УДК 533.6.011

# О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ЗАДАЧИ О СФЕРИЧЕСКИХ ВИХРЯХ

*Ю. В. Мартынов*

(*Москва*)

В работе [1] дано обобщение решения Хилла [2], в котором при сохранении цилиндрической симметрии и потенциальности внешнего обтекания поле скоростей является существенно трехмерным.

В данной работе построено вихревое образование, состоящее из трехмерного вихревого течения в зазорах между концентрическими сферами произвольных радиусов и во внутренней сфере для различных зависимостей интеграла Бернулли и циркуляции от функции тока (согласно [3], эти функции зависят только от функции тока).

Рассмотрим без ограничения общности вихреобразования, состоящие из двух течений: одно в зазоре между концентрическими сферами с радиусами $a$, $a_0 (a > a_0)$, другое во внутренней сфере (первое течение будем называть внешним вихрем, второе — внутренним вихрем), движущееся с постоянной скоростью $u$ в покоящейся на бесконечности жидкости.

Безразмерная функция тока $\psi_0(\rho, \vartheta)$ обтекания сферы единичного радиуса потенциальным потоком в сферических координатах имеет вид [4]

$$\psi_0(\rho, \vartheta) = (1/2)\rho^2(1 - 1/\rho^3)\sin^2\vartheta.$$

Здесь и в дальнейшем все величины приведены к безразмерному виду (использовался масштаб $u$, $a$).

Рассмотрим вихревое течение внутри концентрических сфер с циркуляцией $\Gamma(\psi)$ и интегралом Бернулли $F(\psi)$ в виде

(1)

$$E(\psi) = -F(\psi), \quad F(\psi) = A_i^0 + A_i\psi \leqslant 0, \qquad \Gamma(\psi) = k_i\psi, \quad A_i^0, A_i, k_i = \text{const}.$$

Постоянная $k_i$ связана с $A_i$, эта связь рассматривается ниже.

Уравнения и граничные условия для функции тока с учетом (1) в сферической системе координат, неподвижно связанной с вихреобразованием, имеют вид [3]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\vartheta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + k_i^2\psi + A_i\rho^2\sin^2\vartheta = 0, \tag{2}$$

$$v_\rho = \frac{1}{\rho^2\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \quad v_\vartheta = -\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad v_\varphi\rho\sin\vartheta = \Gamma(\psi),$$

$$\psi(\rho_i', \vartheta) = 0, \quad \psi(\rho_i, \vartheta) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\psi_i}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_i} - \left.\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_i} = g_{i-1}\sin^2\vartheta,$$

где $\psi_{i-1}(\rho, \vartheta)$ — функция тока внешнего обтекания. Граничные условия представляют собой условия непроницаемости на поверхностях $\rho = \rho_i'$ и $\rho = \rho_i$ и равенство аксиальной скорости на поверхности $\rho = \rho_i'$. Равенство азимутальных и радиальных скоростей выполняется автоматически. Отсюда для вихревого течения в зазоре между сферами ($i = 1$)

$$\rho_1' = 1,\ \rho_1 = \rho_0 \left(\rho_0 = \frac{a_0}{a}\right),\quad g_0 = \frac{3}{2}.$$

Решение задачи (2) ищем в виде $\psi(\rho, \vartheta) = f(\rho)\sin^2\vartheta$, тогда выражение для функции тока внешнего вихря имеет вид

$$\psi(\rho, \vartheta) = \frac{A_1\sqrt{\rho}}{k_1^2}\left\{\frac{\left[\rho_0^{3/2}J_{3/2}(k_1) - J_{3/2}(k_1\rho_0)\right]}{J_{-3/2}(k_1\rho_0)J_{-3/2}(k_1) - J_{-3/2}(k_1)J_{3/2}(k_1\rho_0)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[J_{-3/2}(k_1\rho) - \frac{J_{-3/2}(k_1)J_{3/2}(k_1\rho)}{J_{3/2}(k_1)}\right] + \frac{J_{3/2}(k_1\rho)}{J_{3/2}(k_1)} - \rho^{3/2}\right\}\sin^2\vartheta, \tag{3}$$

$$A_1 = g_0 k_1^2\left\{\frac{\left[\rho_0^{3/2}J_{3/2}(k_1) - J_{3/2}(k_1\rho_0)\right]}{J_{-3/2}(k_1\rho_0)J_{3/2}(k_1) - J_{-3/2}(k_1)J_{3/2}(k_1\rho_0)}\times\right.$$
$$\times\left\{\left[k_1J_{-5/2}(k_1) + 2J_{-3/2}(k_1) - \frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)}\left[k_1J_{1/2}(k_1) - J_{3/2}(k_1)\right]\right]\right\} +$$
$$\left.+\frac{k_1J_{1/2}(k_1) - \frac{3}{2}J_{3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)} - 2\right\}^{-1}.$$

Рассмотрим течение во внутренней сфере ($i = 2$), тогда

$$\rho_2' = \rho_0,\ \rho_2 = 0,$$

$$g_1 = \frac{A_1}{k_1^2}\left\{\frac{\rho_0^{3/2}J_{3/2}(k_1) - J_{3/2}(k_1\rho_0)}{\left[J_{-3/2}(k_1\rho_0)J_{3/2}(k_1) - J_{-3/2}(k_1)J_{3/2}(k_1\rho_0)\right]\sqrt{\rho}}\times\right.$$
$$\times\left\{\left[k_1\rho_0J_{-3/2}(k_1\rho_0) + 2J_{-3/2}(k_1\rho_0)\right] - \frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)}\left[k_1\rho_0J_{1/2}(k_1\rho_0) - \right.\right.$$
$$\left.\left.-J_{3/2}(k_1\rho_0)\right]\right\} + \frac{k_1\rho_0J_{1/2}(k_1\rho_0) - J_{3/2}(k_1\rho_0)}{\sqrt{\rho_0}J_{3/2}(k_1)} - 2\rho_0\right\} = \frac{A_1}{k_1^2}f(k_1),$$

$$\psi(\rho, \vartheta) = \frac{A_2\sqrt{\rho}}{k_2^2}\left[\rho_0^{3/2}\frac{J_{3/2}(k_2\rho)}{J_{3/2}(k_2)} - \rho^{3/2}\right]\sin^2\vartheta, \tag{4}$$

$$A_2 = \left\{\frac{\rho_0^{3/2}\left[k_2\rho_0J_{1/2}(k_2\rho_0) - J_{3/2}(k_2\rho_0)\right]}{\sqrt{\rho_0}J_{3/2}(k_2\rho_0)} - 2\rho_0\right\}k_2^2g_1 = \frac{k_2^2A_1}{k_1^2}f(k_1)\,g(k_2).$$

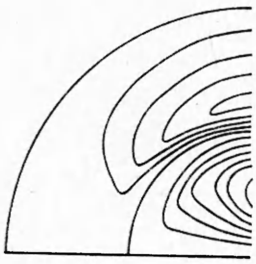
Из формулы (4) видно, что одинаковые функции $\Gamma(\psi)$ и $F(\psi)$ в обоих вихрях возможны только тогда, когда $f(k)g(k) = 1$. При $\rho_0 \to 0$ формулы (3) переходят в выражения, полученные в [1].

На основании (3), (4) проведен численный расчет течения внутри рассматриваемого вихревого образования.

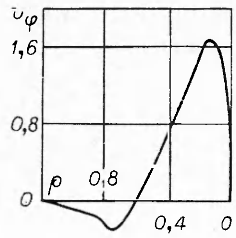
На фиг. 1 построены линии тока для равноотстоящих значений $\psi$ для случая $k_1 = k_2 = 1$, $\rho_0 = 0{,}5$. Наибольших значений по абсолютной величине функции тока во внутреннем и во внешнем вихрях достигают соответственно в точках (0,25; $\pi/2$) и (0,62; $\pi/2$). Эти точки не являются критическими точками, так как азимутальные компоненты скорости отличны от нуля.

Распределение азимутальной компоненты скорости дано на фиг. 2. Наибольшее по абсолютной величине значение $v_\varphi$ достигается для внутреннего и внешнего вихрей соответственно в точках (0,05; $\pi/2$) и (0,62; $\pi/2$):

$$|v_{\varphi\max}| = 1{,}69 \text{ и } |v_{\varphi\max}| = 0{,}3.$$



Фиг. 1




Фиг. 2

Устремив $A_2 \to 0$ в формулах (4), получим

$$\psi(\rho, \vartheta) = \frac{g_1 \sqrt{\rho}\, J_{3/2}(k_2\rho) \sqrt{\rho_0} \sin^2\vartheta}{[k_2\rho_0 J_{1/2}(k_2\rho_0) - J_{3/2}(k_2\rho_0)]}, \tag{5}$$

где $k_2$ — положительные корни уравнения $J_{3/2}(k_2\rho_0) = 0$. Таким образом, построено вихреобразование, в котором во внешнем вихре течение описывается формулой (3), а во внутреннем — однородное винтовое. Если $k_2 = \nu_m$ — $m$-й положительный корень уравнения $J_{3/2}(k_2\rho_0) = 0$, то внутренний вихрь разбивается на $m$ изолированных вихрей, которые находятся в зазорах между концентрическими сферами с радусами $\rho_i = \nu_i/\nu_m$, а функции $\Gamma(\psi)$ и $F(\psi)$ одинаковые во всех вихрях. Из формулы (3) видно, что течение во внешнем вихре однородное винтовое при $A_1 = 0$. Тогда функция тока имеет вид

$$\psi(\rho, \vartheta) = \left[ -\frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)} J_{3/2}(k_1\rho) + J_{-3/2}(k_1\rho) \right] g_0 \times$$
$$\times \left\{ 2J_{-3/2}(k_1) + k_1 J_{-5/2}(k_1) - \frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)} [k_1 J_{1/2}(k_1) - J_{3/2}(k_1)] \right\}^{-1} \sqrt{\rho} \sin^2\vartheta, \tag{6}$$

где $k_1$ — $m$-й положительный корень трансцендентного уравнения

$$J_{+3/2}(k_1) J_{-3/2}(k_1\rho_0) - J_{-3/2}(k_1) J_{3/2}(k_1\rho_0) = 0.$$

Теперь если в формуле (5) $g_1$ заменить на

$$g_2 = \{2J_{3/2}(k_1\rho_0) + k_1\rho_0 J_{-5/2}(k_1\rho_0) -$$
$$- \frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)} [k_1\rho_0 J_{1/2}(k_1\rho_0) - J_{3/2}(k_1\rho_0)]\} \rho_0^{-1/2} \{2J_{-3/2}(k_1) +$$
$$+ k_1 J_{-5/2}(k_1) + [J_{3/2}(k_1) - k_1 J_{1/2}(k_1)] \frac{J_{-3/2}(k_1)}{J_{3/2}(k_1)}\}^{-1} g_0,$$

то построим вихреобразование, у которого во внешнем и внутреннем вихрях однородное винтовое течение, описывающееся формулами (6) и модифицированной формулой (5).

Случай $k_i = 0$ соответствует двумерному течению в вихрях, т. е. отсутствует азимутальная компонента скорости. Выпишем решения задачи (3) при $k_i = 0$ для внутреннего и внешнего вихря соответственно

$$\psi(\rho, \vartheta) = \frac{g_1}{2\rho_0^3} [\rho^4 - \rho_0^2\rho^2] \sin^2\vartheta; \tag{7}$$

$$\psi(\rho, \vartheta) = \frac{g_0 \sin^2\vartheta}{5\rho_0^8 - 3\rho_0^5 - 2} \left[ (1 - \rho_0^5)\rho^2 + \frac{\rho_0^3(\rho_0^2 - 1)}{\rho} + (\rho_0^3 - 1)\rho^4 \right]. \tag{8}$$

Если в формуле (7) заменить $g_1$ на $g_2$ или на

$$g_3 = \frac{g_0}{2\rho_0^3 - 3\rho_0^5 - 2}\left[2(1-\rho_0^5)\rho_0 - (\rho_0^2 - 1)\rho_0 + (\rho_0^3 + 1)4\rho_0^3\right],$$

то внешний вихрь задается формулой (6) или (8), а внутренний — модифицированной формулой (7). Заменив в формулах (4) $g_1$ на $g_3$, получим во внешнем вихре вихревое двумерное течение, а во внутреннем соответственно вихревое трехмерное или однородное винтовое.

Аналогично можно решить задачу потенциального обтекания вихревого образования, состоящего из $m$ вихрей, находящихся в зазорах между концентрическими сферами произвольных радиусов с функциями распределения в каждом вихре в виде (1). Если функции заданы в виде (1), то можно ограничиться требованием константы функции тока на поверхностях концентрических сфер, за исключением внешней, тогда азимутальные скорости на этих поверхностях будут отличны от нуля, а $k_i = k$.

Автор выражает благодарность Ю. С. Рязанцеву и Ю. П. Гупало за ценные замечания и обсуждение работы.

*Поступила 23 II 1977*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярмицкий А. Г.** Об одном пространственном аналоге столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла).— ПМТФ, 1974, № 5.
2. **Милн Томсон.** Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
3. **Васильев О. Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.

---

УДК 532.516

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*А. Г. Ярмицкий*

(*Жданов*)

1. Уравнение Навье — Стокса в векторной форме имеет следующий вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} = -\nabla H - \nu\nabla \times \Omega, \qquad (1.1)$$

где $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}$; $H = p/\rho + v^2/2 + \Pi$; $\mathbf{v}$ — вектор скорости; $t$ — время; $p$ — давление; $\rho$ — плотность; $\Pi$ — потенциал массовых сил; $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости.

Будем рассматривать закрученные течения несжимаемой жидкости с осевой симметрией. Направив ось $z$ вдоль оси симметрии потока, выберем цилиндрическую систему координат $r$, $\varphi$, $z$ и с помощью соотношения

$$\mathbf{v} = \nabla \times (-\mathbf{i}_\varphi \Psi/r) + \mathbf{i}_\varphi \Phi/r, \qquad (1.2)$$