Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2006, том 42, № 5

УДК 519.7

РОБАСТНЫЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХСЯ СИСТЕМ *

С.-Л. Лю, Г.-Ж. Дуань

Center for Control Theory and Guidance Technology Harbin Institute of Technology, Harbin, China
E-mail: lxl8333205@sohu.com

Обсуждается синтез пропорционально-интегрального (ПИ) наблюдателя и робастное управление для переключающихся систем при произвольных последовательностях переключений. Для проверки асимптотической устойчивости переключающихся систем используется квадратичная функция Ляпунова. Разработаны два эквивалентных условия, которые могут гарантировать отслеживание ПИ-наблюдателями сигнала состояния. На основе этих условий выполнен синтез регулятора с обратной связью по переменным состояния, оцениваемым ПИ-наблюдателем. С помощью регулятора по состоянию стабилизируется замкнутая система. Кроме того, синтезирован робастный регулятор по состоянию с ПИ-наблюдателем, стабилизирующий переключающуюся систему с возмущениями. Приведен численный пример, иллюстрирующий реализуемость и преимущества ПИ-наблюдателя в переключающихся системах.

Введение. Переключающиеся системы – это класс гибридных динамических систем, состоящих из семейства непрерывных (или дискретных) подсистем и правила, которое определяет последовательность переключений между ними [1–3]. Анализу устойчивости и синтезу проектирования переключающихся систем посвящен ряд исследований. Обзор основных проблем, связанных с этими системами, представлен в [4]. Некоторые простые условия устойчивости, описываемые линейными матричными неравенствами, были получены в [5]. В работах [5–9] выполнен анализ и приведены некоторые теоретически обоснованные условия устойчивости переключающихся систем. Из большого разнообразия проблем, с которыми сталкиваются на практике, можно выделить три: существование правила переключения, которое может стабилизировать переключающуюся систему, условия устойчивости при произвольных последовательностях переключения и устойчивость

* Работа выполнена при содействии Китайского фонда поддержки выдающейся молодежи (грант № 69925308) и Китайского фонда по естественным наукам (гранты № 60374024 и № 60474015).

переключающихся систем при некоторых наиболее часто встречающихся классах последовательностей переключений.

Для получения быстрых и достаточно точных откликов от реальных процессов должны быть спроектированы соответствующие регуляторы и наблюдатели для замкнутых систем. Выполнен ряд исследований по робастной стабилизации [10–12]. В [13] рассмотрена проблема подавления возмущений в переключающихся системах. Пропорционально-интегральный (ПИ) наблюдатель для линейных инвариантных во времени систем в дискретно-временной области дан в [14]. Синтез пропорционально-интегрального наблюдателя в линейных системах описан в [15, 16]. Задача подавления возмущений и обнаружения ошибок (неисправностей) на основе пропорционально-интегрального наблюдателя решена в [17].

В предлагаемой работе рассматривается задача синтеза и расчета ПИ-наблюдателя для переключающихся систем в дискретной области. Сначала на основе переключающихся функций Ляпунова разработаны два эквивалентных условия, описываемые линейными матричными неравенствами и гарантирующие отслеживание сигнала состояния ПИ-наблюдателем. Хотя данные условия эквивалентны, их результаты имеют разную степень применимости. На основании этих условий выполнен синтез регулятора с обратной связью по состоянию, причем оценивание осуществляется ПИ-наблюдателем. С помощью регулятора по состоянию стабилизируется замкнутая система. Кроме того, робастный регулятор по состоянию, использующий ПИ-наблюдателя, синтезирован для стабилизации переключающейся системы с возмущениями. В заключение на примере, взятом из [2], проиллюстрированы реализуемость и достоинства ПИ-наблюдателя в переключающихся системах. Анализ результатов моделирования показывает, что ПИ-наблюдатель может быстрее отслеживать сигнал состояния, чем обычный наблюдатель, и могут быть достигнуты лучшие показатели работы замкнутой системы.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 дана постановка задачи. Разд. 2 посвящен проектированию ПИ-наблюдателя для переключающихся систем в дискретном времени при произвольных последовательностях переключений с помощью переключаемой квадратичной функции Ляпунова. Разработан регулятор по переменным состояния, оцениваемым с помощью ПИ-наблюдателя, который гарантирует устойчивость переключающихся систем. Рассмотрена робастная стабилизация переключающейся системы. В разд. 3 представлен численный пример, который иллюстрирует реализуемость и достоинства ПИ-наблюдателя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим переключающиеся линейные системы в дискретном времени при произвольных последовательностях переключений, описываемые уравнениями

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k); \\ y(k) = C_i x(k), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(k) \in R^n$ – векторы состояния; $u(k) \in R^m$ – векторы управляющих входов; $y(k) \in R^p$ – векторы измеряемых выходов; $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{p \times n}$, $i \in \widetilde{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, – известные матрицы. Кроме того, C_i, $i \in \widetilde{N}$, имеет полный строчный ранг.

Рассмотрим другие переключающиеся системы, заданные уравнениями

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A_i - L_i C_i)\hat{x}(k) + L_i y(k) + B_i u(k) + F_i \omega(k); \\ \omega(k+1) = \overline{K}_i (y(k) - C_i \hat{x}(k+1)), \end{cases} \tag{1.2}$$

где F_i, $\overline{K}_i$, L_i, $i \in \widetilde{N}$, – матрицы коэффициентов соответствующих размеров. Пусть система (1.2) является наблюдателем.

Основная цель работы состоит в синтезе наблюдателя в виде (1.2) для переключающейся системы (1.1) при произвольных последовательностях переключений. Последовательности переключений неизвестны, но можно предсказать текущий узел переключения. На основе этого предсказания можно выбрать соответствующий пропорционально-интегральный наблюдатель для переключающейся системы.

Задача 1. На основе системы (1.2) выбрать соответствующие матрицы коэффициентов такие, чтобы $\hat{x}(k)$ асимптотически стремился к $x(k)$ для любых $u(k)$ при любом начальном состоянии $\hat{x}_0$.

Пусть $e(k) = \hat{x}(k) - x(k)$ – ошибка оценки состояния. Ее динамика может быть получена вычитанием системы (1.2) из системы (1.1):

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\overline{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Таким образом, задача 1 эквивалентна выбору соответствующих матриц F_i, $\overline{K}_i$, L_i, $i \in \widetilde{N}$, при которых система (1.3) была асимптотически устойчивой, следовательно, ошибка оценки состояния будет затухать до нуля и оставаться равной нулю независимо от известного возбуждающего входа и начального условия $x_0 - \hat{x}_0$. Это означает, что оценка $\hat{x}(k)$ сходится к фактическому $x(k)$.

С учетом наблюдателя закон управления, формирующий обратную связь по состоянию в системе (1.1), имеет вид

$$u(k) = K_i \hat{x}(k) + v(k). \tag{1.4}$$

Замкнутая система, образуемая системой (1.1), регулятором по состоянию (1.4) и ПИ-наблюдателем, представляется как

$$\begin{cases} X(k+1) = A_c X(k) + B_c v(k); \\ y(k) = C_c X(k), \end{cases} \tag{1.5}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_i & 0 \\ L_i C_i & A_i - L_i C_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & -\overline{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_i \\ B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [C_i \quad 0 \quad 0].$$

Предположим, что система (1.1) имеет некоторую неопределенность, которая учитывается в уравнениях следующим образом:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_i + \Delta A_i) x(k) + (B_i + \Delta B_i) u(k); \\ y(k) = C_i x(k), \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\Delta A_i = D_i F(t) E_{1i}, \qquad \Delta B_i = D_i F(t) E_{2i}.$$

Тогда замкнутая система, состоящая из системы (1.6), регулятора по состоянию (1.4) и ПИ-наблюдателя, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_c X(k) + B_c \nu(k); \\ y(k) = C_c X(k), \end{cases} \tag{1.7}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \ A_c = \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i & (B_i + \Delta B_i)K_i & 0 \\ L_i C_i & A_i - L_i C_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & -\overline{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B_i + \Delta B_i \\ B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \ C_c = [C_i \quad 0 \quad 0].$$

Задача 2. Найти матрицы коэффициентов $K_i, F_i, \overline{K}_i, L_i, i \in \widetilde{N}$, такие, чтобы система (1.7) была робастной и асимптотически устойчивой.

2. Основные результаты. В этом разделе представлены решения задач 1 и 2, описываемые линейными матричными неравенствами. Сначала рассмотрим лемму и теорему 1.

Лемма. Пусть Y, H, E заданы матрицами соответствующих размеров, тогда для любого $F(t)$, удовлетворяющего условию $F^T(t)F(t) < I$, неравенство $Y + HFE + (HFE)^T < 0$ выполняется, если и только если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $Y + \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$.

Теорема 1 [1]. Равновесие 0 системы

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{2.1}$$

является глобально равномерно асимптотически устойчивым, если существует функция $V: Z^+ \times R^n \to R$ такая, что:

i) V есть неограниченная положительно-определенная и убывающая функция;

ii) $\Delta V = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$ есть отрицательно-определенная функция вдоль решений (2.1).

2.1. *Синтез ПИ-наблюдателя.* Решим задачу 1. Нас интересует гарантированная асимптотическая устойчивость системы (1.3), записанной относительно отклонений, которая достигается выбором соответствующих матриц коэффициентов $F_i, \overline{K}_i, L_i, \ i \in \widetilde{N}$. В случае переключающейся системы (1.3) согласно теории устойчивости Ляпунова это соответствует переключаемой функции Ляпунова, определенной как

$$V(k, x_k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 \\ 0 & P_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \tag{2.1.1}$$

где $P_{1i}, P_{2i}, \ i \in \widetilde{N}$, – симметричные положительно-определенные матрицы. Таким образом, мы можем получить теорему 2.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

i) Существует функция Ляпунова вида (2.1.1) (приращение которой является отрицательно-определенным), доказывающая асимптотическую устойчивость системы ошибок (1.3).

ii) Существуют некоторые положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in$ $\in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$, $i \in \widetilde{N}$, матрицы $\widetilde{L}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{\overline{K}}_i, \ i \in \widetilde{N}$, соответствующих размеров, неособенные матрицы $V_i, \ i \in \widetilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (2.1.2) и (2.1.3), и матрицы коэффициентов, заданные соотношениями $\bar{K}_i = \tilde{\tilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \tilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = \tilde{F}_i S_{2i}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} & 0 & S_{1i}^T A_i^T - C_i^T \tilde{L}_i^T & -C_i^T \tilde{\tilde{K}}_i^T \\ 0 & -S_{2i} & \tilde{F}_i^T & 0 \\ A_i S_{1i} - \tilde{L}_i C_i & \tilde{F}_i & -S_{1j} & 0 \\ -\tilde{\tilde{K}}_i C_i & 0 & 0 & -S_{2j} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.1.2}$$

$$V_i C_i = C_i S_{1i}. \tag{2.1.3}$$

iii) Существуют некоторые симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n\times n}$, $S_{2i} \in R^{n\times n}$, $i \in \tilde{N}$, обратимые матрицы $G_{1i} \in R^{n\times n}$, $G_{2i} \in \in R^{n\times n}$, $i \in \tilde{N}$, матрицы $\tilde{L}_i$, $\tilde{F}_i$, $\tilde{\tilde{K}}_i$, $i \in \tilde{N}$, соответствующих размеров, неособенные матрицы V_i, $i \in \tilde{N}$, удовлетворяющие (2.1.4) и (2.1.5), и матрицы коэффициентов, определенные выражениями $\bar{K}_i = \tilde{\tilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \tilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = = \tilde{F}_i G_{2i}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T & 0 & G_{1i} A_i^T - C_i^T \tilde{L}_i^T & -C_i^T \tilde{\tilde{K}}_i^T \\ 0 & S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T & \tilde{F}_i^T & 0 \\ A_i G_{1i} - \tilde{L}_i C_i & \tilde{F}_i & -S_{1j} & 0 \\ -\tilde{\tilde{K}}_i C_i & 0 & 0 & -S_{2j} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.1.4}$$

$$V_i C_i = C_i G_{1i}. \tag{2.1.5}$$

Доказательство i) $\Rightarrow$ ii). Полагаем, что существует функция Ляпунова в форме (2.1.1), приращение которой является отрицательно-определенным. Отсюда следует

$$\Delta V = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{1j} & 0 \\ 0 & P_{2j} \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 \\ 0 & P_{2i} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} < 0. \tag{2.1.6}$$

Если выполняется линейное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{1j} & 0 \\ 0 & P_{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 \\ 0 & P_{2i} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.1.7}$$

то $\Delta V < 0$.

Согласно формуле дополнения Шура имеем следующее линейное матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} -P_{1i} & 0 & A_i^T - C_i^T L_i^T & -C_i^T \bar{K}_i^T \\ 0 & -P_{2i} & F_i^T & 0 \\ A_i - L_i C_i & F_i & -P_{1j}^{-1} & 0 \\ -\bar{K}_i C_i & 0 & 0 & -P_{2j}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.1.8}$$

Введем обозначения $S_{1i} = P_{1i}^{-1}$, $S_{2i} = P_{2i}^{-1}$. Умножая (2.1.8) слева и справа на блочно-диагональную матрицу $\text{blockdiag}\{S_{1i}, S_{2i}, I, I\}$, получим

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} & 0 & S_{1i}A_i^T - S_{1i}C_i^T L_i^T & -S_{1i}C_i^T \bar{K}_i^T \\ 0 & -S_{2i} & S_{2i}F_i^T & 0 \\ A_i S_{1i} - L_i C_i S_{1i} & F_i S_{2i} & -S_{1j} & 0 \\ -\bar{K}_i C_i S_{1i} & 0 & 0 & -S_{2j} \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.1.9)$$

Если существуют неособые матрицы V_i такие, что $V_i C_i = C_i S_{1i}$, то, допуская $\tilde{L}_i = L_i V_i$, $\tilde{\bar{K}}_i = \bar{K}_i V_i$ и $\tilde{F}_i = F_i S_{2i}$, можно получить (2.1.2) и (2.1.3).

ii) $\Rightarrow$ i). Если (2.1.2) и (2.1.3) выполняются, то

$$\Delta V < 0. \qquad (2.1.10)$$

На основе теоремы 1 можно выполнить i).

iii) $\Rightarrow$ ii). Пусть (2.1.4) и (2.1.5) удовлетворяются. Так как S_{1i} и S_{2i}, $i \in \tilde{N}$, – симметричные положительно-определенные матрицы, имеем следующие неравенства:

$$(S_{1i} - G_{1i}^T) S_{1i}^{-1} (S_{1i} - G_{1i}) \geq 0, \qquad (2.1.11)$$

$$(S_{2i} - G_{2i}^T) S_{2i}^{-1} (S_{2i} - G_{2i}) \geq 0, \qquad (2.1.12)$$

которые эквивалентны условиям

$$S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T \geq -G_{1i}^T S_{1i}^{-1} G_{1i}, \qquad (2.1.13)$$

$$S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T \geq -G_{2i}^T S_{2i}^{-1} G_{2i}. \qquad (2.1.14)$$

Заменив $S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T$ и $S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T$ в (2.1.4) выражениями (2.1.13) и (2.1.14) соответственно, получим следующий результат:

$$\begin{bmatrix} -G_{1i}^T S_{1i}^{-1} G_{1i} & 0 & G_{1i}^T (A_i - L_i C_i)^T & -G_{1i}^T C_i^T k_i^T \\ 0 & -G_{2i}^T S_{2i}^{-1} G_{2i} & G_{2i}^T F_i^T & 0 \\ (A_i - L_i C_i) G_{1i} & F_i G_{2i} & -S_{1j} & 0 \\ -k_i C_i G_{1i} & 0 & 0 & -S_{2j} \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.1.15)$$

Пусть выполняются равенства $P_{1i} = S_{1i}^{-1}$ и $P_{2i} = S_{2i}^{-1}$. Умножая левые части (2.1.13)–(2.1.15) на блочно-диагональную матрицу $\text{blockdiag}(G_{1i}^{-T}, G_{2i}^{-T}, I, I)$, а правые части на $\text{blockdiag}(G_{1i}^{-1}, G_{2i}^{-1}, I, I)$, получим (2.1.8). Согласно (2.1.9) имеем (2.1.2) и (2.1.3).

ii) $\Rightarrow$ iii). Допуская выполнение (2.1.2) и (2.1.3), приходим к (2.1.8). Согласно формуле дополнения Шура запишем выражение

$$\begin{bmatrix} -S_{1j} & 0 \\ 0 & -S_{2j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1i} & 0 \\ 0 & S_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & F_i \\ -\bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix}^T = T_{ij} < 0. \qquad (2.1.16)$$

Пусть $\beta_{1i}, \beta_{2i} \in R^{+}$ – скаляры, которые достаточно малы, так что

$$\begin{bmatrix} (-S_{1i} - 2\beta_{1i} I) & \\ & (-S_{2i} - 2\beta_{2i} I) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i - L_i C_i) & \beta_{2i} F_i \\ -\beta_{1i} \bar{K}_i C_i & 0 \end{bmatrix} T_{ij}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i^T - C_i^T L_i^T) & -\beta_{1i} C_i^T \bar{K}_i^T \\ \beta_{2i} F_i^T & 0 \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.1.17)$$

Это эквивалентно условиям

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} - 2\beta_{1i} I & 0 & \beta_{1i}(A_i - L_i C_i)^T & -\beta_{1i} C_i^T \bar{K}_i^T \\ 0 & -S_{2i} - 2\beta_{2i} I & \beta_{2i} F_i^T & 0 \\ \beta_{1i}(A_i - L_i C_i) & F_i \beta_{2i} & & \\ -\bar{K}_i C_i \beta_{1i} & 0 & T_{ij} & \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.1.18)$$

Полагая $G_{1i} = S_{1i} + \beta_{1i} I$, $G_{2i} = S_{2i} + \beta_{2i} I$, можем получить

$$\begin{bmatrix} S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T & 0 & * & * \\ 0 & S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T & * & * \\ (A_i - L_i C_i)(G_{1i} - S_{1i}) & F_i (G_{2i} - S_{2i}) & & \\ -\bar{K}_i C_i (G_{1i} - S_{1i}) & 0 & T_{ij} & \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.1.19)$$

Введем матрицу

$$W_i = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -A_i + L_i C_i & -F_i & -I & 0 \\ \bar{K}_i C_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Умножая (2.1.19) слева на W_i и справа на W_i^T, придем к линейным матричным неравенствам (2.1.4) и (2.1.5).

2.2. *Синтез обратной связи по состоянию с ПИ-наблюдателем.* Рассматривая систему (1.1) и наблюдатель (1.2), можно получить систему (1.5), которая имеет в обратной связи регулятор по состоянию (1.4). Согласно идее, заключенной в теореме 2, можно сформулировать теорему 3. Предположим, что система (1.5) имеет функцию Ляпунова вида

$$V(k, x(k)) = x^T(k) P_i x(k), \qquad P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3i} \end{bmatrix}, \qquad (2.2.1)$$

где P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, $i \in \tilde{N}$, являются симметричными положительно-определенными матрицами.

Теорема 3. Следующие утверждения являются эквивалентными.

i) Существует функция Ляпунова вида (2.2.1), приращение которой отрицательно определено, что доказывает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.5).

ii) Существуют некоторые симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$ и $S_{3i} \in R^{n \times n}$, $i \in \tilde{N}$, матрицы $\tilde{K}_i, \tilde{L}_i, \tilde{F}_i$, $\tilde{\tilde{K}}_i$, $i \in \tilde{N}$, соответствующих размеров, обратимые матрицы V_i, $i \in \tilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным условиям (2.2.2) и (2.2.3), и матрицы коэффициентов, определяемые выражениями $K_i = \widetilde{K}_i S_{2i}^{-1}$, $\overline{K}_i = \widetilde{\widetilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \widetilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = \widetilde{F}_i S_{3i}^{-1}$ (2.1.17):

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & -S_{2i} & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & -S_{3i} & * & * & * \\ A_i S_{1i} - \widetilde{L}_i C_i & 0 & -\widetilde{F}_i & -S_{1j} & 0 & 0 \\ \widetilde{L}_i C_i & A_i S_{2i} + B_i \widetilde{K}_i & \widetilde{F}_i & 0 & -S_{2j} & 0 \\ \widetilde{\widetilde{K}}_i C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{3j} \end{bmatrix} < 0, \qquad (2.2.2)$$

$$V_i C_i = C_i S_{1i}. \qquad (2.2.3)$$

iii) Существуют некоторые симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$ и $S_{3i} \in R^{n \times n}$, $i \in \widetilde{N}$, матрицы $\widetilde{K}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{\widetilde{K}}_i$ соответствующих размеров, обращаемые матрицы $G_{1i} \in R^{n \times n}$, $G_{2i} \in R^{n \times n}$, $G_{3i} \in R^{n \times n}$, $i \in \widetilde{N}$, удовлетворяющие (2.2.4) и (2.2.5), и матрицы коэффициентов, определяемые согласно выражениям $\overline{K}_i = \widetilde{\widetilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \widetilde{L}_i V_i^{-1}$, $F_i = \widetilde{F}_i G_{3i}^{-1}$ и $K_i = \widetilde{K}_i G_{2i}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T & * & * & * \\ A_i G_{1i} - \widetilde{L}_i C_i & 0 & -\widetilde{F}_i & -S_{1j} & 0 & 0 \\ \widetilde{L}_i C_i & A_i G_{2i} + B_i \widetilde{K}_i & \widetilde{F}_i & 0 & -S_{2j} & 0 \\ \widetilde{\widetilde{K}}_i C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{3j} \end{bmatrix} < 0, \qquad (2.2.4)$$

$$V_i C_i = C_i G_{1i}. \qquad (2.2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о i) $\Rightarrow$ ii). Пусть

$$P = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем

$$P^{-1} A_c P = \widetilde{A}_c = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & 0 & -F_i \\ L_i C_i & A_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; P^{-1} B_c = \widetilde{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \\ 0 \end{bmatrix}; \; C_c P = \widetilde{C}_c = [C_i \quad C_i \quad 0]. \qquad (2.2.6)$$

Поэтому и система (1.5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} X(k+1) = \widetilde{A}_c X(k) + \widetilde{B}_c \mathrm{v}(k), \\ y(k) = \widetilde{C}_c X(k), \end{cases} \quad X(k) = \begin{bmatrix} x(k) - \hat{x}(k) \\ \hat{x}(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}. \qquad (2.2.7)$$

Приращение функции Ляпунова вида (2.2.1) вдоль решения системы (2.2.7) есть

$$\Delta V = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) < 0. \tag{2.2.8}$$

Если выполняется линейное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & 0 & -F_i \\ L_i C_i & A_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{1j} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3j} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} A_i - L_i C_i & 0 & -F_i \\ L_i C_i & A_i + B_i K_i & F_i \\ \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3i} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.2.9}$$

то $\Delta V < 0$. Согласно формуле дополнения Шура можно записать линейное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} -P_{1i} & 0 & 0 & A_i^T - C_i^T L_i^T & C_i^T L_i^T & C_i^T \overline{K}_i^T \\ 0 & -P_{2i} & 0 & 0 & A_i^T + K_i^T B_i^T & 0 \\ 0 & 0 & -P_{3i} & -F_i^T & F_i^T & 0 \\ A_i - L_i C_i & 0 & -F_i & -P_{1j}^{-1} & 0 & 0 \\ L_i C_i & A_i + B_i K_i & F_i & 0 & -P_{2j}^{-1} & 0 \\ \overline{K}_i C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_{3j}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.2.10}$$

Пусть выполняются равенства $P_{1i} = S_{1i}^{-1}$, $P_{2i} = S_{2i}^{-1}$ и $P_{3i} = S_{3i}^{-1}$. Умножим справа и слева неравенство (2.2.10) на $\operatorname{blockdiag}\{S_{1i}, S_{2i}, S_{3i}, I, I, I\}$. Если существуют некоторые неособые матрицы V_i такие, что $V_i C_i = C_i S_{1i}$, то при $\widetilde{F}_i = F_i S_{3i}, \widetilde{L}_i = L_i V_i, \widetilde{K}_i = K_i S_{2i}$ и $\widetilde{\overline{K}}_i = \overline{K}_i V_i$ можно получить (2.2.2) и (2.2.3).

ii) $\Rightarrow$ i). Предположим, что (2.2.2) и (2.2.3) выполняются, тогда имеем (2.2.8). На основе теоремы 1 можно сразу получить утверждение i).

iii) $\Rightarrow$ ii). Допустим, что (2.2.4) и (2.2.5) удовлетворяются. Поскольку S_{1i}, S_{2i} и S_{3i}, $i \in \widetilde{N}$, являются симметричными положительно-определенными матрицами, имеем следующие неравенства:

$$(S_{1i} - G_{1i}^T) S_{1i}^{-1} (S_{1i} - G_{1i}) \geq 0, \tag{2.2.11}$$

$$(S_{2i} - G_{2i}^T) S_{2i}^{-1} (S_{2i} - G_{2i}) \geq 0, \tag{2.2.12}$$

$$(S_{3i} - G_{3i}^T) S_{3i}^{-1} (S_{3i} - G_{3i}) \geq 0, \tag{2.2.13}$$

которые эквивалентны условиям

$$S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T \geq -G_{1i}^T S_{1i}^{-1} G_{1i}, \tag{2.2.14}$$

$$S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T \geq -G_{2i}^T S_{2i}^{-1} G_{2i}, \tag{2.2.15}$$

$$S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T \geq -G_{3i}^T S_{3i}^{-1} G_{3i}. \tag{2.2.16}$$

Выполняя замену выражений $S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T$, $S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T$ и $S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T$ в (2.2.4) выражениями (2.2.14)–(2.2.16) и домножая слева на $\mathrm{blockdiag}(G_{1i}^{-T}, G_{2i}^{-T}, G_{3i}^{-T}, I, I, I)$, а справа на $\mathrm{blockdiag}(G_{1i}^{-1}, G_{2i}^{-1}, G_{3i}^{-1}, I, I, I)$ обе части последних неравенств, можем получить (2.2.10), эквивалентное (2.2.2) .

ii) $\Rightarrow$ iii). Допустив, что (2.2.2) и (2.2.3) удовлетворяются, имеем (2.2.10). На основе формулы дополнения Шура также можем получить $T_{ij} < 0$. Пусть $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i} \in R^+$ являются достаточно малыми величинами, такими что

$$\begin{bmatrix} -S_{1i} - 2\beta_{1i} I & 0 & 0 \\ 0 & -S_{2i} - 2\beta_{2i} I & 0 \\ 0 & 0 & -S_{3i} - 2\beta_{3i} I \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i - L_i C_i) & 0 & -\beta_{3i} F \\ \beta_{1i} L_i C_i & \beta_{2i}(A_i + B_i K_i) & \beta_{3i} F_i \\ \beta_{1i} \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times$$

$$\times T_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{1i}(A_i - L_i C_i) & 0 & -\beta_{3i} F \\ \beta_{1i} L_i C_i & \beta_{2i}(A_i + B_i K_i) & \beta_{3i} F_i \\ \beta_{1i} \overline{K}_i C_i & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \qquad (2.2.17)$$

Выбирая $G_{1i} = S_{1i} + \beta_{1i} I$, $G_{2i} = S_{2i} + \beta_{2i} I$ и $G_{3i} = S_{3i} + \beta_{3i} I$, кроме того, полагая $\tilde{\bar{K}}_i = \overline{K}_i V_i$, $\tilde{L}_i = L_i V_i$, $\tilde{F}_i = F_i G_{3i}$ и $\tilde{K}_i = K_i G_{2i}$, получим (2.2.4) и (2.2.5).

2.3. *Синтез обратной связи по состоянию с робастным ПИ-наблюдателем.* В этом разделе представлено решение задачи 2. Допуская, что система (1.7) имеет функцию Ляпунова, и согласно теореме 3 можем сформулировать теорему 4.

Теорема 4. Если существуют некоторые симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n \times n}$, $S_{2i} \in R^{n \times n}$ и $S_{3i} \in R^{n \times n}$ и матрицы $\tilde{K}_i$, $\tilde{L}_i, \tilde{F}_i$, $\tilde{\bar{K}}_i$, $i \in \tilde{N}$, соответствующих размеров, некоторые числа $\varepsilon_{ij} \in R^+$, $\forall (i, j) \in \tilde{N} \times \tilde{N}$, и обратимые матрицы V_i, $i \in \tilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (2.3.1) и (2.3.2) , то замкнутая система (1.7) является асимптотически устойчивой, а матрицы коэффициентов определяются как $K_i = \tilde{K}_i S_{2i}^{-1}$, $\overline{K}_i = \tilde{\bar{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \tilde{L}_i V_i^{-1}$ и $F_i = \tilde{F}_i S_{3i}^{-1}$:

$$\left[\begin{matrix} -S_{1i} & 0 & 0 & S_{1i}^T A_i^T - C_i^T \tilde{L}_i^T & C_i^T \tilde{L}_i^T & \vdots \\ 0 & -S_{2i} & 0 & 0 & S_{2i}^T A_i^T + \tilde{K}_i^T B_i^T & \vdots \\ 0 & 0 & -S_{3i} & -\tilde{F}_i^T & \tilde{F}_i^T & \vdots \\ A_i S_{1i} - \tilde{L}_i C_i & 0 & -\tilde{F}_i & -S_{1j} + 2\varepsilon_{ij} D_i D_i^T & 0 & \vdots \\ \tilde{L}_i C_i & A_i S_{2i} + B_i \tilde{K}_i & \tilde{F}_i & 0 & -S_{2j} & \vdots \\ \tilde{\bar{K}}_i C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ E_{1i} S_{1i} & E_{1i} S_{2i} + E_{2i} \tilde{K}_i & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{matrix} \right.$$

$$
\left.\begin{matrix}
C_i^T\tilde{\tilde{K}}_i^T & S_{1i}E_{1i}^T & 0 & 0 \\
0 & S_{2i}E_{1i}^T + \tilde{K}_i^T E_{2i}^T & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-S_{3j} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\varepsilon_{ij} I & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I
\end{matrix}\right] < 0, \qquad (2.3.1)
$$

$$
V_i C_i = C_i S_{1i}. \qquad (2.3.2)
$$

Теорема 5. Если существуют некоторые симметричные положительно-определенные матрицы $S_{1i} \in R^{n\times n}$, $S_{2i} \in R^{n\times n}$ и $S_{3i} \in R^{n\times n}$, $i \in \tilde{N}$, матрицы $\tilde{K}_i, \tilde{L}_i, \tilde{F}_i, \tilde{\tilde{K}}_i$, $i \in \tilde{N}$, соответствующих размеров, некоторые постоянные $\varepsilon_{ij} \in R^+$ и обратимые матрицы $G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, V_i \in R^{n\times n}$, $i \in \tilde{N}$, удовлетворяющие линейным матричным условиям (2.3.3) и (2.3.4), тогда замкнутая система (1.7) асимптотически устойчива, а матрицы коэффициентов задаются в виде $\bar{K}_i = \tilde{\tilde{K}}_i V_i^{-1}$, $L_i = \tilde{L}_i V_i^{-1}$, $F_i = \tilde{F}_i G_{3i}^{-1}$ и $K_i = \tilde{K}_i G_{2i}^{-1}$:

$$
\left[\begin{matrix}
S_{1i} - G_{1i} - G_{1i}^T & 0 & 0 & G_{1i}^T A_i^T - C_i^T \tilde{L}_i^T & \vdots \\
0 & S_{2i} - G_{2i} - G_{2i}^T & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & S_{3i} - G_{3i} - G_{3i}^T & \tilde{F}_i^T & \vdots \\
A_i G_{1i} - \tilde{L}_i C_i & 0 & -\tilde{F}_i & -S_{1j} + 2\varepsilon_{ij} D_i D_i^T & \vdots \\
\tilde{L}_i C_i & A_i G_{2i} - B_i \tilde{K}_i & \tilde{F}_i & 0 & \vdots \\
\tilde{\tilde{K}}_i C_i & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
E_{1i} G_{1i} & E_{1i} G_{2i} + E_{2i} \tilde{K}_i & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \vdots
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
C_i^T \tilde{L}_i^T & C_i^T \tilde{\tilde{K}}_i^T & G_{1i}^T E_{1i}^T & 0 & 0 \\
G_{2i}^T A_i^T + \tilde{K}_i^T B_i^T & 0 & G_{2i}^T E_{1i}^T + \tilde{K}_i^T E_{2i}^T & 0 & 0 \\
\tilde{F}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-S_{2j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -S_{3j} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I
\end{matrix}\right] < 0, \qquad (2.3.3)
$$

$$
V_i C_i = C_i G_{1i}. \qquad (2.3.4)
$$

3. Численный пример. Рассмотрим численный пример переключающихся систем, который приведен в [2] и имеет следующий вид:

i) $x(k)=[x^1(k) \quad x^2(k) \quad x^3(k)]$;
$\hat{x}(k)=[\hat{x}^1(k) \quad \hat{x}^2(k) \quad \hat{x}^3(k)]$.

ii) $A_i=\begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 1,0 \\ h_i & 0,4 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, i\in(1,2); h_1=-1,12;\ h_2=1,0; C_1=C_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$B_1=\begin{bmatrix} -0,8000 \\ -0,3911 \\ -0,4558 \end{bmatrix};\ B_2=\begin{bmatrix} 0,1755 \\ -0,3078 \\ 0,4384 \end{bmatrix}.$$

iii) Последовательности переключений: две области, связанные с A_1 и A_2, есть R_1 и R_2. Множество $\{y(k)\,|\,y^1(k)\le 0,03\}$ есть R_1, а множество $\{y(k)\,|\,y^1(k)>0,03\}$ – R_2.

iv) Входной сигнал $u(k)=0,01\sin(k)$.

Для синтеза замкнутой системы используем регулятор по состоянию с ПИ-наблюдателем. Случайным образом выбираем два вектора начальных условий для ПИ-наблюдателя и переключающихся систем. На основе утверждения ii) теоремы 3 можно найти матрицы коэффициентов следующего вида:

$$K_1=[-0,8363 \quad 0,4405 \quad 1,2705], \qquad K_2=[0,9594 \quad -0,9331 \quad -3,5374];$$

$$k_1=\begin{bmatrix} 28,2421 & -2,7340 & -14,2663 \\ -4,4659 & 10,5069 & 13,8797 \\ -15,7670 & 8,3977 & 35,2918 \end{bmatrix}, \quad k_2=\begin{bmatrix} 16,1287 & 0,7161 & -14,4639 \\ 8,3933 & 6,2499 & 2,3659 \\ -8,6397 & 3,9281 & 21,4994 \end{bmatrix};$$

$$L_1=\begin{bmatrix} 0,1162 & 0,1119 & 0,2121 \\ -0,3538 & 0,0314 & -0,0276 \\ -0,2675 & -0,0083 & 0,0961 \end{bmatrix}, \quad L_2=\begin{bmatrix} 0,0562 & 0,1732 & 0,3812 \\ 0,2604 & 0,1411 & 0,0534 \\ -0,3205 & -0,0170 & 0,3382 \end{bmatrix};$$

$$F_1=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 1,1544 & -0,0860 & -0,0037 \\ -0,0840 & 1,3000 & -0,0380 \\ -0,0120 & -0,0180 & 1,0858 \end{bmatrix}, \quad F_2=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 1,9490 & -0,0408 & -0,0068 \\ -0,0370 & 2,2177 & -0,1170 \\ 0,0070 & -0,1300 & 2,0000 \end{bmatrix}.$$

Из полученных результатов следует, что система ошибок является асимптотически устойчивой, так как сигнал ошибки быстро стремится к нулю. Замкнутая система также асимптотически устойчива, и выходной сигнал является устойчивым синусоидальным сигналом. Сравнивая полученные результаты с результатами [2], заметим, что ПИ-наблюдатель может быстрее отслеживать сигнал состояния.

Заключение. Так как обычный наблюдатель часто не может удовлетворить реальным практическим требованиям, необходимо его улучшение. В этой работе выполнен синтез ПИ-наблюдателя для переключающихся систем. Результаты можно легко описать линейным матричным неравенством. Из данных реального использования и численного моделирования видно, что ПИ-наблюдатель имеет большое преимущество перед обычным наблюдателем – может быстрее отслеживать сигнал состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vidyasagar M.** Nonlinear Systems Analysis. Upper Saddle River. N. J.: Prentice-Hall,1993.
2. **Millerioux G., Daafouz J.** Input independent chaos synchronization of switched systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. **49**, N 7.
3. **DeCarlo R., Branicky M. S., Pettersson S., Lennartson B.** Perspective and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proc. IEEE. 2000. P. 1069.
4. **Liberzon D., Morse A. S.** Basic problem in stability and design of switched system // IEEE Control System Mag. 1999. **19**, N 5.
5. **Daafouz J., Riedinger P., Iung C.** Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. **47**, N 11. P. 1883.
6. **Michaletzky G., Gerencser L.** BIBO stability of linear switched systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. **47**, N 11.
7. **Agrachev A. A., Liberzon D.** Lie-algebraic stability criteria for switched systems // SIAMJ. Control Optim. 2001. **40**. P. 253.
8. **Dayawansa W., Martin C. F.** A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. **44**. P. 751.
9. **Vidal R., Schaffet S., Lyageros J., Sastry S.** Controlled invariance of discrete time systems // Lecture Notes in Computer Sci. /Eds. N. Lybch, B. H. Krogh. 2000. **1790**. P. 437.
10. **Zhai G., Hai L., Antsaklis P. J.** Quadratic stabilizability of switched linear systems of linear systems with polytopic uncertainties // Intern. Journ. Control. 2003. **76**, N 7. P. 747.
11. **Khargonekar P. P., Petersen I. R., Zhou K.** Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilization and H_∞ control theory // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. **35**, N 3. P. 356.
12. **Rotea M. A., Corless M., Da D., Petersen J. R.** Systems with structured uncertainty: relation between quadratic and robust stability // IEEE Trans. Automat. Control. 1993. **38**, N 5. P. 799.
13. **Dongmei X., Long W., Fei H., Guangming X.** A linear matrix inequality approach to the disturbance rejection of switched system // Submitted to Syst. Contr. Lett. 2003.
14. **Shafai B., Beale S., Nieman H. H., Stoustrup J. L.** LTR design of discrete-time proportional-integral observers // IEEE Trans. Automatic Control. 1996. **41**, N 7. P.1056.
15. **Krishna K. B., Kabore P.** On the design of integral and proportional-integral observers // Proc. of the American Control Conf. 2000. P. 3725.
16. **Duan G. R., Liu G. P., Thompson S.** Eigenstructure assignment design for proportional-integral observers – The continuous-time case // IEE Proc. Control Theory and Appl. 2001. **48**, N 3. P. 263.
17. **Shafai B., Pi C. T., Nork S.** Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers // Proc. of the American Control Conf. 2002. P. 1647.

Поступила в редакцию 12 сентября 2005 г.