, обозначаемый обычно  $f_{t1}$ , также включающий в себя  $x_{\text{пер}}$  и имитирующий Л-Т переход в окрестности точки начала перехода. Однако авторы модели не приводят способ получения этой величины. Их рекомендации сводятся к установке «турбулизатора» в данной точке, координаты которой получены каким-либо иным методом.

Практическая важность точки перехода приводит к задаче оценки ее положения на основе расчетов, а не из эмпирических корреляций. Наиболее обоснованными с физической точки зрения являются методы, базирующиеся на теории гидродинамической устойчивости. Получающиеся при этом оценки  $x_{пер}$  и  $x_{турб}$  справедливы прежде всего для естественного перехода. Определение положения перехода должно включать в себя в идеале три основных этапа:

- идентификацию малых начальных возмущений пограничного слоя, возбуждаемых различными внешними возмущениями;
- расчет линейного развития таких возмущений;
- определение и расчет доминирующих нелинейных процессов, приводящих к тому или иному явлению (трехмерному искажению плоских волн, появлению вторичной неустойчивости, бурному росту всех возмущений, существенному искажению профиля средней скорости и т.п.), характеризующему начало разрушения ламинарного течения.

В настоящее время разработаны методы, позволяющие в ряде практически важных случаев вычислять начальные амплитуды возмущений пограничного слоя, и достаточно надежные методы расчета линейного развития возмущений в пограничном слое. Адекватность описания процесса развития волн неустойчивости с помощью линейной теории подтверждена экспериментально для большинства канонических течений. Пример результатов расчета границ области неустойчивости и коэффициентов нарастания для двумерных возмущений приведен на рис. 3, где изображены линии уровней коэффициентов нарастания наиболее неустойчивых возмущений для пограничного слоя Блазиуса. В качестве нормировки длины использована локальная толщина вытеснения  $\delta^*$ . Область неустойчивости сосредоточена внутри петли, называемой кривой нейтральной устойчивости. Поскольку одному положению на оси абсцисс могут соответствовать две точки кривой, вводят понятие ветвей кривой нейтральной устойчивости. Первой (нижней) ветви соответствуют точки с меньшей ординатой, а второй (верхней) — с большей.

Расчет нелинейной стадии перехода представляет собой довольно сложную задачу, однако ее можно обойти, например при малой степени турбулентности набегающего потока, когда нелинейные процессы протекают очень быстро в том смысле, что на большей части пограничного слоя до точки перехода (90–95 % его протяженности) имеет место развитие малых (линейных) возмущений. Это дает возможность использования линейной теории устойчивости для определения положения перехода, пренебрегая нелинейными процессами.

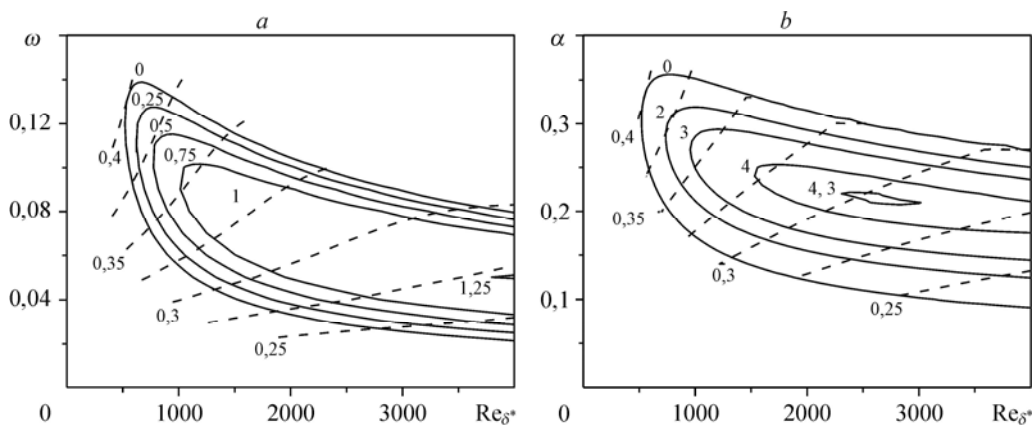


Рис. 3. Часть кривой нейтральной устойчивости в пространстве (а) и во времени (b) для пограничного слоя Блазиуса, где  $Re_{\delta^*} = 1,72\sqrt{xU_{\infty}/\nu}$  [2].

Согласно имеющимся экспериментальным данным и теоретическим оценкам, нелинейные процессы в двумерных плоских и осесимметричных пограничных слоях обычно начинают играть заметную роль, когда амплитуда продольной компоненты скорости возмущений  $u'$  достигает приблизительно 1 % скорости набегающего потока  $U_\infty$ . При относительно короткой зоне нелинейных процессов можно условно допустить линейный рост возмущений несколько выше их действительной критической амплитуды и принять за точку перехода ту, в которой амплитуда возмущения некоторой частоты (волна Толлмина–Шлихтинга), определяемой в процессе расчета, достигает 2–4 % скорости набегающего потока.

Экспоненциальный закон роста возмущений в линейной области делает расчетное число Рейнольдса перехода  $Re_{пер}$  малочувствительным к некоторой произвольности в выборе предельной величины  $u'$ . При известном (из эксперимента) начальном амплитудно-частотном составе возмущений такой подход позволяет вычислять положение точки перехода с практически приемлемой точностью. Эти идеи составляют суть так называемого  $e^N$ -метода, получившего широкое распространение [15, 16], поскольку он оказался эффективен для обширного круга течений, включая отрывные и трехмерные.

Согласно этому методу, по линейной теории устойчивости рассчитываются степени усиления  $N_\omega(x)$  малых возмущений с различными частотами  $\omega$ :

$$N_\omega(x) = \ln(u'/u'_0) = -\int_{x^1(\omega)}^x \alpha_i(x) dx,$$

где  $\alpha_i(x) = \text{Imag}\{\alpha(x)\}$ , а  $x^1(\omega)$  относится к первой ветви кривой нейтральной устойчивости. При этом для двумерных дозвуковых потоков учитывается тот факт, что наиболее быстро нарастающими, а значит, и наиболее существенными для перехода к турбулентности являются двумерные возмущения [17]. В стандартной постановке расчеты ведутся в локальном приближении, поэтому предварительно вычисляются профили средней скорости течения в предполагаемой области перехода. Амплитуды возмущений даются выражением

$$A = u'/u'_0 = e^{N_\omega(x)}. \quad (2)$$

Они достигают максимума, когда волны доходят до второй ветви нейтральной кривой (рис. 3). Значение  $A$ , соответствующее значению числа Рейнольдса перехода  $Re_{пер}$ , определяется по достижению порогового значения показателем степени в аналогичном выражению (2) уравнении для огибающей, которая соответствует максимальным коэффициентам нарастания.

Для калибровки метода не требуется проводить обширные параметрические эксперименты, например, с варьированием углов атаки или стреловидности крыла. Вместо этого калибровка делается по типам неустойчивостей и условиям окружающей среды, прежде всего степени турбулентности набегающего потока. Для каждого возможного типа неустойчивости, которых, как правило одновременно реализуется не более 1–2-х, определяется своя зависимость порогового  $N$ -фактора от  $Tu$ .

Для многих условий и типов неустойчивостей, важных в аэродинамических приложениях, такие зависимости уже установлены. Таким образом, влияние параметров, ответственных за начальную амплитуду и спектр волн неустойчивости, можно учесть подбором единого параметра  $N$  для классов течений со сходными условиями как на поверхностях тел, так и во внешнем потоке. В частности, в работе [18] показано, что в предположении изотропности уровня внешних возмущений величину порогового

$N$ -фактора, соответствующего точке начала перехода к турбулентности  $x_{\text{пер}}$ , для широкого круга двумерных пограничных слоев, включая на крыльях под различными углами атаки и в конфигурациях с отсосом пограничного слоя, можно выразить интерполяционной формулой

$$N_{\text{пер}} = 2,13 - 6,18 \lg Tu, \quad (3)$$

где  $Tu$  берется в процентах от скорости внешнего потока, или формулой

$$N_{\text{пер}} = -8,43 - 2,40 \ln Tu,$$

где  $Tu$  берется в абсолютных единицах [19]. Эти формулы обеспечивают приемлемую точность для  $Tu$  в диапазоне 0,1–2 %. При  $Tu \lesssim 0,1$  % необходимо учитывать наличие/отсутствие вибраций модели и другие факторы, что в простейшем случае достигается введением эффективной степени турбулентности. Оценку положения точки окончательной турбулизации течения  $x_{\text{турб}}$  можно выполнить, используя следующее значение  $N$ -фактора [18]:

$$N_{\text{турб}} = 5 - 6,18 \lg Tu. \quad (4)$$

### 3. Расчет нарастания малых возмущений

Пусть в области

$$\Omega = \{(x, y) : x_{\min} < x < x_{\max}, 0 < y < \infty\}, \quad (5)$$

где сторона  $y = 0$  является жесткой границей с условием прилипания, задано стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости с компонентами скорости  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  вдоль координат  $x$  и  $y$  соответственно, нормированным на плотность давлением  $P(x, y)$  и кинематической вязкостью  $\nu$ . Уравнения эволюции малых нестационарных возмущений этого течения с компонентами скорости и давлением соответственно  $u'(t, x, y)$ ,  $v'(t, x, y)$ ,  $p'(t, x, y)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + v' \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями  $u'(t, x, y) = v'(t, x, y) = 0$  при  $y = 0$  и  $y = \infty$ .

Будем предполагать далее, что компоненты скорости и давление зависят от времени гармонически:

$$f'(t, x, y) = \text{Real}\{\bar{f}(x, y) \exp(-i\omega t)\}, f \in \{u, v, p\},$$

где  $\omega$  — заданное вещественное число. Тогда система (6) сведется к следующей системе уравнений для амплитуд  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\bar{v}(x, y)$  и  $\bar{p}(x, y)$ :



$$\begin{aligned}
 -i\omega\bar{u} + U\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right), \\
 -i\omega\bar{v} + U\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}\right), \\
 \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} &= 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

в области (5) с граничными условиями

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{v}(x, 0) = \bar{u}(x, \infty) = \bar{v}(x, \infty) = 0, \quad x_{\min} < x < x_{\max}. \tag{8}$$

Вводя в качестве дополнительной переменной

$$\bar{r} = \sqrt{\nu} \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \tag{9}$$

и используя уравнения неразрывности основного течения и возмущения, систему (7) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\bar{r}, \\
 \frac{\partial\bar{p}}{\partial x} &= i\omega\bar{u} + \nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + U\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} - \bar{v}\frac{\partial U}{\partial y} - \sqrt{\nu}\frac{\partial\bar{r}}{\partial y} + \left(\bar{u}\frac{\partial V}{\partial y} - V\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right), \\
 \sqrt{\nu}\frac{\partial\bar{r}}{\partial x} &= -i\omega\bar{v} - \nu\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}U\bar{r} + \frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \left(\bar{u}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial V}{\partial y}\right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Систему (10) удобно записать следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} = A\bar{\Phi} + B\bar{\Phi}, \tag{11}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\nu}} \\ i\omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} & U\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & -\nu\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(i\omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & \frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\nu}U \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} - V\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial V}{\partial x} & \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial}{\partial y}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{p} \\ \bar{r} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в качестве дополнительной переменной иногда берут  $z$ -компоненту ротора амплитуды скорости возмущения [20]:

$$\bar{r} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (13)$$

Это также приводит к эквивалентной системе вида (11). Однако есть одно важное различие. Переменная (9) удовлетворяет нулевым граничным условиям по  $y$  в то время, как переменная (13) вообще говоря не равна нулю на границе. Вследствие этого системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученные в результате аппроксимации по  $y$ , будут проще в случае (9). Поэтому далее мы будем рассматривать систему (11), (12), выведенную из (7) введением дополнительной переменной (9).

Решение системы (11), (12) при  $x > x_{\min}$  можно искать в виде

$$\bar{\Phi}(x, y) = \tilde{\Phi}(x, y) \exp \left\{ i \int_{x_{\min}}^x \alpha(x) dx \right\}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получим:

$$i\alpha\tilde{\Phi} = A\tilde{\Phi} + \left( B\tilde{\Phi} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Слагаемое  $B\tilde{\Phi}$  в соотношении (15) отвечает членам системы уравнений (10), взятым в скобки. Можно показать [20], что эти члены малы по сравнению с остальными. В выражении (15) к ним добавился еще один член, имеющий тот же порядок малости [20]. Таким образом, нулевое приближение к решению системы (10) можно найти решая при каждом  $x$  одну из двух следующих задач на собственные значения

$$a) i\alpha\tilde{\Phi} = A\tilde{\Phi}, \quad b) i\alpha\tilde{\Phi} = (A + B)\tilde{\Phi}. \quad (16)$$

Это даст приближение к решению системы (10) вида (14), позволяющее рассчитывать степень усиления возмущений по следующей формуле:

$$N_{\omega}(x) = -\int_{x^1(\omega)}^x \alpha_i(x) dx, \quad x^1(\omega) < x \leq x^2(\omega),$$

где  $\alpha_i(x) = \text{Imag}\{\alpha(x)\}$ , а  $x^1(\omega)$  и  $x^2(\omega)$  означают начало и конец области неустойчивости, соответственно. Для удобства обозначений мы будем полагать

$$N_{\omega}(x) \equiv N_{\omega}(x^2(\omega)), \quad x > x^2(\omega).$$

Степени усиления возмущений для заданных частот и левых границ интервалов неустойчивости рассчитываются описанным выше способом и по этим расчетам строится огибающая

$$\text{envelope}(x) = \max_{\omega} N_{\omega}(x). \quad (17)$$

При каждом значении  $\omega$  описанная в разделе 5 аппроксимация по переменной  $y$  сводит (16) к алгебраическим задачам на собственные значения с матрицами, зависящими от  $x$ . Опционно решается либо проблема (a), либо проблема (b) на заданной сетке по  $x$  от узла, ближайшего к точке  $x^1(\omega)$ , до узла, ближайшего к точке  $x^2(\omega)$ . При каждом  $x$  вычисляется лишь собственное значение, отвечающее волне Толлмина–Шлихтинга, которое и дает  $\alpha(x)$ . Для этого используется метод обратных итераций с постоянным сдвигом. Для решения соответствующих систем используется метод LU-разложения с перестановками

строк. В качестве сдвига и начального вектора для обратных итераций при каждом новом значении  $x$  используются соответственно значение  $\alpha(x)$  и отвечающий ему собственный вектор, найденные в предыдущем узле сетки по  $x$ . Для первого значения  $x$ , т. е. ближайшего к точке нейтральной устойчивости  $x^1(\omega)$ , используется случайный вектор и вещественное  $\alpha_r$ , отвечающее рассматриваемой частоте  $\omega$  в точке  $x^1(\omega)$ . Пары  $\omega$ ,  $x^1(\omega)$  и отвечающие им значения  $\alpha_r$  вычисляются методом, описанным в разделе 4. Точка  $x^2(\omega)$  определяется в процессе вычисления величин  $\alpha(x)$  как узел сетки по  $x$ , в котором значение  $\alpha_1(x)$  стало положительным.

#### 4. Расчет актуальных частот

Вернемся к системе уравнений (6). Предполагая локальную параллельность (независимость от  $x$ ) основного течения и отбрасывая малые члены, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем искать компоненты скорости и давление в виде

$$f'(t, x, y) = \text{Real}\{\tilde{f}(y) \exp(i\alpha x - i\omega t)\}, \quad f \in \{u, v, p\}, \quad (19)$$

где  $\alpha$  и  $\omega$  — заданные комплексные числа. Подставляя (19) в (18), получим следующую систему уравнений для амплитуд  $\tilde{u}(y)$ ,  $\tilde{v}(y)$  и  $\tilde{p}(y)$ :

$$\begin{aligned} -i\omega \tilde{u} + i\alpha U \tilde{u} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} &= -i\alpha \tilde{p} + \nu \left( -\alpha^2 \tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right), \\ -i\omega \tilde{v} + i\alpha U \tilde{v} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left( -\alpha^2 \tilde{v} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right), \\ i\alpha \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Эту систему можно записать в виде

$$i\omega \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} + Gp, \quad F \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} i\alpha U + \alpha^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ 0 & i\alpha U + \alpha^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} i\alpha \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} i\alpha & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  — комплексное собственное значение с максимальной мнимой частью проблемы (20), рассматриваемой как задача временной устойчивости при некотором вещественном  $\alpha > 0$ , а  $\alpha_r + i\alpha_i$  — комплексное собственное значение проблемы (20), рассматриваемой как задача пространственной устойчивости при  $\omega = \omega_r$ , и отвечающее волне Толлмина–Шлихтинга. Тогда [21]

$$\alpha_i \approx -\omega_i \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Так как возмущения, распространяющиеся вниз по потоку, в том числе пакеты волн Толлмина–Шлихтинга имеют групповую скорость

$$\partial \omega_r / \partial \alpha_r > 0,$$

то уравнение (23) обосновывает следующий подход к определению вещественных частот  $\omega$ , при которых в пограничном слое существуют области нарастания возмущений (такие частоты мы далее будем называть актуальными).

Зафиксировав произвольное вещественное  $\alpha$ , двигаясь от передней кромки вниз по потоку и решая при каждом значении  $x$  задачу на собственные значения (21), (22), мы либо убедимся что при этом  $\alpha$  и всех рассматриваемых значениях  $x$  отвечающие им собственные значения  $\omega$  имеют отрицательные мнимые части, либо найдем первую точку нейтральной устойчивости  $x^1$ , в которой максимальная мнимая часть собственных значений  $\omega$  равна нулю. В последнем случае, соответствующее вещественное собственное значение  $\omega$  будет частотой, при которой имеет место нарастание возмущений начиная от точки  $x^1$  и до некоторой точки  $x^2$ .

Актуальные частоты  $\omega$  и отвечающие им левые границы  $x^1(\omega)$  областей неустойчивости рассчитываются описанным выше способом для значений вещественных продольных волновых чисел  $\alpha$ , образующих равномерную сетку в интервале от 0 до максимального значения  $\alpha_{\max}$ , определенного методом, описанным ниже. Полученные после аппроксимации дискретные аналоги задачи на собственные значения (21), (22) для уменьшения вычислительных затрат решаются с использованием алгебраической редукции, предложенной в работах [22, 23] и сводящей исходные обобщенные алгебраические проблемы собственных значений к обычным алгебраическим задачам на собственные значения с матрицами втрое меньшего порядка, что дает ускорение вычислений в десятки раз и существенно повышает их точность. Кроме того, для дополнительного ускорения вычислений расчет сначала проводится на грубой сетке по  $x$ , а затем результаты уточняются на основной сетке. Все это делает вычислительные затраты, связанные с вычислением актуальных временных частот и отвечающих им левых границ областей неустойчивости, достаточно малыми по сравнению с последующим расчетом степеней усиления возмущений при этих частотах.

Оценка максимальных продольных волновых чисел  $\alpha_{\max}$  волн неустойчивости делается исходя из наблюдения, что

$$\alpha_{\max} \leq \frac{1}{\min_x \delta(x)},$$

где  $\delta(x)$  — толщина пограничного слоя. Для определенности под толщиной пограничного слоя здесь понимается толщина вытеснения  $\delta^*(x)$  (см., напр., рис. 3, *b*). Так как  $\delta^*(x)$  увеличивается вниз по потоку, берется толщина пограничного слоя в некотором

начальном сечении (см. раздел 6) с весом  $M = 0,08$ , гарантирующим попадание  $\alpha_{\max}$  в требуемый интервал:

$$\alpha_{\max} = \frac{M}{\min_x \delta^*(x)}.$$

### 5. Пространственная аппроксимация

Для дискретизации по  $y$  систем (10) и (20) с граничными условиями (8) можно использовать спектральный метод коллокаций [24]. Для этого выбираем некоторое достаточно большое  $y_{\max} > 0$  и граничные условия (8) для амплитуд компонент скорости возмущения при  $y = \infty$  заменяем на

$$\bar{u}(x, y_{\max}) = \bar{v}(x, y_{\max}) = 0, \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max}.$$

В качестве сетки по  $y$  выбираем точки  $y_j = y(s_j)$ , где

$$y(s) = \sigma \frac{1+s}{b-s}, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$\sigma > 0$  — масштабирующий множитель,  $b = 1 + 2\sigma/y_{\max}$ , а

$$s_j = -\cos \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (24)$$

т. е. корни многочлена Чебышева второго рода степени  $N$ , и  $s_0 = -1$  и  $s_{N+1} = 1$ . Для аппроксимации давления и каждой из компонент скорости используем соответственно интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (24) и на той же сетке с добавлением узлов  $\pm 1$ . Для расчета значений производных элементарных интерполяционных многочленов Лагранжа используем алгоритмы, описанные в работе [24].

### 6. Расчет пограничного слоя

Данный раздел посвящен описанию метода расчета пограничного слоя с точностью, достаточной для вычисления положения Л-Т перехода. Входными данными для такого расчета в общем случае являются полученные решателем RANS, настроенным на ламинарное обтекание, компоненты скорости  $U$ ,  $V$  и  $W$  обтекающего тело потока, плотность  $\rho$ , температура  $T$ , давление  $P$  и динамическая вязкость  $\mu$ . Все эти величины предполагаются заданными в узлах глобальных декартовых координат. Положение точки на поверхности тела задается формой поверхности, которая также является входным параметром. Мы рассмотрим случай двумерного несжимаемого пограничного слоя при постоянной температуре. В этом случае величины  $W$ ,  $P$ ,  $T$  не используются, а кинематическая вязкость  $\nu = \mu/\rho$  осредняется по всей расчетной области и в дальнейшем считается постоянной.

Метод включает определение точки растекания  $x_*$  (начала развития пограничного слоя), построение расчетной сетки и расчет поля скорости внутри пограничного слоя на всем протяжении обтекаемой поверхности. Расчет пограничного слоя осуществляется в криволинейных координатах  $(x, y)$ , где  $y$  — расстояние до поверхности по нормали к ней, а  $x$  — длина дуги вдоль поверхности от точки растекания до основания нормали. Помимо указанных выше данных, полученных решателем RANS, для расчета пограничного слоя задаются количество узлов  $N_x$  сетки по  $x$ , количество узлов  $N_y$  сетки по  $y$  и число Рейнольдса  $Re_0$ , с которого имеет смысл начинать поиск областей

неустойчивости. В расчетах, описанных в разделе 7, мы полагали  $Re_0 = 100$ , т. к. при этом числе Рейнольдса уже справедливо приближение пограничного слоя, но пограничный слой еще заведомо устойчив.

### 6.1. Поиск точки растекания и построение расчетной сетки

Предполагая, что пограничный слой имеет максимальную толщину в районе задней кромки обтекаемого тела, эту толщину при небольших углах атаки можно оценить как  $\sqrt{Lv/U_\infty}$ , где  $L$  — длина тела,  $U_\infty$  — скорость набегающего потока. Исходя из этого выберем в качестве расстояния от поверхности, на котором влиянием пограничного слоя можно пренебречь, величину

$$\tilde{y}_{\max} = 20 \sqrt{\frac{Lv}{U_\infty}}.$$

Поиск точки растекания  $x_*$  основан на том факте, что в ней касательная к поверхности скорость потока  $U(x, y)$  равна нулю, а с разных сторон от нее  $U(x, y)$  имеет различные знаки. Это позволяет найти точку растекания по данным, полученным решателем RANS, используя стандартную процедуру поиска нуля функции одной переменной. Скорость  $U(x, y)$  берется на расстоянии  $\tilde{y}_{\max}$  от поверхности. Брать ее вблизи поверхности нецелесообразно, т.к. касательная к поверхности скорость потока может быть равна нулю также в точке отрыва пограничного слоя. Для дальнейшего анализа используется та часть поверхности, на которой  $U(x, y) > 0$ . Не нарушая общности, будем предполагать далее, что этой части поверхности отвечает  $x > x_*$ . Координату  $x$  будем отсчитывать от точки растекания.

Толщину вытеснения для произвольного пограничного слоя определяют как

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{U(x, y)}{U_e(x)} \right) dy,$$

где  $U_e(x) = U(x, \infty)$ . Используя  $\tilde{y}_{\max}$  и  $N_y$ , строится система узлов  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_y$  вдоль нормали к поверхности со сгущением у стенки, как описано в разделе 6. Используя данные о геометрии поверхности, точке растекания и  $N_x$  строится система узлов  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_x$ , с равным шагом по касательной к поверхности. Расчет  $\delta^*(x_k)$  проводится методом трапеций. Во внешнем течении скорость потока  $U_e(x)$  предполагается независимой от  $y$ , поэтому в качестве верхнего предела вместо бесконечности используется  $\tilde{y}_{\max}$ .

Для дальнейших расчетов пограничного слоя выбирается новая величина

$$y_{\max} = 10 \max_{x \geq x_0} \delta^*(x).$$

Используя  $y_{\max}$  и  $N_y$  строится новая система узлов по нормали к поверхности.

На этой новой системе узлов методом трапеций пересчитывается  $\delta^*(x)$ . Аналогичным образом рассчитывается толщина потери импульса

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{U(x, y)}{U_e(x)} \left( 1 - \frac{U(x, y)}{U_e(x)} \right) dy.$$

Эти величины можно использовать в дальнейшем для получения чисел Рейнольдса

$$\text{Re}_{\delta^*}(x) = \frac{\delta^*(x)U_e(x)}{\nu}, \quad \text{Re}_\theta(x) = \frac{\theta(x)U_e(x)}{\nu} \quad (25)$$

вместо размерных расстояний вдоль поверхности, например, для нахождения числа Рейнольдса перехода к турбулентности.

Часть узлов  $x_k$  вблизи точки растекания, где применение теории пограничного слоя не оправдано, отсекается при помощи параметра  $\text{Re}_0$ , а именно, удаляются все  $x_k$ , для которых

$$\sqrt{\frac{x_k U_e(x_k)}{\nu}} \leq \text{Re}_0.$$

Минимальный из оставшихся узлов сетки мы далее будем обозначать как  $x_{\min}$ , а максимальный, т. е.  $x_{N_x}$ , — как  $x_{\max}$ .

## 6.2. Расчет поля скорости внутри пограничного слоя

Касательные  $U(x, y)$  и нормальные  $V(x, y)$  к поверхности компоненты скорости рассчитываются на построенной сетке узлов  $(x_k, y_j)$  путем решения уравнений Прандтля для плоского пограничного слоя [25] с использованием данных, полученных решателем RANS. Кривизна поверхности учитывается только параметрически через длину дуги  $x$  вдоль поверхности. Таким образом, решается система уравнений

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

где  $U_e(x) = U(x, y_{\max})$ , в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) : x_{\min} < x < x_{\max}, 0 < y < y_{\max}\}.$$

Сторона  $y = 0$  предполагается жесткой границей с условием прилипания, а в качестве граничных условий при  $y = y_{\max}$  берутся распределения скорости во внешнем потоке, полученные решателем RANS.

Уравнение импульсов решается методом запаздывающих коэффициентов в рамках неявной по  $x$  конечно-разностной схемы [26]. На  $k+1$  шаге по  $x$  сначала находятся  $U_j^{k+1}$  путем решения разностного уравнения

$$U_j^k \frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta x} + V_j^k \frac{U_{j+1}^{k+1} - U_{j-1}^{k+1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{2\nu}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left[ \frac{U_{j+1}^{k+1} - U_j^{k+1}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{U_j^{k+1} - U_{j-1}^{k+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + S_j^{k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y.$$

Затем из разностного уравнения неразрывности

$$\frac{V_j^{k+1} - V_{j-1}^{k+1}}{y_j - y_{j-1}} + \frac{U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1} - U_j^k - U_{j-1}^k}{2\Delta x} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_y$$

находятся  $V_j^{k+1}$ . Для реализации описанной выше схемы необходимо задать профили скорости при  $x = x_{\min}$ . Их можно рассчитать либо путем интерполяции данных, полученных решателем RANS, либо решая уравнение Фокнера–Скэн.

Теоретические профили средней скорости на плоской пластине при фиксированном угле атаки представимы в следующем виде (см. [13]):

$$U = U_e F'(\eta), V = -\sqrt{\frac{\nu U_e}{x}} \left( \frac{m+1}{2} F(\eta) + \frac{m-1}{2} \eta F'(\eta) \right),$$

где  $U_e = U_0 x^m$ ,  $\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$ ,  $F(\eta)$  — безразмерная функция тока, удовлетворяющая уравнению Фокнера–Скэн:

$$F'''' + \frac{m+1}{2} F F'' + m(1 - F'^2) = 0, \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1,$$

штрих означает производную по автомодельной переменной  $\eta$ , а величина  $m$  выражается через параметр градиента давления Хартри:

$$m = \frac{\beta_H}{2 - \beta_H}.$$

При  $\beta_H > 0$  поток ускорен, а при  $\beta_H < 0$  — замедлен. Приближение пограничного слоя перестает быть справедливым при  $\beta_H \geq -0,199$ .

Предполагая, что при  $x = x_{\min}$  пограничный слой уже достаточно развит, «локальную» величину  $m$  можно оценить следующим образом:

$$m = \frac{\log[U_e(x_{\min} + \Delta x)/U_e(x_{\min})]}{\log[(x_{\min} + \Delta x)/x_{\min}]}$$

Для вычисления  $F(\eta)$  уравнение Фокнера–Скэн записывается в виде системы трех дифференциальных уравнений первой степени:

$$\frac{dF_0}{d\eta} = F_1, \quad \frac{dF_1}{d\eta} = F_2, \quad \frac{dF_2}{d\eta} = m(F_1^2 - 1) - \frac{m+1}{2} F_0 F_2,$$

где  $F_0 = F$ ,  $F_1 = F'$  и  $F_2 = F''$ . Полученная система решается как краевая задача с граничными условиями

$$F_0(0) = F_1(0) = 0, \quad F_1(\eta_{\max}) = 1.$$

Поскольку эта система достаточно жесткая при  $\eta_{\max} > 6$ , используется метод продолжения. Вначале находится решение при  $\eta_{\max} \leq 6$ , и далее по одному добавляются узлы при больших  $\eta$ , причем решение, полученное на предыдущем шаге, экстраполируется на дополнительный узел и используется как первое приближения на текущем шаге. На первом шаге в качестве начального приближения берутся функции  $F_0(\eta) = F_2(\eta) = 0$ ,  $F_1(\eta) = \eta/6$ .

## 7. Расчет Л-Т перехода в связке с решателем RANS

Рассмотрим результаты расчета положения ламинарно-турбулентного перехода в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине длины  $L = 3$  (здесь и далее



значения всех размерных величин даются в системе СИ) с передней кромкой, имеющей радиус закругления  $3 \cdot 10^{-4}$  и расположенной под нулевым углом атаки к набегающему потоку. В качестве набегающего потока рассматривался воздух при нормальных условиях, т. е. полное давление  $P_\infty = 101325$ , скорость звука  $c = 341,8$ , плотность  $\rho_\infty = 1,214$ , температура  $T_\infty = 288$ , динамическая вязкость  $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5}$ . Скорость набегающего потока составляла  $U_\infty = 50$ , степени турбулентности —  $Tu = 0,12\%$  и  $0,2\%$ .

Сначала в пакете ЛОГОС [3] рассчитывалось ламинарное обтекание. При этом использовались блочно-структурированные сетки, состоящие из 34000 ячеек. Полученные компоненты скорости  $U$ ,  $V$  и  $W$  основного потока, плотность  $\rho$ , температура  $T$ , давление  $P$ , динамическая вязкость  $\mu$ , а также геометрические данные поверхности поступали в блок расчета Л-Т перехода. Для уточнения пограничного слоя и расчета положения Л-Т перехода было выбрано число внутренних узлов  $N_y = 70$  сетки по  $y$  и число узлов  $N_x = 1501$  сетки по  $x$ .

Вариации безразмерного градиента давления по данным ЛОГОС вдоль поверхности пластины не превышали  $0,05\%$  в области неустойчивости течения, т. е. течение было практически безградиентным. Рассчитанные в соответствии с разделом 6 продольная и нормальная к стенке компоненты скорости основного течения, нормированные на локальную величину  $U_e$ , изображены сплошными линиями на рис. 4, *a* и *b* соответственно. При этом координата  $y$  нормирована на локальную толщину вытеснения  $\delta^*$ . Следует отметить, что при таких нормировках профили продольной компоненты скорости практически одинаковы и совпадают с профилем для автомодельного пограничного слоя Блазиуса. Профили нормальной компоненты и их поведение (характерное уменьшение с ростом  $x$ ) также соответствуют блазиусовскому. Кроме того, точками показаны результаты полученные из ЛОГОС и интерполированные на равномерной по  $x$  сетке. Видно, что оба набора данных дают практически одинаковые результаты. Однако в общем случае можно ожидать, что данные, полученные в результате расчета пограничного слоя методом, описанным в разделе 6, обеспечат большую точность.

Расчет положения Л-Т перехода иллюстрируют рис. 5–7. В соответствии с разделом 4 оценивалось максимальное продольное волновое число  $\alpha_{\max}$  волн неустойчивости. Диапазон  $(0, \alpha_{\max})$  разбивался на 20 интервалов, в каждом интервале строилась равномерная

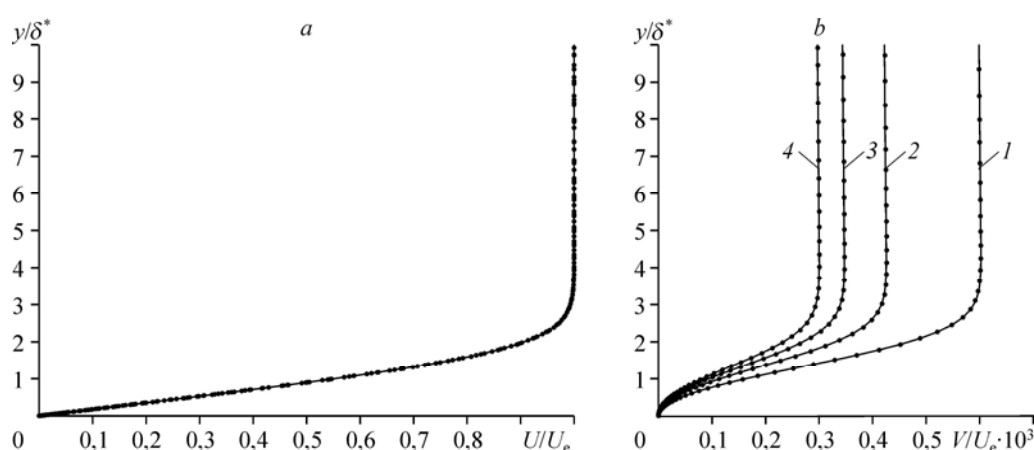


Рис. 4. Продольная (*a*) и поперечная (*b*) компоненты скорости пограничного слоя на расстояниях  $x/l = 0,2$  (1),  $0,4$  (2),  $0,6$  (3) и  $0,8$  (4), рассчитанные пакетом ЛОГОС, интерполированные на равномерной по  $x$  сетке (точки) и рассчитанные блоком Л-Т перехода (линии).

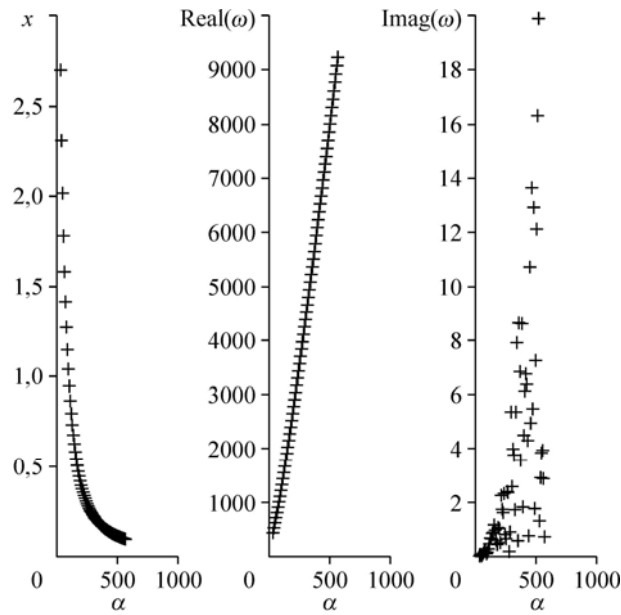


Рис. 5. Расчет актуальных частот и точек нейтральной устойчивости.

сетка из 15 узлов (параметры алгоритма). Для каждого значения  $\alpha$  из построенной сетки (начиная с нулевого) определялась точка сетки по  $x$ , ближайшая справа к точке нейтральной устойчивости (рис. 5, слева), и отвечающая ей временная частота (рис. 5, середина), т. е. вещественная часть собственного значения с максимальной мнимой частью для временной проблемы собственных значений (21), (22). Соответствующие мнимые части изображены на рис. 5 (справа), показывающем, что выбранная сетка по  $x$  позволяла определить точку нейтральной устойчивости с хорошей точностью (мнимые части малы). Далее, для каждой найденной временной частоты вычислялись функции  $\text{Imag}\{\alpha(x)\}$  (рис. 6) и  $N_\omega(x)$  (рис. 7). В конце каждого из интервалов по  $\alpha$  для всех уже найденных  $N_\omega(x)$  строилась общая огибающая (жирная линия на рис. 7) и определялось положение начала и конца Л-Т перехода. Пороговые  $N$ -факторы начала и конца перехода вычислялись

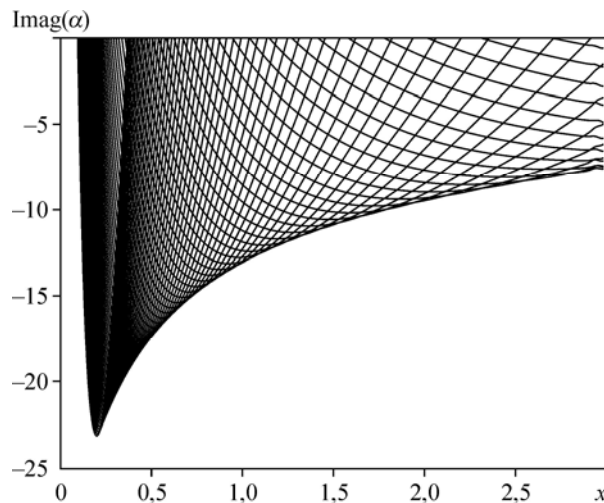


Рис. 6. Расчет инкрементов нарастания возмущений.

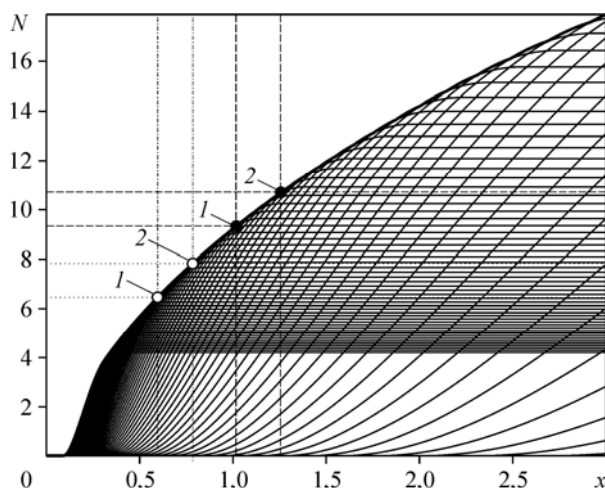


Рис. 7. Расчет положений начала (1, 2 — светлые символы) и конца (1, 2 — темные символы) Л-Т перехода для степеней турбулентности  $Tu = 0,20\%$  (1) и  $0,12\%$  (2).

по формулам (3) и (4) (горизонтальные пунктирные линии на рис. 7) и имели округленные до трех значащих цифр значения: для  $Tu = 0,12\%$  — соответственно 7,82 и 10,7, а для  $Tu = 0,20\%$  — 6,45 и 9,32. Процесс останавливался, если в результате добавления очередной порции значений  $\alpha$  положения Л-Т перехода изменялись не более чем на  $1/4$  шага сетки по  $x$ . В результате работы описанного алгоритма было отобрано и задействовано 67 частот  $\omega$ .

Вычисленные положения начала и конца Л-Т перехода, отвечающие им числа Рейнольдса

$$Re_{\text{пер}} = \sqrt{\frac{x_{\text{пер}} U_e(x_{\text{пер}})}{\nu}}, \quad Re_{\text{турб}} = \sqrt{\frac{x_{\text{турб}} U_e(x_{\text{турб}})}{\nu}},$$

и числа Рейнольдса  $Re_{\theta, \text{пер}}$  и  $Re_{\theta, \text{турб}}$ , определяемые правой формулой в (25), округленные до трех значащих цифр, приведены в таблице. Как можно видеть, с ростом степени турбулентности число Рейнольдса перехода заметно уменьшается.

Сравнение приведенных в таблице чисел Рейнольдса перехода с соответствующими результатами физических экспериментов (указаны в скобках), приведенными в работе [27], показывают их совпадение с точностью погрешностей эксперимента и согласуются с точностью  $e^N$ -метода, показанной в работе [18].

Таблица

Результаты расчета положений начала и конца Л-Т перехода

$Tu, \%$	$x_{\text{пер}}$	$Re_{\text{пер}} \cdot 10^{-6}$	$Re_{\theta, \text{пер}}$	$x_{\text{турб}}$	$Re_{\text{турб}} \cdot 10^{-6}$	$Re_{\theta, \text{турб}}$
0,12	0,784	2,60 (2,7)	1080	1,25	4,16(3,9)	1370
0,20	0,597	1,98 (2,2)	947	1,02	3,37 (3,7)	1230

### Заключение

Описанный блок расчета положения Л-Т перехода можно использовать в связке с любым решателем RANS с моделью турбулентности, в которой предусмотрена возможность задания положения ламинарно-турбулентного перехода, в частности с моделью Спаларта–Аллмараса [14]. Таким образом, при помощи данного блока

становится возможным проводить более точные расчеты обтекания тел с помощью пакета ЛОГОС при наличии в пограничном слое естественного перехода к турбулентности.

### Список литературы

1. Numerical simulation of unsteady flows and transition to turbulence / Ed. by Pironneau O., Rodi W., Ryming I.L., Savill A.M., Troung T.V. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 528 p.
2. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V. Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 271 p.
3. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Глазунов В.А., Голубев А.А., Денисова О.В., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Тарасова Н.В., Сизова М.А. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы // Тр. XII межд. семинара «Супервычисления и математическое моделирование», 11–15 октября, 2010. Саров. 2010. P. 215–230.
4. Zanin B.Y. Transition at natural conditions and comparison with the results of wind tunnel studies // IUTAM Symp. Laminar-Turbulent Transition / Ed. by V.V. Kozlov. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 541–546.
5. Krumbein A. Transition modeling in FLOWer — transition prescription and prediction // MEGAFLOW — Numerical Flow Simulation for Aircraft Design / Ed. by E.H. Hirschel, K. Fujii, W. Haase et al. Berlin: Springer-Verlag, 2005. P. 45–62.
6. Dhawan S., Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during transition from laminar to turbulent motion // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 3. P. 418–436.
7. Narasimha R. A note on certain turbulent spot and burst frequencies // IISc Report 78 FM 10. Department of Aeronautical Engng, Indian Institute of Sci, Bangalore. 1978.
8. Чен К., Тайсон Н. Применение теории турбулентных пятен Эммонса к обтеканию затупленных тел // Ракетн. техн. и косм. 1971. Т. 9, № 5. С. 63–68.
9. Walker G.J. Transitional flow on axial turbomachine blading // AIAA J. 1989. Vol. 27, No. 5. P. 595–602.
10. Menter F.R., Langtry R.B., Völker S. Transition modelling for general purpose CFD codes // Flow Turbulence Combust. 2006. Vol. 77. P. 277–303.
11. Smirnov E.M., Smirnovsky A.A. Turbine vane cascade heat transfer predictions using a modified version of the  $\gamma - \tilde{Re}_{\theta t}$  laminar-turbulent transition model // CD-ROM Proceedings of Int. Symp. on Heat Transfer in Gas Turbine Systems. Antalya, Turkey: 2009. 11 p.
12. Malan P., Suluksna K., Juntasaro E. Calibrating the  $\gamma - Re_{\theta}$  transition model for commercial CFD // AIAA Paper. 2009. No. 2009-1142.
13. Cebeci T., Cousteix J. Modelling and computation of boundary layer flows. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 469 p.
14. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1992. No. 92-0439.
15. Жаффе Н., Окамура Т., Смит А. Определение коэффициентов пространственного усиления и использование их для расчета перехода // Ракетн. техн. и косм. 1970. Т. 8, № 2. С. 136–144.
16. Michel R., Arnal D., Coustols E. Stability calculations and transition criteria on two- and three-dimensional flows // IUTAM Symp. Laminar-Turbulent Transition. / Ed. by V.V. Kozlov. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 455–461.
17. Squire H.B. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid between parallel walls // Proc. R. Soc. Lond. A. 1933. Vol. 142. P. 621–628.
18. Van Ingen J.L. Transition, pressure gradient, suction, separation and stability theory // AGARD-CP-224. 1977. 15 p.
19. Mack L.M. Boundary layer stability theory: Special course on stability and transition of laminar flow // AGARD Report 709. 1984. 81 p.
20. Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях Новосибирск: Наука. 1987. 282 с.
21. Gaster M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 14. P. 222–224.
22. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М. Численный спектральный анализ временной устойчивости ламинарных течений в каналах постоянного сечения // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1731–1747.
23. Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М. Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 1109–1125.
24. Weideman J.A.C., Reddy S.C. A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
25. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. с немец. М.: Наука, 1974. 712 с.
26. Андерсон Д., Таннехилл Д., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 392 с.
27. Schubauer G.B., Skramstad H.K. Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate // NACA TR 909. 1948. 31 p.

Статья поступила в редакцию 21 июня 2013 г.