Описанный метод измерения О по сравнению с [7,8] обладает большей избирательностью и более удобен. Указанным методом предполагается исследовать высотный суточный ход О в атмосфере.

В заключение авторы выражают признательность Ю. А. Брагину, В. Н. Панфилову за обсуждение полученных результатов.

Поступила 19 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Токтомышев С. Ж. Об измерении концентрации атомарных частиц кислорода в диссоциированных газах. ПМТФ, 1970, № 1, стр. 146.
2. Кихтенко В. Н., Токтомышев С. Ж. О химических детекторах атомов кислорода в разреженных газах. Тр. Центр. аэрол. обсерв., 1969, вып. 82.
3. Брагин Ю. А., Кихтенко В. Н., Токтомышев С. Ж. Измерение коэффициента гибели атомов кислорода на твердых поверхностях. Тр. Центр. аэрол. обсерв., 1969, вып. 82.
4. Блюменфельд Л. А., Воеводский В. В., Семенов А. Г. Применение электронного парамагнитного резонанса в химии. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Токтомышев С. Ж. О коэффициенте гибели атомарного кислорода на твердых поверхностях. Кинетика и катализ, 1969, т. 10, вып. 5.
6. Холлэнд Н. Нанесение тонких пленок в вакууме. М., Госэнергоиздат, 1963.
7. Федынский А. В., Перов С. П., Чижов А. Ф. Опыт прямого измерения концентраций водяного пара и атомарного кислорода в мезосфере. Изв. АН СССР, Сер. физ. атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 5.
8. Похунков А. А. Гравитационное разделение, состав и структурные параметры ночной атмосферы на высотах от 100 до 210 *км*. Искусственные спутники Земли, вып. 13, М., Изд-во АН СССР, 1962.

УДК 539.3

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНВЕРСИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

С. Д. Клячко

(Новосибирск)

Рассматриваются некоторые возможности использования преобразования инверсии для моделирования задач теории упругости и пластичности, в частности для случаев, когда это позволяет существенно облегчить выполнение экспериментального исследования на модели.

Инвариантность бигармонического уравнения относительно инверсии [1] была использована Митчеллом [2] при анализе первой основной задачи плоской теории упругости. Им показано, что преобразование инверсии «переводит» любую такую задачу для какого-то конкретного тела в другую задачу этого же физического типа, но уже для другого тела с другой нагрузкой. При этом очень важно, что величины, которые при решении новой задачи должны быть известны — контур тела и условия на контуре (т. е. нагрузки) — просто выражаются через величины, задаваемые при решении исходной задачи (нагрузки, с точностью до гидростатического сжатия). Поэтому инверсию можно использовать для моделирования. Аналогично обстоит дело в задаче о статическом изгибе плиты [3, 4].

Здесь отмечается, что инверсией можно пользоваться для моделирования и некоторых других задач теории упругости и пластичности, сводящихся к бигармоническому уравнению с правой частью, а именно для моделирования плоской термоупругой стационарной задачи, когда в теле задано тепловыделение и контур тела свободен от закреплений, и задачи о динамическом изгибе однородной упругой плиты, опирающейся на неоднородное упруго-пластическое основание винклеровского типа. Масса плиты является произвольной функцией точки, на контуре заданы условия «кинематического типа».

Кроме того, инверсией можно пользоваться в случае плоской первой основной изотермической задачи для линейно-вязко-упругого тела, в случае задачи о динамическом изгибе плиты на сплошном основании, когда материал плиты обладает линейной вязко-упругостью, а материал основания — произвольной нелинейной вязко-упругостью, в этих двух задачах, когда материал обладает круговой ортотропией (уравнение уже не бигармоническое), а также в некоторых других задачах.

Во всех задачах область будем считать конечной, а в случае плоских задач — для простоты и односвязной. В прочих отношениях контур тела или плиты, а также краевые условия (в рамках рассматриваемых типов) могут быть произвольными. Будем считать, что центр круга инверсии лежит вне области, занятой телом. В случае круговой ортотропии он совпадает с центром ортотропии.

В ортонормированной системе координат x, y термоупругая задача и задача об изгибе плиты описываются уравнениями

$$\nabla^4\varphi = \frac{\alpha E}{\lambda(1-\mu)}\, e \tag{1}$$

$$D\nabla^4 w = q - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p\,[w(t^*)]_{t^*=0}^{t^*=t} \tag{2}$$

Здесь φ — функция Эри; α, E, λ, μ — константы; $e\,(x, y)$ — задаваемая интенсивность тепловыделения в единице объема; D — жесткость плиты; w — прогиб; $q\,(x, y, t)$ — поперечная нагрузка (задаваемая функция); $\rho\,(x, y)$ — масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности (задаваемая функция); p — реактивная нагрузка, действующая на плиту со стороны основания: $p\,[\;\;]_{t^*=0}^{t^*=t}$ — оператор, ставящий в соответствие функции $w\,(t)$ функцию $p\,(t)$. Этот оператор характеризует упруго-пластические свойства основания, является задаваемой функцией x, y. От основания потребуем только, чтобы оно описывалось «точечным» оператором. Таким образом, (2) описывает изгиб плиты на упруго-пластическом основании весьма произвольного типа. В случае линейно-упругого основания $p = c\,(x, y)\,w$, где $c\,(x, y)$ — отрицательная «константа», Заметим, что оператор $p\,[\;\;]$ может описывать не только традиционное сплошное основание — грунт, но и либо демпфирующий эффект материала самой плиты, либо «точечное» сопротивление любой внешней среды.

Преобразованием инверсии

$$x = x_0/(x_0^2 + y_0^2), \quad y = y_0/(x_0^2 + y_0^2) \tag{3}$$

можно пользоваться для моделирования задач (1), (2). Действительно, подставив в (1), (2) вместо x, y их выражения через x_0, y_0 согласно (3) и вместо φ, w

$$\varphi\,(x, y) = \varphi_0(x_0, y_0)/(x_0^2 + y_0^2), \qquad w\,(x, y, t) = w_0\,(x_0, y_0, t)/(x_0^2 + y_0^2) \tag{4}$$

придем к уравнениям прежнего, физического типа, но уже с «новым» $e_0\,(x_0, y_0)$, $q_0\,(x_0, y_0, t)$, $\rho_0\,(x_0, y_0)$, $p_0\,[\;\;]$. В соответственных точках

$$e_0 = e/(x_0^2 + y_0^2)^3 \tag{5}$$

$$q_0 = q/(x_0^2 + y_0^2)^3 \tag{6}$$

$$\rho_0 = \rho/(x_0^2 + y_0^2)^4 \tag{7}$$

$$p_0\,[w_0\,(t^*)]_{t^*=0}^{t^*=t} = \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^3}\, p\left[\frac{w_0\,(t^*)}{x_0^2 + y_0^2}\right]_{t^*=0}^{t^*=t} \tag{8}$$

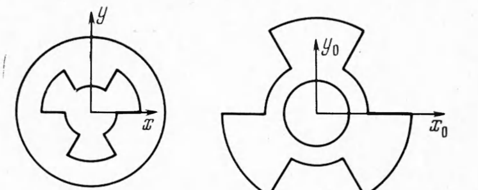
Граничные и начальные условия новых задач просто выражаются через условия исходных задач (в случае плоской задачи — с точностью до гидростатического сжатия).

Таким образом, если задана задача типа (1) или (2), можно на основании (3)—(8) выбрать любое из «инверсионных» тел, получить решение (математическое, экспериментальное или смешанное), а затем результаты пересчитать на исходное тело. В частных случаях тело с неравномерным тепловыделением или плита с неравномерной массой и неоднородным основанием могут быть сведены к моделям с постоянными e_0, ρ_0 и $p_0\,[\;\;]$. Пусть, например, необходимо определить собственные частоты и собственные формы колебаний плиты (фигура, *а*) с $\rho = 1/(x^2 + y^2)^4$. После инверсии придем к задаче для плиты (фигура, *б*) с $\rho_0 = \mathrm{const}$, эксперимент на которой производить легче; или пусть плита на фигуре, *а* имеет неоднородное нелинейно-упругое основание с характеристикой

$$p(w) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} f\left(\frac{w}{x^2+y^2}\right)$$

где $f(\quad)$ — произвольная функция своего аргумента. После инверсии придем к задаче о плите (фигура, *б*) с однородным основанием $p_0(w_0) = f(w_0)$. В случае вязкоупругости доказательство аналогично.

Указанный в статье факт, что инверсией можно пользоваться для моделирования задач (1), (2), не является тривиальным, так как есть множество задач с уравнениями, близкими к (1), (2), которые при инверсии «теряют» свой физический тип (например, задача об устойчивости плиты), и множество задач, которые хотя и «сохраняют» свой физический тип, но граничные условия в них при преобразовании не переходят одно в другое (например, та же задача (2), но с «силовыми» граничными условиями). В последних также невозможно пользоваться инверсией для моделирования, так как до решения исходной задачи не известны граничные условия в модели.



а *б*

Рассмотрим случай материалов, обладающих круговой ортотропией. Контур тела или плиты и контурные условия могут, разумеется, не обладать круговой симметрией. Так как уравнения однотипны, запишем только уравнение изгиба плиты [5]

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2D_{r\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial\theta^2} + D_\theta \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + 2D_r\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2D_{r\theta}\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2} -$$
$$-D_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 2(D_\theta + D_{r\theta})\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + D_\theta\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} = q - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p\,[w(t^*)]_{t^*=0}^{t^*=t} \qquad (9)$$

Здесь r, θ — полярные координаты, D_r, D_θ, $D_{r\theta}$ — упругие константы, записанные в локальных ортонормированных базисах. Преобразование (3), (4) не меняет вида уравнения (9) (изменяется правая часть согласно (6)—(8)). Заметим, что уравнение типа (9) было бы инвариантно относительно (3), (4) и в том случае, если бы в его левой части было не три независимых постоянных коэффициента, а пять (при всех четвертых и вторых производных).

Граничные условия в рассматриваемых задачах, совпадающие с условиями в случае изотропных тел, преобразуются просто, поэтому инверсией можно пользоваться для моделирования.

Поступила 1 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Levi-Civita T. Sopra una transformazione in se stessa della equazione Δ/2 Δ/2 = 0. Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, 1897—1898, Ser. 7, t. 9, pp. 1399—1410.
2. Michell J. H. The inversion of plane stress. Proc. London Math. Soc., 1902, vol. 34, p. 134.
3. Michell J. H. The flexure of a circular plate. Proc. London Math. Soc., 1902, vol. 34, pp. 223—238.
4. Olszak W., Mroz Z. Elastic bending of a circular plates with eccentric holes (application of rhe method of inversion). Arch. Mech. Stosowanej, 1957, t. 9, No. 2.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.—Л., Гостехиздат, 1947.