

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЕМ СЕРОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА, ТЕКУЩЕГО В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ, С УЧЕТОМ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В. Н. Ветлуцкий, А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

Путем сравнения точного и приближенных решений задачи об охлаждении излучением серого идеального газа, текущего в плоском канале, в работе показано, что можно с достаточной точностью получить значения лучистых потоков энергии на стенке и значения температуры газа при использовании диффузионного приближения, если определенный параметр значительно меньше единицы.

При рассмотрении переноса энергии излучением будем полагать, что существует локальное термодинамическое равновесие, и процессом рассеяния можно пренебречь, что газ серый, а длина пробега излучения постоянна.

Даже при этих предположениях уравнение переноса остается довольно сложным, и при решении задач его обычно используют в приближенном виде (диффузионное приближение, приближение плоского слоя и др.) [1-3]. Сложность при использовании уравнения переноса энергии излучением связана с необходимостью решать интегродифференциальное уравнение, причем интегрирование производится по всему объему, занятому излучающим газом. Это решение будем называть «точным». Приближенное рассмотрение уравнения переноса позволяет значительно упростить решение задачи. При использовании приближения плоского слоя тоже получается интегродифференциальное уравнение, но интегрирование проводится только по одной координате, и можно решать задачу с начальными данными. Использование диффузионного приближения сводит задачу к решению системы дифференциальных уравнений. Точность диффузионного приближения может быть повышена путем введения в граничное условие коэффициента, зависящего от характерной оптической толщины задачи [4, 5]. Однако степень достигаемой точности в разных задачах следует проверять.

В работе рассмотрена задача об охлаждении излучением серого идеального газа, текущего в плоском канале. Принято, что линии тока параллельны стенкам канала $\frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \ll 1$ и $c_p = \text{const}$.

Плотностью энергии излучения по сравнению с внутренней энергией газа пренебрегаем, что можно сделать в широком диапазоне температур. Рассматриваемый режим течения таков ($A \ll 1$), что при использовании приближенного уравнения переноса энергии излучением можно пренебречь продольным потоком энергии, переносимой излучением. Следует ожидать, что точность приближения плоского слоя будет удовлетворительной, так как величина продольного градиента температуры мала. Рассматриваемая задача решалась при использовании уравнения переноса без осреднения по углам («точное» уравнение) и при использовании приближения плоского слоя. В диффузионном приближении эта задача была рассмотрена в работе [5]. Сопоставление решений в указанных приближениях проведено в диапазоне оптических толщин канала от 0.2 до 20. Точное решение построено при оптических толщинах канала 2 и 4. Расчеты проводились на электронной машине СО АН СССР.

Обозначения

s — расстояние в направлении луча;	γ — отношение удельных теплоемкостей;
Ω — телесный угол;	q — плотность потока энергии, переносимой излучением;
a — полуширина канала;	u — плотность энергии излучения;
L — длина поглотяющего участка стенки;	c — скорость света;
h — сторона квадрата;	σ — постоянная Больцмана;
V — скорость потока;	l — длина пробега излучения;
ρ — плотность газа;	M — число Маха;
p — давление;	$c_p c_v$ — удельные теплоемкости;
T — температура;	I — интенсивность излучения

Индекс * соответствует параметрам при $x \rightarrow -\infty$

1. **Уравнения и граничные условия.** Серый излучающий газ течет в канале шириной $2a$ параллельно оси x , ось y перпендикулярна к плоскости стенок. При $0 \leq x \leq L$ стенки канала прозрачны для излучения, а при $x < 0$ и $x > L$ — идеально отражают.

При принятых допущениях уравнения переноса энергии излучением и энергии имеют следующий вид:

$$\frac{dI}{ds} = \frac{1}{l} \left(\frac{\sigma T^4}{\pi} - I \right), \quad \rho_* V_* C_p \frac{\partial T}{\partial x} = -\operatorname{div} \mathbf{q} \quad (1.1)$$

Проинтегрировав первое уравнение по телесному углу и используя второе, получим

$$\rho_* V_* C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{l} (cu - 4\sigma T^4) \quad (1.2)$$

Запишем в безразмерном виде первое уравнение (1.1) и уравнение (1.2), а также плотность потока тепла и плотность энергии излучения, выраженные через интенсивность излучения

$$\frac{dI'}{ds'} = \frac{T'^4}{\pi} - I', \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 4A(\Phi - T'^4), \quad \Phi = \frac{1}{4} \int_{(4\pi)} I' d\Omega \quad (1.3)$$

$$\mathbf{q}' = \int_{(4\pi)} I' d\Omega \quad \left(A = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\sigma T_*^4}{\rho_* V_*}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_{*v}} \right) \quad (1.4)$$

Здесь

$$T' = \frac{T}{T_*}, \quad I' = \frac{I}{\sigma T_*^4}, \quad q' = \frac{q}{\sigma T_*^4} \\ \Phi = \frac{cu}{4\sigma T_*^4}, \quad s' = \frac{s}{l}, \quad x' = \frac{x}{l} \quad (1.5)$$

Безразмерные линейные величины y' , z' , a' , L' в этом и следующем разделах будут введены аналогично s' и x' .

Систему уравнений (1.3) будем решать при граничных условиях

$$T' \rightarrow 1 \quad \text{при } x' \rightarrow -\infty, \quad T' \rightarrow \text{const} \quad \text{при } x' \rightarrow +\infty \quad (1.6)$$

$$y' = \pm a', \quad I'_+ = 0 \quad \text{при } 0 \leq x' \leq L' \quad (1.7)$$

$$I'_+(x', y', z', s') = I'_-(x', y', z, s_1') \quad \text{при } x' < 0, x' > L'$$

Здесь I'_- — интенсивность излучения, падающего на стенку, I'_+ — интенсивность излучения, входящего в газ со стороны стенки, вектор s_1' является зеркальным отражением вектора s' от плоскости стенки.

Формальное решение первого уравнения (1.3) при условии (1.7) позволяет выразить Φ и q' через поле температуры

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} d\Omega \int_0^{s_0'} T'^4 e^{-s'} ds', \quad q' = \frac{1}{\pi} \int_{(4\pi)} d\Omega \int_0^{s_0'} T'^4 e^{-s'} ds' \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = 4A \left[\frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} d\Omega \int_0^{s_0'} T'^4 e^{-s'} ds' - T'^4 \right] \quad (1.9)$$

Таким образом, задача сведена к решению интегродифференциального уравнения (1.9) при условии (1.7). Решив это уравнение и воспользовавшись (1.8), получим поле плотности потока энергии.

2. Решение интегродифференциального уравнения. Задача о течении в канале эквивалентна задаче о течении газа через плоскую решетку, состоящую из параллельных набегающему потоку пластин длиной L . Причем пластины лишь поглощают падающее на них излучение.

Запишем первое уравнение (1.8) в декартовых координатах (здесь и далее штрихи опущены). По оси z поток однороден, поэтому интеграл по z берется и выражается через табличный интеграл от функции Бесселя [3]

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_F T^4(x, y) dx dy \frac{1}{r} \int_r^\infty K_0(t) dt \quad (r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

Здесь F — область влияния, $K_0(t)$ — функция Бесселя. Все поле течения в плоскости xy разбиваем на квадраты со стороной h . Внутри каждого квадрата считаем температуру постоянной и равной температуре центра квадрата. Интегрирование по x, y заменяем суммированием

$$\varphi(x_0, y_0) = \sum_F T^4(x_1, y_1) \Phi(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \quad (2.1)$$

Здесь

$$\Phi(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{1}{r} \left[\int_r^\infty K_0(t) dt \right] dx dy$$

Суммирование в (2.1) производится по всем квадратам, центры которых (x_1, y_1) не затенены для точки (x_0, y_0) какой-либо пластиной решетки.

Второе соотношение (1.8), записанное на стенке и преобразованное аналогично вышеописанному, имеет вид

$$q_y(x_0, -a) = \sum_F T^4(x_1, y_1) Q(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \quad (2.2)$$

В верхней части таблицы даны значения температур $10^4 T/T^*$ у стенки, а в нижней части — значения плотностей потоков тепла $10^3 q/\sigma T^*$ на стенке для различных отношений a/l ; обозначения: 1 — точное решение, 2 — приближение плоского слоя, 3 — диффузионное приближение

$\frac{r \cdot x}{a}$	$a/l = 0.1$		$a/l = 1$			$a/l = 2$			$a/l = 10$	
	2	3	1	2	3	1	2	3	2	3
0	10 ⁴	10 ⁴	9985	10 ⁴	10 ⁴	9992	10 ⁴	10 ⁴	10 ⁴	10 ⁴
1	9969	9970	9792	9804	9835	9634	9641	9690	8717	8881
2	9938	9941	9617	9627	9686	9345	9348	9435	8083	8319
3	9907	9912	9458	9467	9549	9104	9104	9222	7686	7963
4	9877	9883	9313	9320	9423	8902	8896	9039	7407	7709
5	9847	9855	9180	9185	9306	8728	8715	8879	7194	7514
6	9818	9827	9058	9061	9197	8576	8556	8739	7025	7356
7	9789	9799	8944	8945	9096	8443	8415	8613	6886	7225
8	9760	9772	8939	8937	9000	8323	8288	8500	6768	7112
9	9732	9745	8741	8736	8910	8216	8173	8397	6665	7014
10	9704	9718	8650	8641	8825	8120	8068	8302	6576	6923
1	293	293	910	901	902	934	933	931	773	772
3	286	286	833	833	835	837	836	834	582	579
5	279	279	774	774	777	764	763	761	488	485
7	273	273	723	723	727	706	704	702	429	427
9	267	267		678	683		655	654	388	386

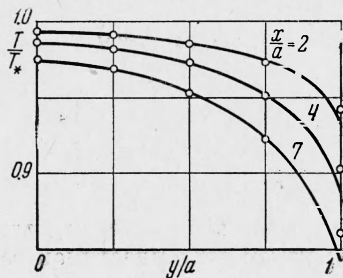
В уравнении (2.2) функция

$$Q(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \frac{2}{\pi} \iint \frac{y - y_0}{r^2} \left[1 - \int_0^r dp \int_p^\infty K_0(t) dt \right] dx dy$$

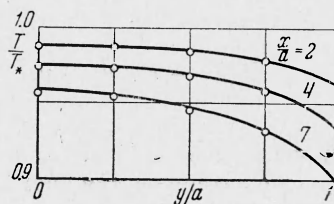
В уравнении (1.9) интегралы заменим по формуле (2.1), и производную в левой части распишем в виде разности

$$\frac{T(x+h, y) - T(x, y)}{h} = 4A \left[\sum_F T^4 \Phi - T^4(x, y) \right] \quad (2.3)$$

Функции влияния Φ и Q подсчитывались интегрированием по квадратам. Интегралы от функции Бесселя были представлены в виде рядов [7]. Погрешность при расчете Φ и Q для каждого квадрата составляла 0.05%. Область влияния ограничивалась семью длинами пробега излучения. Сравнение суммы Φ по этой области с суммой по бесконечной области показало,



Фиг. 1



Фиг. 2

что погрешность, вносимая ограничением области влияния, не превышает 0.1%, аналогично для функции Q .

Уравнение (2.3) решалось последовательными приближениями. Задавалось поле температуры в нулевом приближении.

Граничное условие $T = 1$ на минус бесконечности переносилось на расстояние семи длин пробега излучения от входа в решетку, откуда и начинался счет каждого приближения.

Для каждой точки (x, y) подсчитывалась правая часть и по формуле (2.3) подправлялась температура в точке $(x+h, y)$.

Счет продолжался до таких x , при которых значения температуры переставали изменяться.

Затем считалось следующее приближение и т. д. до тех пор, пока поля температуры в двух последовательных приближениях не отличались меньше чем на 0.1%.

Расчеты были проделаны для $A = 0.01$, $L/a = 10$ и $a/l = 1.0$ и 2.0 . Значение температуры для квадратов со стороной $0.5 a/l$ совпало со значениями температуры для квадратов со стороной $0.25 a/l$ с точностью 0.2%. Кривые зависимости температуры T/T_* от y/a для $a/l = 1.0$ даны на фиг. 1, для $a/l = 2.0$ — на фиг. 2. Значения температуры газа у стенки приведены в верхней части таблицы.

По формуле (2.2) были рассчитаны плотности потоков энергии, приходящей на стенку. При этом область у стенки в пределах одной оптической толщины дробилась на квадраты со стороной $0.125 a/l$ и $0.0625 a/l$; результаты расчетов в двух последних случаях совпадали с погрешностью менее 0.2% для $a/l = 1.0$ и 2.0 . На фиг. 3, а также в нижней части таблицы приведены значения плотностей потоков энергии, приходящих на стенку.

При $x = 0$ температура газа на оси несколько ниже температуры у стенки. Это объясняется эффектом объемного высвечивания.

3. Приближение плоского слоя. Для той же задачи в этом случае (1.10) — (1.12) запишутся в виде

$$\varphi(x^\circ, y^\circ) = \frac{a'}{2} \int_{-1}^1 T'^4(x^\circ, t) E_1(a' |t - y^\circ|) dt \quad \left(x^\circ = \frac{x}{a}\right) \quad (3.1)$$

$$q_y'(x^\circ, -1) = 2a' \int_{-1}^1 T'^4(x^\circ, t) E_2(a' |t + 1|) dt \quad \left(y^\circ = \frac{y}{a}\right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T'(x^\circ y^\circ)}{\partial x^\circ} = 4Aa' \left[\frac{a'}{2} \int_{-1}^1 T'^4(x^\circ, t) E_1(a' |t - y^\circ|) dt - T'^4(x^\circ, y^\circ) \right] \quad (3.3)$$

Здесь E_1, E_2 — интегроэкспоненциальные функции, уравнение (3.3) при начальном условии $x^\circ = 0, T = 1.0$ решалось следующим образом.

В n -м приближении между осью канала и стенкой проводится $n - 1$ линия на равном расстоянии одна от другой параллельно оси. Стоящая под знаком интеграла функция $T'^4(x^\circ, t)$ аппроксимируется полиномом четной степени

$$T'^4(x^\circ t) = \sum_{k=0} B_k(T_j'^4) t^{2k} \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты $B_k(T_j'^4)$ представляют собой линейные комбинации значений функции $T_j'^4$ на линиях. Подстановка (3.4) в (3.3), замена порядка суммирования по j и интегрирования позволяют записать (3.3) вдоль каждой линии в виде

$$\frac{dT_i'}{dx^\circ} = \sum_{j=0}^n \beta_{ij} T_j'^4 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

Здесь β_{ij} — числовая матрица; значение $i = 0$ соответствует оси, а значение $i = n$ — стенке.

Решение системы уравнений (3.5) производилось при различном числе полос n .

Расхождение результатов в двух последовательных приближениях не превышало 0.1%.

Потоки тепла, приходящие на стенку, подсчитывались по формуле

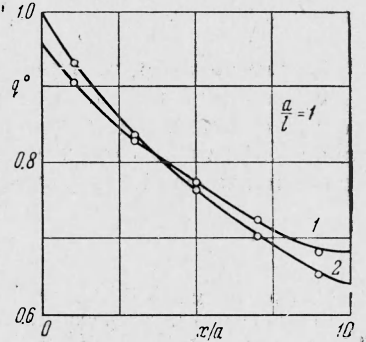
$$q_y'(x^\circ, -1) = \sum_{j=0}^N \gamma_j T_j'^4$$

где γ_j — числовые коэффициенты.

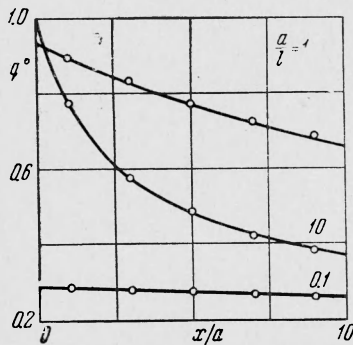
Были проведены расчеты для тех же значений A и a/l , что и в точной постановке. На фиг. 1—3 результаты расчетов в приближении плоского слоя совпадают

с точным решением, а кружочки — решение в диффузионном приближении, взятое из работы [5].

Результаты тех же приближенных расчетов даны в таблице. Сравнение полей температуры в различных приближениях с точным показало,



Фиг. 3



Фиг. 4

что это отличие при $2 < x/a < 8$, где влияние концов канала мало, не превышает 0.2% для приближения плоского слоя и 0.5% — для диффузионного. Исключение представляет область вблизи стенки, где температура в диффузионном приближении значительно завышена (1.0—2.0%). В значениях плотности потоков тепла при $2 < x/a < 8$ приближение плоского слоя дает отклонение от точного менее чем 0.3%, а диффузионное — 0.5%.

Были также проделаны расчеты для $A = 0.01$ и значений $a/l = 0.1$ и 10. Результаты расчетов в приближении плоского слоя сравнены с диффузионным приближением в таблице. На фиг. 4 сплошными линиями нанесены плотности $q^\circ = q'$ потоков тепла в приближении плоского слоя, кружочками — в диффузионном приближении. Сравнение показало, что приближения дают отличия в плотностях потоков тепла в 0.02% при $a/l = 0.1$; 0.8% — при $a/l = 1.0$ и 0.5% — при $a/l = 10$.

Температуры в обоих приближениях практически совпадают при $a/l = 0.1$ и отличаются на 0.2% везде, кроме области вблизи стенки, где разница может составить 5% при $a/l = 10$.

Таким образом, сравнение решений, полученных на основе приближенных уравнений переноса энергии излучением, с «точным» решением показало, что можно с достаточной точностью получить значения лучистых потоков энергии на стенке канала при $A \ll 1$ и значения температуры газа при использовании диффузионного приближения.

Поступила 8 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика. М., Гостехиздат, 1952.
2. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С., Райзер Ю. П. Об охлаждении воздуха излучением. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, № 5, стр. 1278; № 6, стр. 1447.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
4. Девисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1961.
5. Ветлупский В. Н., Онуфриев А. Т. Охлаждение излучением газа, текущего в плоском канале. ПМТФ, 1962, № 6.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
7. Кармазина Л. Н., Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. Изд-во АН СССР, 1958.