УДК 532.51

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев

(*Красноярск*)

В работе исследуется эволюция малых возмущений идеальной несжимаемой жидкости с учетом сил поверхностного натяжения в случае, когда основное движение представляет собой неустановившееся движение сферического слоя со свободными границами.

1. Описание основного движения. Пусть в момент $t = 0$ идеальная несжимаемая жидкость заполняет сферический слой $0 < r_{10} \leqslant r \leqslant r_{20}$ с заданным полем скоростей $u_r = T_0/r^2$, $u_\theta = u_\varphi = 0$. Здесь r_{10}, r_{20}, T_0 — постоянные, u_r, u_θ, u_φ — компоненты скорости в сферической системе координат (r, θ, φ). Предположим, что при $t > 0$ движение также сферически-симметричное: $u_r = u_r(r, t)$, $u_\theta = u_\varphi = 0$. Тогда такое движение с учетом сил поверхностного натяжения и перепада давления на внутренней и внешней границах слоя описывается формулами

$$(1.1)\qquad p = \rho_0\alpha(t) + \rho_0\left(\frac{1}{r}\frac{dT}{dt} - \frac{T^2}{2r^4}\right),\quad u_r = \frac{T(t)}{r^2},\quad r_1(t) \leqslant r \leqslant r_2(t);$$

$$(1.2)\qquad p(r_2(t), t) - p(r_1(t), t) = P(t) + \frac{2\sigma_1}{r_1(t)} + \frac{2\sigma_2}{r_2(t)};$$

$$(1.3)\qquad \frac{dr_1}{dt} = \frac{T(t)}{r_1^2},\quad \frac{dr_2}{dt} = \frac{T(t)}{r_2^2};$$

$$(1.4)\qquad T(0) = T_0,\ r_1(0) = r_{10},\ r_2(0) = r_{20},$$

где $r_1(t)$, $r_2(t)$ — радиусы; σ_1, σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения внутренней и внешней границ слоя соответственно (вообще говоря, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, поскольку внутри и вне слоя могут быть различные среды); $P(t)$ — заданный перепад давления; ρ_0 — плотность жидкости; $\alpha(t)$ — произвольная функция. Выражение для радиальной скорости u_r в (1.1) находится из уравнения неразрывности, а давление p — интегрированием уравнения движения. Соотношения (1.2), (1.3) — динамическое и кинематическое условия на свободных границах слоя $r = r_1(t)$, $r = r_2(t)$, с начальными данными (1.4) они служат для определения неизвестных функций $T(t)$, $r_1(t)$, $r_2(t)$. Величины $r_1(t)$ и $r_2(t)$ связаны конечным соотношением — законом сохранения объема слоя V

$$r_2^3 - r_1^3 = 3V/4\pi = r_{20}^3 - r_{10}^3,$$

которое непосредственно вытекает из (1.3), (1.4).

При $P = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ в [1] получены приближенные выражения для $r_1(t)$, $r_2(t)$, $T(t)$ в случае тонкого слоя $\left(h/r_{10}^3 \ll 1,\ h = r_{20}^3 - r_{10}^3\right)$ и толстого слоя $\left(r_{10}^3/h \ll 1\right)$. Так, для тонкого сжимающегося слоя

$$(1.5)\qquad r_1(t) = r_{10}\left[1 - a_1 t - \frac{h}{6r_{10}^3}\frac{1}{(1 - a_1 t)^2} + \frac{h}{6r_{10}^3}\right],\quad a_1 = \frac{T_0}{r_{10}}\left(\frac{r_{10}^{-1} - r_{20}^{-1}}{h}\right)^{1/2},$$

$$r_2(t) = r_{20}\left[1 - a_2 t + \frac{h}{6r_{20}^3}\frac{1}{(1-a_2t)^2} - \frac{h}{6r_{20}^3}\right], \quad a_2 = \frac{r_{10}}{r_{20}}a_1,$$

$$T(t) = -a_1 r_{10}^3\left[(1-a_1t)^2 + \frac{h}{3r_{10}^3}\right].$$

Для толстого слоя формулы выглядят более громоздкими.

Как пример исследования неустановившегося движения жидкости со свободными границами методом лагранжевых координат в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ эта задача рассматривалась в [2]. Движение сферического слоя под действием только капиллярных сил ($\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, $P = 0$, $T_0 = 0$) рассматривалось в работе [3], где приведен график безразмерного времени схлопывания слоя в зависимости от отношения r_{10}/r_{20}.

Для определения закона движения введем новую функцию $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = 3\int_0^t T(t)\,dt, \qquad \gamma(0) = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.3), (1.4) находим

$$r_1 = (r_{10}^3 + \gamma(t))^{1/3}, \quad r_2 = (r_{20}^3 + \gamma(t))^{1/3}. \tag{1.7}$$

Подставляя в (1.2) выражение для давления и используя (1.6), (1.7), приходим к задаче Коши относительно функции $\gamma(t)$

$$\begin{gathered}[(r_{20}^3+\gamma)^{-1/3} - (r_{10}^3+\gamma)^{-1/3}]\gamma'' - \frac{1}{6}[(r_{20}^3+\gamma)^{-4/3} - \\ - (r_{10}^3+\gamma)^{-4/3}](\gamma')^2 = \frac{6\sigma_1}{\rho_0}(r_{10}^3+\gamma)^{-1/3} + \frac{6\sigma_2}{\rho_0}(r_{20}^3+\gamma)^{-1/3} + \frac{3P(t)}{\rho_0};\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\gamma(0) = 0, \ \gamma'(0) = 3T_0. \tag{1.9}$$

Ограничимся случаем постоянного перепада давления $P(t) = P_0 = \mathrm{const}$. Уравнение (1.8) интегрируется:

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{6}{\rho_0}\frac{D - 3\sigma_1(r_{10}^3+\gamma)^{2/3} - 3\sigma_2(r_{20}^3+\gamma)^{2/3} - P_0\gamma}{[(r_{10}^3+\gamma)^{-1/3} - (r_{20}^3+\gamma)^{-1/3}]}, \tag{1.10}$$

$$D = \frac{3}{2}\rho_0 T_0^2(r_{10}^{-1} - r_{20}^{-1}) + 3\sigma_1 r_{10}^2 + 3\sigma_2 r_{20}^2.$$

Ясно, что при $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ функция $\gamma(t)$ для $T_0 > 0$ монотонно возрастает до некоторого момента времени $t = t_1$, а затем убывает и $\gamma(t) \to -r_{10}^3$, когда $t \to t_2 < \infty$. При этом слой вначале расходится и достигает в момент $t = t_1$ максимального радиуса $r_{1*} = (r_{10}^3 + \gamma_*(t_1))^{1/3}$, где γ_* определяется из равенства

$$3\sigma_1(r_{10}^3+\gamma_*)^{2/3} + 3\sigma_2(r_{20}^3+\gamma_*)^{2/3} + P_0\gamma_* = D, \tag{1.11}$$

а затем сходится к центру под действием капиллярных сил за конечное время $t = t_2 - t_1$. Для $T_0 \leqslant 0$ слой сразу сходится к центру за конечное время.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $P_0 = 0$ (инерционное движение слоя) и $T_0 > 0$, то $\gamma(t)$ монотонно возрастает, $\gamma \to \infty$, $t \to \infty$, слой расходится до бесконечности, толщина его стремится к нулю: $r_2(t) - r_1(t) \sim (h\gamma^{-2/3})/3$. Для $T_0 < 0$ происходит схлопывание за конечное время t_3, определяемое по формуле

$$t_3 = \sqrt{\frac{\rho_0}{6D}}\int_{-r_{10}^3}^{0}\sqrt{(r_{10}^3+\gamma)^{-1/3} - (r_{20}^3+\gamma)^{-1/3}}\,d\gamma. \tag{1.12}$$

Можно рассматривать движение под действием только постоянного перепада давления P_0, когда, например, $p|_{r=r_2(t)} = P_0$, а внутренняя сфера $r = r_1(t)$ свободна. При этом достаточно в (1.2), (1.10), (1.11) положить $T_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

По известной функции $\gamma(t)$ однозначно находятся $T(t)$, $r_1(t)$, $r_2(t)$ согласно (1.6), (1.7), этим описание основного движения закончено, оно является потенциальным с потенциалом — $T(t)/r$.

Для дальнейшего потребуется запись основного движения (1.1) в лагранжевых координатах $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [2]:

$$\mathbf{x} = m(\rho, t)\,\xi,\quad \mathbf{u} = \mathbf{x}_t = m_t\xi\quad (\rho = |\xi|); \tag{1.13}$$

$$p/\rho_0 = \alpha(t) + \frac{\gamma''}{3}(\rho^3 + \gamma)^{-1/3} - \frac{(\gamma')^2}{18}(\rho^3 + \gamma)^{-4/3}, \tag{1.14}$$

где

$$m(\rho, t) = \rho^{-1}(\rho^3 + \gamma)^{1/3}, \tag{1.15}$$

а $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению (1.10).

В заключение этого пункта приведем значение радиуса r_{**}, при котором давление максимально:

$$r_{**} = [2(\gamma')^2/3\gamma'']^{1/3}.$$

Можно показать, что $r_1(t) < r_{**}(t) < r_2(t)$.

2. Уравнения малых возмущений сферического слоя. Как показано в работе [4], задача об эволюции малых возмущений произвольного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил может быть сведена к следующей:

$$\operatorname{div} M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi = 0,\quad \xi \in \Omega,\quad t \geqslant 0; \tag{2.1}$$

$$\rho_0\Phi_t = \left[\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}} + \sigma\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)\right]R + \sigma\overline{\Delta}_\Gamma(t)R,\quad \xi \in \Gamma,\quad t > 0; \tag{2.2}$$

$$R = \frac{|\nabla f|}{|M^{*-1}\nabla f|}\,\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{l} + \int_0^t M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi\,dt\right),\quad \xi \in \Gamma,\quad t \geqslant 0; \tag{2.3}$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0,\quad \Delta\Phi_0 = 0. \tag{2.4}$$

В (2.1) — (2.4) M — матрица Якоби отображения $\xi \to \mathbf{x}(\xi, t)$ начальной области Ω на область течения Ω_t при $t > 0$ с элементами $M_{ik} = \partial x_i/\partial\xi_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$; M^* — сопряженная матрица; Γ — граница Ω; $f(\xi) = 0$ — ее уравнение; $\mathbf{n}$ — нормаль к Γ; Γ_t — граница Ω_t; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны ее нормальных сечений; $\partial p/\partial n_{\Gamma_t}$ — производная по нормали к Γ_t от давления p. Кроме того, $\overline{\Delta}_\Gamma(t)$ — оператор Лапласа — Бельтрами с коэффициентами $E = |M\xi_\alpha|^2$, $G = |M\xi_\beta|^2$, $F = M\xi_\alpha\cdot M\xi_\beta$, где $(\alpha, \beta) \to \xi(\alpha, \beta)$ — некоторая регулярная параметризация границы Γ; $\mathbf{l}(\xi)$ $(\xi \in \Gamma)$ — вектор смещения точек границы, характеризующий начальное возмущение области течений.

По известной функции $\Phi(\xi, t)$ возмущения давления и скорости определятся в виде

$$\tilde{p} = -\rho_0\Phi_t,\quad \tilde{\mathbf{u}} = M^{*-1}\nabla\Phi. \tag{2.5}$$

Функция $R(\xi, t)$, $\xi \in \Gamma$, представляет собой отклонение свободной границы в возмущенном движении от свободной границы в основном [4]. В задачах об устойчивости обычно и интересуются поведением $R(\xi, t)$, $t \to \infty$. Поэтому вопрос об устойчивости некоторого потенциального течения есть вопрос об асимптотическом поведении решения задачи (2.1) — (2.4).

Решение задачи (2.1) — (2.4) при $\sigma > 0$ всегда существует и единственно, если основное движение и граница Г достаточно гладкие [4]. Если же $\sigma = 0$, то, как показывают соответствующие примеры [5], при $\partial p/\partial n_{\Gamma_t} > 0$ она некорректно поставлена по Адамару. Поверхностное натяжение является регуляризующим фактором.

В нашем случае область Ω есть сферический слой $r_{10} < \rho < r_{20}$ с границами $\Gamma_1(\rho = r_{10})$ и $\Gamma_2(\rho = r_{20})$, поэтому естественно положить $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\xi(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$.

Воспользуемся следующими формулами, которые имеют место для основного движения (1.13) — (1.15) [2]:

$$M = M^* = m\mathscr{E} - \frac{m^3 - 1}{m^2} Q, \quad M^{-1} = \frac{1}{m}\mathscr{E} + \frac{m^3 - 1}{m} Q,$$

где $\mathscr{E}$ — единичная матрица; Q — матрица с компонентами $Q_{ik} = \xi_i \xi_k/\rho^2$ $(i, k = 1, 2, 3)$, причем $Q^2 = Q$, $Q\xi = \xi$, $Q\nabla\Phi = \Phi_\rho \xi/\rho$. С помощью этих формул (2.1) преобразуется к виду

$$m^4 \left[\Phi_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}\frac{\rho^3 - \gamma}{\rho^3 + \gamma}\Phi_\rho + \frac{\rho^6}{(\rho^3 + \gamma)^2}\Delta_S\Phi\right] = 0, \tag{2.6}$$

где Δ_S — поверхностная часть оператора Лапласа

$$\Delta_S\Phi = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right].$$

Займемся преобразованием граничного условия (2.2), где надо положить $\sigma = \sigma_1$ при $\rho = r_{10}$, $\sigma = \sigma_2$ при $\rho = r_{20}$. Обозначая через $m_j(t) = m(r_{j0}, t)$ $(j = 1, 2)$, находим $E = (r_{j0} m_j)^2$, $G = (r_{j0} m_j \sin\theta)^2$, $F = 0$. Поэтому $\Delta_\Gamma(t) R = \Delta_S R/m_j^2$. Поскольку уравнение свободной границы Γ_j есть $f = \rho - r_{j0} = 0$ $(j = 1, 2)$, $1/R_1^2 + 1/R_2^2 = 2/r_{j0}^2 m_j^2$, $|\nabla f|/|M^{*-1}\nabla f| = 1/m_j^2$, $\mathbf{n}_1 = -\xi/r_{10}$, $\mathbf{n}_2 = \xi/r_{20}$ и из (1.1), (1.14), (2.3) получаем

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}}\right|_{r=r_1(t)} = \rho_0 r_{10} m_{1tt}, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}}\right|_{r=r_2(t)} = -\rho_0 r_{20} m_{2tt}, \tag{2.7}$$

$$R|_{r=r_1(t)} = \frac{1}{m_1^2}\left(a - \int_0^t m_1^4 \Phi_\rho dt\right), \quad R|_{r=r_2(t)} = \frac{1}{m_2^2}\left(b + \int_0^t m_2^4 \Phi_\rho dt\right), \tag{2.8}$$

$$a = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{l}|_{\Gamma_1}, \quad b = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{l}|_{\Gamma_2}.$$

Теперь граничное условие (2.2) даст два соотношения

$$\rho_0\Phi_t + \frac{\sigma_1}{m_1^4}\int_0^t m_1^4 \Delta_S \Phi_\rho dt + \frac{1}{m_1^2}\left(\rho_0 r_{10} m_{1tt} + \frac{2\sigma_1}{r_{10}^2 m_1^2}\right)\int_0^t m_1^4 \Phi_\rho dt = \tag{2.9}$$

$$= \frac{\sigma_1}{m_1^4}\Delta_S a + \frac{1}{m_1^2}\left(\rho_0 r_{10} m_{1tt} + \frac{2\sigma_1}{r_{10}^2 m_1^2}\right) a, \quad \rho = r_{10};$$

$$\rho_0\Phi_t - \frac{\sigma_2}{m_2^4}\int_0^t m_2^4 \Delta_S \Phi_\rho dt - \frac{1}{m_2^2}\left(\frac{2\sigma_2}{r_{20}^2 m_2^2} - \rho_0 r_{20} m_{2tt}\right)\int_0^t m_2^4 \Phi_\rho dt = \tag{2.10}$$

$$= \frac{\sigma_2}{m_2^4}\Delta_S b + \frac{1}{m_2^2}\left(\frac{2\sigma_2}{r_{20}^2 m_2^2} - \rho_0 r_{20} m_{2tt}\right) b, \quad \rho = r_{20}.$$

Итак, для анализа поведения малых возмущений сферического слоя требуется найти функцию $\Phi(\rho, \theta, \varphi, t)$ как решение начально-краевой задачи (2.6), (2.9), (2.10), (2.4).

3. Инерционное движение слоя. В этом случае $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, слой либо расходится до бесконечности, либо сходится к центру за конечное время t_3, определяемое по формуле (1.12).

Следует отметить, что при этом задача (2.6), (2.9), (2.10), (2.4) корректно поставлена, поскольку в силу (1.3), (1.13), (2.7)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}}\right|_{r=r_1(t)} = \frac{\rho_0 r_2 T^2}{2r_1^5(r_1 - r_2)}(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 3) < 0, \quad \lambda = \frac{r_1}{r_2},$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}}\right|_{r=r_2(t)} = \frac{\rho_0 T^2}{2r_2(r_1 - r_2) r_1^3}(\lambda - 1)^2(3\lambda^2 + 2\lambda + 1) < 0$$

на точном решении. Однако можно показать, что для приближения (1.5) $\partial p/\partial n_{\Gamma_t} = \rho_0 r_{10}^{-2} a_1^2 h (1 - a_1 t)^{-4} > 0$, $r = r_1(t)$ и линеаризированная задача некорректна по Адамару на этом приближении.

Приступим к анализу уравнений малых возмущений. Так как в (2.6), (2.9), (2.10) переменные (ρ, t), θ, φ разделяются, то положим

$$(3.1) \qquad \Phi(\rho, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_{nk}(\rho, t) P_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где $P_{nk}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Ограничившись одной гармоникой и обозначив для краткости $A(\rho, t) = A_{nk}(\rho, t)$, из (2.6) получим

$$(3.2) \qquad A_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}\frac{\rho^3 - \gamma}{\rho^3 + \gamma}A_\rho - \frac{\rho^4 n(n+1)}{(\rho^3 + \gamma)^2}A = 0$$

— уравнение для $A(\rho, t)$. Общее решение этого уравнения представляется в виде

$$(3.3) \qquad A = C_1(t)(\rho^3 + \gamma)^{-n/3} + C_2(t)(\rho^3 + \gamma)^{\frac{n+1}{3}}$$

с произвольными функциями $C_1(t)$, $C_2(t)$. Граничные условия порождают следующие соотношения:

$$(3.4) \qquad \left(\frac{m_j^2}{m_{jtt}}A_t'\right)_t' + m_j^4 r_{j0} A_\rho' = 0, \quad \rho = r_{j0} \quad (j = 1, 2).$$

Перейдем к независимой переменной $\tau(t) = r_{10}^3 + \gamma(t)$ вместо t. В силу (1.10), где надо положить $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $P_0 = 0$, соответствие между τ и t взаимно-однозначно при $t \geqslant 0$. Обозначим $A_1 = A(r_{10}, \tau)$, $A_2 = A(r_{20}, \tau)$ и выразим функции $C_1(t)$, $C_2(t)$ с помощью равенства (3.3) через $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$. Кроме того, найдем из (3.3) A_ρ при $\rho = r_{10}$, r_{20}. В результате этих преобразований окончательно получим систему уравнений второго порядка относительно функций $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$

$$(3.5) \qquad \left(\frac{m_1^2}{m_{1tt}}A_{1\tau}'\right)_\tau' g + \frac{m_1^4 r_{10}^3}{\Delta(\tau)}\left\{\left[(2n+1)\tau^{\frac{n-2}{3}}(h+\tau)^{n/3}\right]A_2 - \left[(n+1)\tau^{\frac{2n-2}{3}} + n\tau^{-1}(h+\tau)^{\frac{2n+1}{3}}\right]A_1\right\} = 0;$$

$$(3.6) \qquad \left(\frac{m_2^2}{m_{2tt}}A_{2\tau}'\right)_\tau' g + \frac{m_2^4 r_{20}^3}{\Delta(\tau)}\left\{\left[(n+1)(h+\tau)^{\frac{2n-2}{3}} + n\tau^{\frac{2n+1}{3}}(h+\tau)^{-1}\right]A_2 - \left[(2n+1)\tau^{n/3}(h+\tau)^{\frac{n-2}{3}}\right]A_1\right\} = 0,$$

где положено

(3.7) $g(\tau) = \sqrt{\frac{6D}{\rho_0}}\,[\tau^{-1/3} - (h+\tau)^{-1/3}]^{-1/2}, \quad \Delta(\tau) = (h+\tau)^{\frac{2n+1}{3}} - \tau^{\frac{2n+1}{3}}.$

Для построения возмущенного движения к системе следует добавить начальные условия

(3.8) $A_1 = A_{10}, \quad A_2 = A_{20}, \quad A'_{1\tau} = \frac{r_{10}m_{1tt}(0)}{g(r_{10}^3)}a_{nk}, \quad A'_{2\tau} = \frac{r_{20}m_{2tt}(0)}{g(r_{10}^3)}b_{nk}$

при $\tau = r_{10}^3$. Здесь функция $g(\tau)$ дается формулой (3.7), а постоянные a_{nk}, b_{nk} — коэффициенты ряда Фурье по сферическим гармоникам начальных отклонений поверхностей слоя $a(\theta, \varphi)$, $b(\theta, \varphi)$. По-прежнему ограничиваясь одной гармоникой, из (2.8) — (2.10) находим (напомним, что $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)

(3.9) $R_{nk} = -\frac{1}{r_{j0}m_{jtt}}\, g(\tau)\, A'_{j\tau} P_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi} \qquad (j = 1, 2).$

Можно показать, пользуясь явными выражениями для $m_j(\tau)$, $g(\tau)$, что коэффициенты системы (3.5), (3.6) имеют при $\tau \to \infty$ (расходящийся слой), $\tau \to 0$ (сходящийся слой) степенные особенности. Например, при $\tau \to \infty$ асимптотическое поведение $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ такое же, как у функций $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, удовлетворяющих системе

$$(\tau^{8/3}\bar{A}'_{1\tau})'_\tau + \frac{1}{3}\tau^{2/3}(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) = 0, \quad (\tau^{8/3}\bar{A}'_{2\tau})'_\tau - \frac{1}{3}\tau^{2/3}(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) = 0.$$

Последняя система легко решается, и для отклонения свободной границы из (3.9) находим вне зон $|\theta| < \varepsilon$, $|\pi - \theta| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ фиксировано)

(3.10) $R_{nk}|_{r=r_j(t)} \sim d_{nk}\tau^{1/3}P_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi} \quad (j = 1, 2), \; d_{nk} = \mathrm{const},$

т. е. обе поверхности неустойчивы при расширении.

При сжатии $\tau \to 0$, и можно показать, что $A_2 \sim d_1 + d_2\tau^{1/2}$ при $n = 1$, $A_2 \sim d_1 + d_2\tau^{1/6}$ при $n \geqslant 2$ (d_1, d_2 — постоянные), $A_1 \sim \tau^{-(n+2)/3}$ при $n \geqslant 1$. Используя (3.9), (3.7), найдем вне зон $|\theta| < \varepsilon$, $|\pi - \theta| < \varepsilon$

(3.11) $R_{nk}|_{r=r_1(t)} \sim d_{nk,1}\tau^{-(2n+1)/6}P_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}, \quad d_{nk,1} = \mathrm{const};$

(3.12) $R_{nk}|_{r=r_2(t)} \sim d_{nk,2}\tau^{2/3}P_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}, \quad d_{nk,2} = \mathrm{const},$

т. е. при сжатии слоя внешняя поверхность устойчива, а внутренняя нет.

Рассмотрим поведение R_{nk} при $\tau \to \infty$ ($\tau \to 0$), $\theta \to 0$ (анализ $\theta \to \pi$ проводится аналогично). Если $k \geqslant 1$ и $|\theta|^k\tau^{1/3-\delta} = \mathrm{const}$, $1/3 \geqslant \delta \geqslant 0$, то из (3.10) $R_{nk} \sim \tau^{-\delta}$, $\tau \to \infty$. При $k \geqslant 1$ и $|\theta|^k\tau^{-(2n+1)/6+\delta} = \mathrm{const}$ из (3.11) $R_{nk} \sim \tau^{\delta}$, $\tau \to 0$. Из этого анализа заключаем, что существуют узкие зоны устойчивости границ слоя вблизи полюсов $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Аналогичные зоны устойчивости существуют и вблизи узловых линий, присоединенных функцией Лежандра.

Так же ограничиваясь одной гармоникой из (2.5), выводим для возмущения давления: $\tilde{p}_{nk} \sim \tau^{-1}$, $\tau \to \infty$, $\tilde{p}_{nk} \sim \tau^{-(2n+3)/3}$, $\tau \to 0$. Согласно (2.5), для поля скорости, возникающего при возмущении течения (1.1), получим

$$(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\varphi) = (m^2\Phi_\rho, (m\rho)^{-2}\Phi_\theta, (m\rho\sin\theta)^{-2}\Phi_\varphi),$$

откуда для одной гармоники

$$(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\varphi)_{nk} \sim (\mu_1(\tau), \tau^{-4/3}\mu_2(\tau), \tau^{-4/3}\mu_3(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

где $\mu_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) — ограниченные функции. При сжатии

$$(\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\varphi)_{nk} \sim \tau^{-2n/3}(\nu_1(\tau), \tau^{-4/3}\nu_2(\tau), \tau^{-4/3}\nu_3(\tau)),$$

$\nu_i(\tau)$ — ограниченные при $\tau \to 0$ функции.

Эти выводы отличаются от результатов работы [1]. Дело в том, что вблизи критической точки $\tau = 0$ (или $\tau = \infty$) отношение h/τ (или τ/h) немало для тонкого (толстого) слоя и разложение по малому параметру h/r_{10}^3 (или r_{10}^3/h) в возмущенном движении, которое использовалось для упрощения анализа задачи в [1], неверно. Полученные в [1] выражения для R_{n0} верны лишь на начальном этапе развития возмущений границ тонкого (толстого) слоя, движущегося по инерции.

Пусть $\Phi_0 \in W_2^1(\Omega)$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, тогда из «интеграла энергии» [6] можно вывести оценки, не решая задачу (2.6), (2.9), (2.10), (2.4):

$$\int_\Gamma \Phi_t^2 d\Gamma \sim \tau^{-4/3}, \quad \int_\Omega \Phi_\rho^2 d\Omega \sim \tau^{-2/3}, \quad \tau \to \infty. \tag{3.13}$$

Напомним, что $\tau = r_{10}^3 + \gamma$, а $\gamma(t)$ определяется из (1.10), где надо положить $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Итак, если за меру устойчивости взять интегральные величины (3.13), то движение слоя при расширении следует признать устойчивым.

4. Схлопывание под действием капиллярных сил. Внутри слоя функция $\Phi(\rho, \theta, \varphi, t)$ по-прежнему представима в виде ряда (3.1), где $A_{nk}(\rho, t) = A(\rho, t)$ даются равенством (3.3). Отличие состоит в граничном условии (2.9), (2.10). Полагая $A(r_{10}, \tau) = A_1(\tau)$, $A(r_{20}, \tau) = A_2(\tau)$, получим систему вида (3.5), (3.6), где надо заменить выражения

$$m_1^2/m_{1tt},\ m_2^2/m_{2tt} \text{ на } \{m_1^{-2}m_{1tt} + r_{10}^{-3}m_1^{-4}\rho_0^{-1}\sigma_1[2 - n(n+1)]\}^{-1}$$
$$\text{и } \{m_2^{-2}m_{2tt} + r_{20}^{-3}m_2^{-4}\rho_0^{-1}\sigma_2[n(n+1) - 2]\}^{-1}$$

соответственно. Кроме того, функция $g(\tau)$ здесь будет

$$g^2(\tau) = \frac{6}{\rho_0}\frac{D - 3\sigma_1\tau^{2/3} - 3\sigma_2(h+\tau)^{2/3}}{\tau^{-1/3} - (h+\tau)^{-1/3}}.$$

Исследование полученной системы показывает, что при $\tau \to 0$ $(\gamma \to -r_{10}^3)$ главные члены асимптотик функций A_1, A_2 для любого фиксированного n совпадают с главными членами асимптотик системы (3.5), (3.6). Тем самым внутренняя поверхность неустойчива, однако для достаточно высоких гармоник с $n \gg \tau^{-1/3}$ капиллярные силы ограничивают рост возмущений: $|R_{nk}| < \infty$.

Таким образом, поверхностное натяжение несколько снижает неустойчивость, не устраняя ее полностью. Аналогичный эффект имеет место в случае схлопывающейся сферической каверны [7] и вращающегося кольца [8]. В этих примерах, по-видимому, неустойчивость связана, по терминологии [9], с глобальной особенностью, которая образуется в процессе движения схлопыванием, когда за конечное время нарушается топология области течения Ω_t.

Поступила 19 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hunt J. H.** Instability in a spherical fluid sheel.— Appl. Scient. Res., ser. A, 1961, vol. 10, N 1.
2. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры.— В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск, Наука, 1967.

3. **Классен Л. Г.** О схлопывании полости в идеальной несжимаемой жидкости силами поверхностного натяжения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 14. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
4. **Андреев В. К.** Малые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей с учетом капиллярных сил.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
5. **Андреев В. К., Пухначев В. В.** О движении конечной массы жидкости.— ПМТФ, 1979, № 2.
6. **Андреев В. К.** Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 13. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
7. **Binnie A. M.** The stability of the surface of a cavitation bubble.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1953, vol. 49.
8. **Меньщиков В. М.** О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией.— ПМТФ, 1979, № 2.
9. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М., Наука, 1973.

УДК 532.517.4

РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Ю. М. Давыдов, М. С. Пантелеев

(Москва)

Исследование рэлей-тейлоровской неустойчивости (РТН) является весьма актуальной задачей. Помимо несомненного теоретического интереса, оно имеет большое значение для ряда важных практических проблем, например для изучения устойчивости сжатия оболочек в задачах лазерного термоядерного синтеза, при получении сверхсильных магнитных полей и др.

В развитии РТН прослеживаются следующие ярко выраженные стадии: линейная, промежуточная, регулярная асимптотическая и турбулентная [1, 2]. Линейная стадия характеризуется малостью амплитуды a по сравнению с длиной волны возмущения L и экспоненциальной скоростью роста. Когда величина амплитуды возмущения a достигает 0,4 L, процесс вступает в стадию, промежуточную между линейной и регулярной асимптотической. На регулярной асимптотической стадии, наступающей при $a \approx 0{,}75\,L$, окончательно формируются «пики» тяжелой жидкости, проваливающиеся с постоянным ускорением, и «пузыри» легкой жидкости, всплывающие с постоянной скоростью. Эта стадия РТН является неустойчивой [1, 2] и сменяется турбулентной стадией, в ходе которой происходит интенсивное взаимодействие возмущений различных длин волн и перемешивание жидкости.

РТН наиболее исследована для случая плоской поверхности раздела и стремящегося к бесконечности отношения плотностей тяжелой и легкой жидкостей. Линейная стадия подробно изучена в классических работах [3—5], регулярная асимптотическая — в [6—8], в [9] развита феноменологическая теория турбулентной стадии, а в [2] высказаны некоторые соображения о механизме ее образования.

Однако аналитического математического аппарата для анализа в целом столь сложного явления, как РТН, недостаточно, экспериментальные исследования весьма трудоемки. Наиболее полная информация может быть получена из численных расчетов; так, случай свободной поверхности изучался в [10], случай двух несжимаемых жидкостей — в [11], двух сжимаемых сред — в [12]. Отметим также [13], где проводится численный расчет РТН сжимаемой оболочки.

До сих пор во всех как аналитических, так и вычислительных работах исследовался только двумерный случай. Однако двумерная модель неадекватна физике явления: в физическом эксперименте двумерные структуры разрушаются из-за поперечной коротковолновой неустойчивости и превращаются в трехмерные.