ПМТФ, № 2, 1973

УДК 532.526 : 536.244

ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ СОВМЕСТНОЙ КОНВЕКЦИИ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. И. Дубовик

(Москва)

Исследованы поле скоростей и теплообмен около вертикальной проницаемой поверхности в условиях совместной конвекции. Найдено подобное решение уравнений пограничного слоя при известных законах изменения температуры поверхности и скорости потока. Преобразованные уравнения пограничного слоя содержат параметр G/R^2, определяющий влияние свободной конвекции на трение и теплообмен при вынужденном движении. Представлены результаты расчетов трения и теплообмена в зависимости от вдува (отсоса) при совместной конвекции.

Изучение конвективного теплообмена в литературе ограничивается рассмотрением вынужденного движения, когда велики скорости переноса количества движения, или естественной конвекции, когда имеется перепад температур между поверхностью и средой. Представляют интерес малоизученные течения с небольшой скоростью и разностью температур, обеспечивающей подъемные силы, и связанное с ними свободное движение, которое оказывает влияние как на теплообмен, так и на касательное напряжение.

Поля скорости и температуры около вертикальной поверхности описываются основными законами сохранения массы, количества движения и энергии. Дифференциальные уравнения несжимаемого ламинарного пограничного слоя, описывающие совместную конвекцию, при постоянстве физических параметров среды, за исключением плотности, зависящей от температуры в члене, выражающем свободное движение, и при пренебрежении вязкой диссипацией имеют следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} + g\beta_T(T - T_\infty) \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

с граничными условиями

$$u = 0,\ \ v = v_w,\quad T = T_w \text{ при } y = 0$$

$$u = U_\infty,\quad T = T_\infty \text{ при } y \to \infty \qquad (2)$$

Уравнения (1) написаны для системы координат, у которой ось x направлена вдоль поверхности вверх, а ось y нормальна к ней; при этом в (1) и (2) принято: u и v — составляющие скорости по осям, ν — кинематическая вязкость, p — давление, T — температура, a — коэффициент температуропроводности, g — ускорение силы тяжести, β_T — коэффициент теплового расширения, индексы w и ∞ — значения на поверхности и на внешней границе пограничного слоя.

Для определенности положим, что температура поверхности больше температуры среды ($T_w > T_\infty$). Рассмотрим движение, когда скорость потока и температура поверхности задаются зависимостями

$$U_\infty = Cx^m \tag{3}$$

$$T_w - T_\infty = Bx^n \tag{4}$$

где C, B, m и n — постоянные величины.

С учетом этих выражений решим систему дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2), сводя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям для совместной конвекции произведем при помощи независимой переменной

$$\eta = C_1 y x^\beta \tag{5}$$

и функции тока

$$\Psi = C_2 x^\alpha f(\eta) \tag{6}$$

такой, что выполняются условия

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{7}$$

В выражениях (5) и (6) C_1, C_2, α и β — неизвестные величины, подлежащие определению.

Определив согласно (7) компоненты скорости

$$u = C_1 C_2 x^{\alpha+\beta} f'(\eta) \tag{8}$$

$$v = -C_2 x^{\alpha-1} [\alpha f(\eta) + \eta\beta f'(\eta)]$$

и их производные и подставляя в систему уравнений (1), после несложных преобразований получаем уравнения в безразмерном виде

$$f'''(\eta) + (m+1) f(\eta) f''(\eta) - 2mf'^2(\eta) + 8\left[m + \frac{G}{R^2}\theta(\eta)\right] = 0 \tag{9}$$

$$\theta''(\eta) + P[(m+1) f(\eta)\theta'(\eta) - (4m-2) f'(\eta)\theta(\eta)] = 0 \tag{10}$$

где $\theta(\eta) = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ — безразмерная температура,

$$G = \frac{g\beta_T (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}, \qquad R = \frac{U_\infty x}{\nu}, \qquad P = \frac{\nu}{a}$$

— числа Грасгофа, Рейнольдса и Прандтля, а штрих означает дифференцирование по η.

Граничные условия в новых переменных имеют вид

$$f(0) = 0, \ f_w = \text{const}, \ \theta = 1 \ \text{при} \ \eta = 0$$

$$f'(\infty) = 2, \ \theta = 0 \ \text{при} \ \eta \to \infty$$

Переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям возможен при выполнении условия

$$n = 2m - 1 \tag{11}$$

и определении неизвестных величин в (5) и (6) следующим образом:

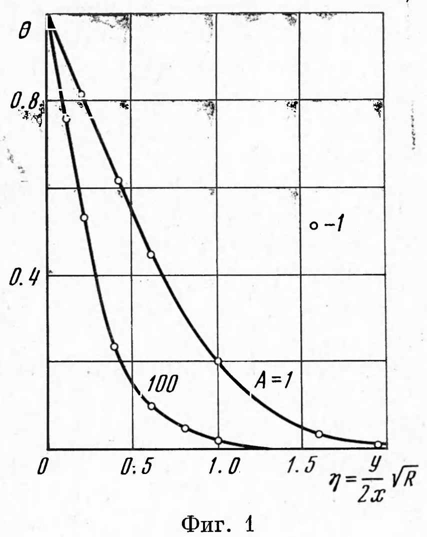
$$\alpha = (m+1) / 2 = (n+3) / 4, \ \beta = (m-1) / 2 = (n-1) / 4$$

$$C_1 = 0.5\, (C / \nu)^{0.5}, \quad C_2 = (C\nu)^{0.5}$$

Граничное условие $f_w = \text{const}$, которое необходимо при преобразовании, означает, что $v_w \sim x^{(m-1)/2}$ [1, 2]. Из второго выражения (8) находим параметр вдува (отсоса)

$$f_w = -\frac{2v_w}{(m+1)U_\infty}\sqrt{R}$$

В преобразованном уравнении движения (9) появился параметр $G / R^2 = A$, отображающий влияние свободной конвекции на трение и теплообмен. При $A = 0$ уравнения (9) и (10) описывают вынужденную конвекцию.



Фиг. 1

Система обыкновенных уравнений (9) и (10) решена численным методом итераций с применением прогонки для краевых задач, возникающих на каждой итерации [3]. В результате получены безразмерные распределения скорости и температуры в пограничном слое при совместной конвекции и вдуве (отсосе) для $P = 0.7$, $m = 0.5$ и $n = 0$.

На фиг. 1 сравниваются безразмерные профили температуры в пограничном слое при совместной конвекции с данными работы [4] (*1*), в которой решена задача о совместной конвекции около непроницаемой поверхности, для двух значений A.

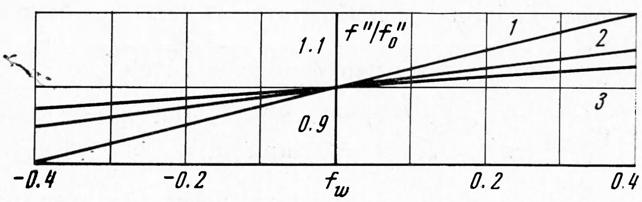
Поверхностное трение при условии, что с пористой поверхности происходит движение среды, определяется выражением [1]

$$\tau_w = \mu\,(\partial u / \partial y)_{y=0} - \rho v_w U_\infty$$

Это соотношение в преобразованных переменных позволяет получить безразмерный коэффициент трения

$$c_f R^{0.5} = 0.5 f''(0) + (m+1) f_w \quad (c_f = 2\tau_w / (\rho U_\infty^2)). \qquad (12)$$

Для расчета поверхностного трения по (12) величины $f''(0)$ вычислены на ЭВМ для различных значений определяющих параметров и представ-



Фиг. 2

лены на фиг. 2 в виде отношения $f_0'' / f''_0(0)$, при $P = 0.7$, где $f_0''(0)$ взято для непроницаемой поверхности, *1* соответствует $A = 0$, *2* — $A = 1$, *3* — $A = 10$.

Тепловой поток при совместной конвекции на вертикальной поверхности определяется по уравнению

$$q = -\lambda\,(\partial T / \partial y)_{y=0} \qquad (13)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

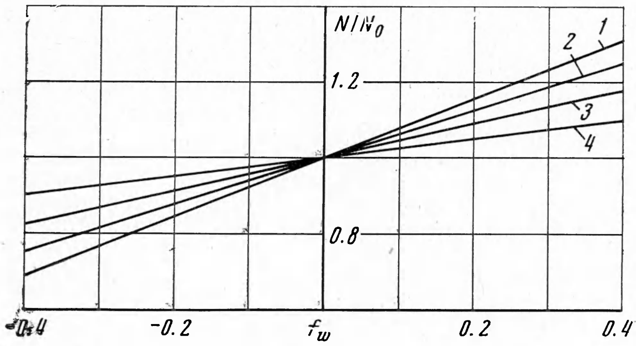
Данные по теплообмену представляются через локальный коэффициент теплообмена и локальное число Нуссельта

$$\alpha = q \,/\, (T_w - T_\infty), \quad N = (\alpha x) \,/\, \lambda$$

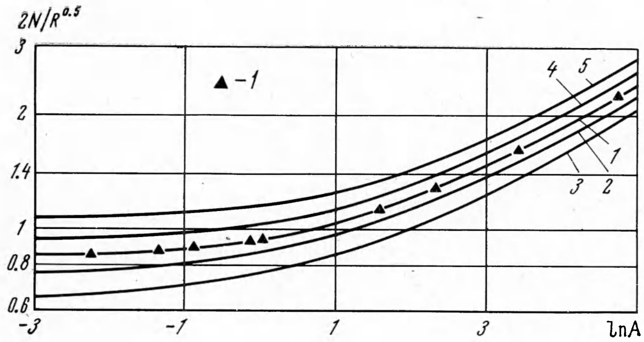
На основании этого для теплообмена имеем

$$N = -\,0.5R^{0.5}\theta'(0) \tag{14}$$

где величины $\theta'(0)$ вычислены для различных значений определяющих параметров A и f_w.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 даны результаты расчетов теплообмена при совместной конвекции: кривая *1* соответствует значению $A = 0$, *2* — 1, *3* — 10 и *4* — 100 для $P = 0.7$. Число Нуссельта N_0 характеризует теплообмен около непроницаемой поверхности.

Сопоставление результатов (кривая *1*) по теплообмену на непроницаемой поверхности при $P = 0.7$ с данными [4] (*1*) представлено на фиг. 4. Здесь же нанесены расчетные данные по теплообмену при вдуве ($f_w = -\,0.1$ и -0.3 — кривые *2*, *3* соответственно) и отсосе ($f_w = 0.1$ и 0.3 — кривые *4*, *5* соответственно). Из анализа кривых теплообмена на фиг. 4 видно, что интенсивность теплообмена возрастает по мере роста свободной конвекции, что объясняется увеличением конвективных скоростей.

Исходя из того, что величина коэффициента трения при совместной конвекции отличается более чем на 5% от данных при чисто вынужденном течении, получен критерий для определения границы совместной конвекции при расчете поверхностного трения

$$G / R^2 \geqslant 0.03 f_w + 0.06 \tag{15}$$

Для определения границы совместной конвекции при вдуве (отсосе) при расчете теплообмена имеем

$$G / R^2 \geqslant 0.57 f_w + 0.3 \tag{16}$$

При значениях G / R^2, меньших чем вычисленные по формулам (15) и (16), в задачах расчета трения и теплообмена влияние свободной конвекции можно не учитывать.

Поступила 24 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М.— Л., Госэнергоиздат, 1961.
2. Кейс В. М. Конвективный тепло- и массообмен. М., «Энергия», 1972.
3. Брдлик П. М., Дубовик В. И. Ламинарная совместная конвекция бинарной смеси около вертикальной поверхности. ПМТФ, 1970, № 6.
4. Sparrow E. M., Eichhorn R., Gregg I. L. Combined forced and free convection in a boundary layer flow. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 3.