

УДК 519.632

Об одном подходе к моделированию скважин*

К.В. Воронин^{1,2}, А.В. Григорьев^{1,3}, Ю.М. Лаевский^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, 58, Якутск, Саха (Якутия), 677000
E-mails: ol_mer@mail.ru (Воронин К.В.), re5itsme@gmail.com (Григорьев А.В.), laev@labchem.ssc.ru (Лаевский Ю.М.)

Воронин К.В., Григорьев А.В., Лаевский Ю.М. Об одном подходе к моделированию скважин // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 2. — С. 145–155.

В статье проведено численное исследование задачи диффузии при наличии скважин, на которых задано интегральное краевое условие. Показано, что предложенная ранее методика является вполне работоспособной и обладает определенными преимуществами по сравнению с прямым моделированием скважин на основе метода конечных элементов. Приведены результаты расчетов для двух скважин.

DOI: 10.15372/SJNM20170203

Ключевые слова: скважины, смешанная формулировка, смешанный метод конечных элементов, оценка погрешности.

Voronin K.V., Grigoriev A.V., Laevsky Yu.M. On an approach to modeling wells // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 2. — P. 145–155.

This paper deals with a numerical study of the diffusion problem in the presence of wells, at which integral boundary conditions are used. It is shown that the method proposed earlier is fully efficient and offers certain advantages as compared with the direct modeling of wells based on the finite element method. The results of calculations for the two wells are presented.

Keywords: wells, mixed formulation, mixed finite element method, error estimate.

1. Введение

В данной статье проводится численная апробация новой методики учета скважин с интегральными краевыми условиями в стационарной задаче диффузии [1]. В приложении к задаче однофазной фильтрации жидкости речь идет о заданных расходах жидкости на скважине при постоянном, вообще говоря, неизвестном давлении. Соответствующая математическая постановка для одной задачи электрофизики приведена в [2, с. 370]. В работе [3, с. 21] близкая постановка рассмотрена в качестве одной из математических моделей системы скважин при определении давления в процессе вытеснения нефти водой.

Геометрические масштабы расчетной области и скважин существенно различаются (примерно на три порядка), и, как следствие, прямое численное моделирование (например методом конечных элементов) требует использования сгущающихся вокруг скважин неструктурированных сеток, приводящих к сеточным задачам с чрезвычайно большим числом степеней свободы. Кроме того, специфика задачи, связанная с нахождением

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 15-11-10024).

неизвестных давлений на скважинах через интегральные расходы жидкости, приводит к необходимости предварительного решения системы уравнений для этих давлений. Альтернативный прямому сеточному описанию скважин подход рассматривает случай, когда размер скважины много меньше шага сетки и который следует отнести к наличию точечных особенностей в расчетной области, а используемая при этом методика основана на их аддитивном выделении. Ряд вычислительных алгоритмов для таких задач описан в упомянутой выше работе [3]. В работе [4] для учета скважин использовалась техника конечных суперэлементов. Подход, предложенный в [1], является промежуточным между алгоритмом, использующим неструктурированные сгущающиеся сетки, и методом выделения точечных особенностей — в нем размеры ячеек расчетной сетки сопоставимы с размерами скважин. При этом математической основой работы [1] является смешанная слабая формулировка задачи, в которой легко осуществляется продолжение решения внутрь скважин — своеобразный метод фиктивных областей. Для такой формулировки используется смешанный метод конечных элементов [5] с аппроксимацией потоков элементами Равьяра–Тома наименьшей степени [6].

Целью данной работы является численное сравнение методики работы [1] с результатами непосредственного моделирования поля давления методом конечных элементов на сгущающихся неструктурированных сетках. При этом построение сетки и расчеты по методу конечных элементов обеспечиваются использованием открытых библиотек *Gmsh* [7] и *FEniCS* [8] соответственно. Отметим, что, поскольку в подходе из [1] шаг сетки связан с геометрическими размерами скважин, соответствующие неравенства следует трактовать только как априорные оценки, указывающие на точность вычислений, а не на скорость сходимости. При этом теоретические оценки имеют довольно низкий порядок — корень из шага сетки. Это и явилось мотивацией данного исследования — сравнение с решением, полученным непосредственным решением задачи на достаточно подробной сетке. Работа организована следующим образом. В следующем пункте приводятся необходимые сведения из работы [1]: формулируется исходная задача, эквивалентная ей (в некотором смысле) задача в смешанной слабой форме. Далее в п. 3 обсуждаются вопросы решения задачи непосредственно методом конечных элементов и решения смешанным методом конечных элементов. И, наконец, в основном для данной работы в п. 4 приводятся результаты численных экспериментов, позволяющие судить о реальных возможностях метода [1].

2. Формулировки исходной и модифицированной задач

В соответствии с [1] сформулируем задачу с интегральными расходами на скважинах. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в R^d ($d = 2, 3$) с кусочно-гладкой границей Γ_0 , Ω_l , $l = 1, \dots, L$, — открытые строго внутренние односвязные подобласти области Ω с попарно непересекающимися кусочно-гладкими границами Γ_l :

$$\bar{\Omega}_l \subset \Omega, \quad \Gamma_l \cap \Gamma_k = \emptyset, \quad l \neq k.$$

Далее пусть

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L \bar{\Omega}_l.$$

При этом Ω_0 является $(L+1)$ -связной: $\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_L$. В области Ω_0 рассмотрим краевую задачу:

$$\nabla a(\mathbf{x}) \nabla p = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad (1)$$

$$p|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2)$$

$$p|_{\Gamma_l} = c_l, \quad \int_{\Gamma_l} a \nabla p \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = Q_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (3)$$

Здесь $a \in C^1(\overline{\Omega_0})$ и $0 < a_0 \leq a(\mathbf{x}) \leq a_1$, c_l — некоторые неизвестные константы, Q_l — заданные расходы скважин.

Подход, основанный на непосредственном численном решении этой задачи с условиями Дирихле на скважинах, предваряется нахождением этих условий (см. [2, с. 372]). В следующем пункте мы обсудим некоторые детали этого подхода. Здесь лишь отметим, что учет скважин осуществляется непосредственной сеточной триангуляцией многосвязной области Ω_0 . В случае попытки использования прямоугольной сетки со скважинами внутри ячеек прямой метод конечных элементов не пригоден. Действительно, прямая слабая задача формулируется в пространстве

$$H_c(\Omega_0) = \{\varphi \in H^1(\Omega_0), \varphi|_{\Gamma_0} = 0, \varphi|_{\Gamma_l} = \text{const}, l = 1, \dots, L\},$$

где функции $\varphi|_{\Gamma_l}$ понимаются в смысле пространства следов. Трудность заключается в невозможности аппроксимировать это пространство подпространством кусочно-линейных функций. Пространство конечных элементов требуется снабдить специальными базисными функциями, отражающими специфику пространства $H_c(\Omega_0)$.

Суть предложенного в [1] подхода состоит в замене продолжения в Ω функций из $H_c(\Omega_0)$ на тривиальную задачу — продолжение в Ω функций из $L_2(\Omega_0)$. Для этой цели в [1] и осуществлен переход к смешанной формулировке, в которой функция p ищется как элемент замкнутого подпространства пространства $L_2(\Omega)$:

$$L_{2,c}(\Omega) = \{\varphi \in L_2(\Omega), \varphi|_{\Omega_l} = \text{const}, l = 1, \dots, L\},$$

где $\varphi|_{\Omega_l}$ — сужение функции φ на подобласть Ω_l . Далее, используя общепринятые обозначения, рассмотрим пространство векторов

$$\mathbf{H}_{\text{div},c}(\Omega) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \nabla \mathbf{v} \in L_{2,c}(\Omega)\}.$$

Сформулируем следующую задачу в области Ω : найти скалярную функцию $p \in L_{2,c}(\Omega)$ и векторную функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{div},c}(\Omega)$ такие, что имеют место следующие интегральные тождества:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{div},c}(\Omega) \quad \int_{\Omega_0} \frac{1}{a} \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4)$$

$$\forall q \in L_{2,c}(\Omega) \quad \int_{\Omega} q \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \sum_{l=1}^L Q_l q_l, \quad (5)$$

где $q_l = q|_{\Omega_l}$ — произвольные константы.

В [1] установлена однозначная разрешимость сужения решения этой задачи на пространство $\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega_0) \times L_2(\Omega_0)$. И самое главное, показано, что задачи (1)–(3) и (4), (5) в определенном смысле эквивалентны. Суть обсуждаемой методики состоит в решении задачи (4), (5) смешанным методом конечных элементов, когда скважина целиком лежит внутри сеточной ячейки. При этом речь идет о двумерной задаче, когда имеет смысл

говорить о скважине в ячейке. При этом результаты будут сравниваться с “точным” решением, полученным непосредственным численным решением задачи на достаточно подробной сетке. В случае когда $L = 1$ (одна скважина), область Ω — открытый единичный круг, в центре которого расположена скважина радиуса r_0 , рассматриваемая задача обладает точным решением, в полярных координатах имеющим вид

$$p(r) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1}{r}.$$

Отметим, что решение не зависит от радиуса r_0 , но от него, конечно, зависит значение константы в условии Дирихле на границе скважины. Эта одномерная задача может служить хорошим верификатором для рассмотренных ниже методов.

3. Методы решения

Начнем с решения исходной задачи (1)–(3) методом конечных элементов с предварительной ее формулировкой как задачи Дирихле. В соответствии с [2] рассмотрим последовательность вспомогательных задач:

$$\nabla a(\mathbf{x}) \nabla p^{(k)} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad (6)$$

$$p^{(k)}|_{\Gamma_0} = 0, \quad p^{(k)}|_{\Gamma_l} = \delta_{kl}, \quad l = 1, \dots, L, \quad (7)$$

δ_{kl} — символ Кронекера, $k = 1, \dots, L$. Для решений этих задач вычислим интегральные расходы на каждой из скважин

$$Q_l^{(k)} = \int_{\Gamma_l} a \nabla p^{(k)} \mathbf{n} d\gamma, \quad l = 1, \dots, L, \quad (8)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней по отношению к области Ω_0 (направленный внутрь скважин) нормали на границе Γ_l . Пусть существует набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_L$, являющийся решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^L Q_l^{(k)} \alpha_k = Q_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (9)$$

Тогда, как легко видеть, функция

$$p = \sum_{k=1}^L \alpha_k p^{(k)} \quad (10)$$

является решением задачи (1)–(3). Таким образом, для решения исходной задачи нужно решить L вспомогательных задач Дирихле. Для численного решения каждой из задач можно применить метод конечных элементов с лагранжевыми конформными элементами на неструктурированных треугольных сетках, сгущающихся в окрестности скважин. При этом алгоритм должен включать в себя вычисление интегралов $Q_l^{(k)}$ для сеточных функций $p_h^{(k)}$.

Для решения задачи (4), (5) применяется смешанный метод конечных элементов [5]. Следуя [1], выпишем соответствующую сеточную задачу. В качестве области рассмотрим единичный квадрат $\Omega = (0, 1)^2$, в котором введем равномерную квадратную сетку с шагом h . Множество $\bar{\Omega}$ представляет собой объединение замкнутых ячеек

$$K = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad i, j = 0, \dots, N - 1.$$

Пусть ячейки пронумерованы от 1 до $M = N^2$ таким образом, что первые L ячеек строго внутри себя содержат скважины

$$\bar{\Omega}_l \subset K_l \setminus \partial K_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (11)$$

Кроме того, предполагается, что $\text{mes}(\Omega_l) = O(h^2)$. Для аппроксимации вектор-функции \mathbf{v} используется пространство элементов Равьяра–Тома наименьшей степени [6]:

$$\mathbf{V}_h = V_{h,x} \times V_{h,y}, \quad V_{h,x} = \text{span}\{\varphi_{x,i}\}_{i=0}^N, \quad V_{h,y} = \text{span}\{\varphi_{y,j}\}_{j=0}^N,$$

где $\varphi_{x,i}$ и $\varphi_{y,j}$ — стандартные функции-крышки аргументов x и y соответственно. При этом

$$\mathbf{v}^h|_K = \begin{pmatrix} a + bx/h \\ c + dy/h \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации давления p будет использоваться пространство кусочно-постоянных функций

$$W_h = \left\{ q^h \mid q^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M q_l \chi_l(\mathbf{x}) \right\},$$

где χ_l — характеристическая функция ячейки K_l . Отметим следующий очевидный факт:

$$\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h \quad \nabla \mathbf{v}^h \in W_h.$$

Так как $\nabla \mathbf{v}^h = \text{const}$ в любой ячейке сетки, то, согласно (11), имеют место включения:

$$W_h \subset L_{2,c}(\Omega), \quad \mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_{\text{div},c},$$

что позволяет сформулировать следующий конформный смешанный метод конечных элементов:

$$\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h \quad \int_{\Omega_0} \frac{1}{a} \mathbf{u}^h \mathbf{v}^h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} p^h \nabla \mathbf{v}^h d\mathbf{x} = 0, \quad (12)$$

$$\forall q^h \in W_h \quad \int_{\Omega} q^h \nabla \mathbf{u}^h d\mathbf{x} = - \sum_{l=1}^L Q_l q_l, \quad (13)$$

где q_l — числа, являющиеся сужениями кусочно-постоянной функции q^h на ячейку K_l . Используя представление пространства W_h , равенству (13) можно придать следующий вид:

$$\int_{\partial K_l} \mathbf{u}^h \mathbf{n}_l d\gamma = -Q_l, \quad l = 1, \dots, L, \quad \int_{\partial K_l} \mathbf{u}^h \mathbf{n}_l d\gamma = 0, \quad l = L+1, \dots, M. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{n}_l — единичный вектор внешней нормали на границе ячейки K_l . В статье [1] установлена однозначная разрешимость этой задачи. При этом доказательство данного факта существенно опирается на условие (11). Там же получено неравенство

$$\|p - p^h\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C \left(h \sum_{l=1}^L Q_l^2 \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где число $C > 0$ не зависит ни от шага h , ни от подобластей Ω_l . Как уже говорилось во введении, данное неравенство не следует рассматривать как характеристику скорости сходимости, поскольку диаметр скважин, а следовательно, и шаг сетки к нулю устремить нельзя. Неравенство (15) следует рассматривать только как оценку близости приближенного решения к точному, которая фактически определяется размерами скважин: чем меньше отношение диаметров скважин к характерному размеру всей области, тем точнее можно воспроизвести поле давления. Именно в таком контексте будут рассмотрены результаты численных экспериментов в следующем пункте.

Приведем векторно-матричную форму задачи (12), (13). Отметим, что степени свободы для скорости \mathbf{u}^h привязаны к серединам ребер ячеек, а для давления p^h — к центрам ячеек. Введем нумерацию степеней свободы, при которой сначала по строкам формируется сеточная компонента скорости, состоящая из степеней свободы, привязанных к вертикальным ребрам (x -я компонента), затем по столбцам формируется сеточная компонента скорости, состоящая из степеней свободы, привязанных к горизонтальным ребрам (y -я компонента), и, наконец, в соответствии с введенной выше нумерацией ячеек сетки формируется сеточное давление, состоящее из степеней свободы, привязанных к центрам ячеек. Введем сеточный оператор $\mathbf{D} : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$, задаваемый равенством

$$\forall \mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}_h \quad \int_{\Omega_0} \mathbf{D} \mathbf{v}^h \mathbf{w}^h \, d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^L \int_{K_l \setminus \Omega_l} \frac{1}{a} \mathbf{v}^h \mathbf{w}^h \, d\mathbf{x} + \sum_{l=L+1}^M \int_{K_l} \frac{1}{a} \mathbf{v}^h \mathbf{w}^h \, d\mathbf{x}.$$

Оператор \mathbf{D} является матрицей масс для векторного потока и, согласно введенной нумерации, имеет блочно-диагональную структуру с трехдиагональными блоками. Положительная определенность этой матрицы следует непосредственно из условия (11). Далее введем сеточный оператор $B : \mathbf{V}_h \rightarrow W_h$, задаваемый равенством

$$\forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times W_h \quad \int_{\Omega} q^h B \mathbf{v}^h \, d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^M q_l \int_{\partial K_l} \mathbf{v}^h \mathbf{n}_l \, d\gamma.$$

В [1] показано, что $\ker B^\top = \{0\}$. В результате задачу (12), (13) можно записать в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений с седловой матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^h \\ p^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F \end{pmatrix},$$

где обозначения для сеточных функций \mathbf{u}^h и p^h перенесены на вектор-столбцы в векторно-матричной формулировке, F — вектор-столбец размерности M , в котором, согласно (14), первые L компонент равны $-Q_l$, а остальные — нулевые. Невырожденность матрицы системы следует из отмеченной выше невырожденности матрицы \mathbf{D} и невырожденности симметрической матрицы $S = B \mathbf{D}^{-1} B^\top$, следующей из тривиальности ядра матрицы B^\top . При этом уравнение для давления имеет вид

$$S p^h = -F, \tag{16}$$

и для его решения используется итерационная процедура, основанная на методе сопряженных градиентов [9], в процессе реализации которой на каждом итерационном шаге осуществляется обращение на векторе трехдиагональной матрицы \mathbf{D} .

4. Численные эксперименты

В качестве теста для численных экспериментов была рассмотрена задача с двумя скважинами (нагнетательной и добывающей — в терминах приложений к задачам нефтедобычи) с центрами в точках $\mathbf{x}^{(1)} = (0.167, 0.167)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0.833, 0.833)$ и радиусами r_w , значения которых в расчетах будут варьироваться. Дебиты скважин: $Q_1 = 1$, $Q_2 = -1$. Во всех расчетах полагаем $a(\mathbf{x}) \equiv 1$. Ниже под “точным” решением будет подразумеваться сеточная функция, полученная в результате непосредственного применения метода конечных элементов для решения двух задач Дирихле вида (6), (7) и использования равенств (8)–(10). При этом, согласно (9), (10), имеет место:

$$p = \frac{1}{\sigma} \left[(Q_1^{(2)} + Q_2^{(2)})p^{(1)} - (Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)})p^{(2)} \right], \quad \sigma = Q_1^{(1)}Q_2^{(2)} - Q_2^{(1)}Q_1^{(2)}. \quad (17)$$

Вычисление сеточных функций $p^{(k),h}$ и приближенных значений $Q_l^{(k),h}$ осуществлялось процедурами библиотек *Gmsh* [7] и *FEniCS* [8]. При помощи генератора сеток *Gmsh* строилась сгущающаяся в окрестности скважин неструктурированная триангулированная расчетная сетка. В процессе использования *Gmsh* специальным образом были размечены границы области, отвечающие за скважины. Расчеты выполнялись на двух сетках: на грубой сетке с примерно 3000 треугольников и на детальной сетке с 40000 треугольников. Ниже будут приведены результаты расчетов для обеих сеток. Собственно вычисление решений осуществлялось с использованием функций библиотеки *FEniCS* для конформных лагранжевых элементов первой степени. При помощи функции *FacetNormal* были вычислены векторы единичных нормалей на размеченных гранях, и после скалярного умножения на них вектора $\nabla p^{(k),h}$ функция *assemble* осуществляет интегрирование результата — вычисление приближенных значений дебитов $Q_l^{(k),h}$. На рисунке 1 в виде изолиний приведена иллюстрация решения p^h , полученного по формуле (17) описанной выше технологией.

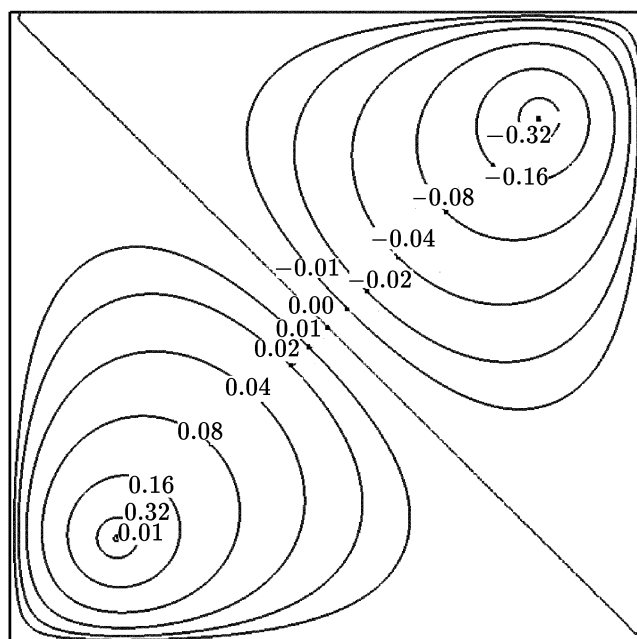


Рис. 1. Изолинии решения p^h при наличии нагнетательной и добывающей скважин

Далее, на последовательности сеток для разных значений радиусов скважин r_w были проведены расчеты по методу (12), (13), сводящемуся к решению системы (16). При этом шаг дробился не в два, как обычно, а в три раза, поскольку при дроблении сетки фиксированная скважина должна оставаться в центре всей последовательности ячеек. Расчеты проводились при шагах сетки $h = 1/N$ для значений $N = 27$, $N = 81$ и $N = 243$. В таблицах 1 и 2 приведены результаты сравнения с “точными” решениями: в табл. 1 используется “точное” решение на грубой сетке (3000 треугольников), в табл. 2 используется “точное” решение на детальной сетке (40000 треугольников). В соответствии с этим будем говорить о “грубом точном” решении и о “детальном точном” решении. Приближенным решением является результат применения метода (12), (13), а погрешность — это разность между “точным” и приближенным решениями. Результаты приведены в виде L_2 -нормы погрешности.

Таблица 1. Погрешность в случае “грубого точного” решения

$r_w \backslash h$	$3.70 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$4.12 \cdot 10^{-3}$
$6.17 \cdot 10^{-3}$	0.0176	N/A	N/A
$2.06 \cdot 10^{-3}$	0.0253	0.0072	N/A
$6.90 \cdot 10^{-4}$	0.0313	0.0099	0.0071

Таблица 2. Погрешность в случае “детального точного” решения

$r_w \backslash h$	$3.70 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$4.12 \cdot 10^{-3}$
$6.17 \cdot 10^{-3}$	0.0159	N/A	N/A
$2.06 \cdot 10^{-3}$	0.0238	0.0050	N/A
$6.90 \cdot 10^{-4}$	0.0291	0.0067	0.0017

Из приведенных таблиц следует, что “грубое точное” решение в качестве “точного” рассматривать нельзя — это особенно хорошо видно для скважин радиуса $r_w = 6.9 \cdot 10^{-4}$. В дальнейшем под точным решением будем понимать “детальное точное” решение. Далее, согласно табл. 2, при фиксированном отношении h/r_w (на диагонали таблицы) L_2 -норма погрешности убывает примерно в три раза. Таким образом, эксперименты показывают, что L_2 -норма погрешности есть величина $O(h)$ в отличие от теоретической оценки $O(\sqrt{h})$, задаваемой неравенством (15). Как и следовало ожидать, основной вклад в погрешность сосредоточен в окрестности скважин. Отметим, что в отсутствие данных в таблицах (N/A — Not Available) означает нарушение основного предположения нашего подхода: $2r_w/h < 1$ (скважина целиком находится внутри сеточной ячейки). На рис. 2 приведена концентрация погрешности в виде набора изолиний уровней модуля погрешности для значений 10^{-3} и $5 \cdot 10^{-4}$. Уменьшение концентрации в малой окрестности скважин (светлые пятна) указывает на превышение модулем погрешности значения 10^{-3} . Данный факт проиллюстрирован рисунком 3. Всем рисункам соответствуют расчеты для $r_w = 2.06 \cdot 10^{-3}$ и $h = 1.23 \cdot 10^{-2}$.

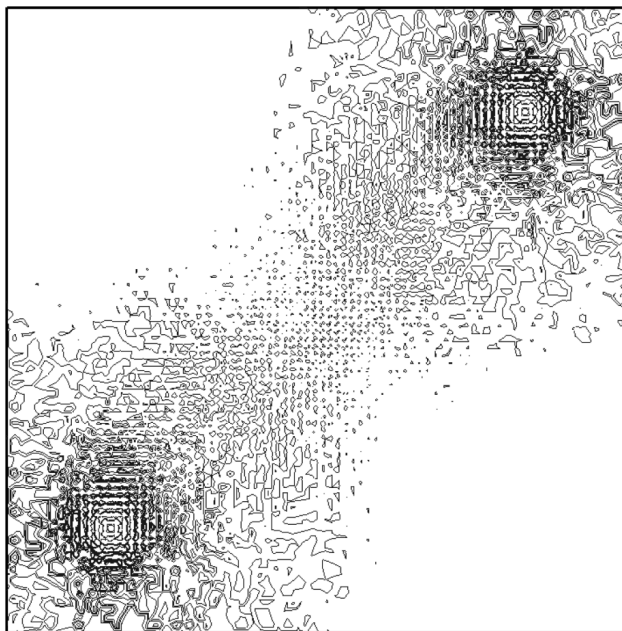


Рис. 2. Концентрация погрешности

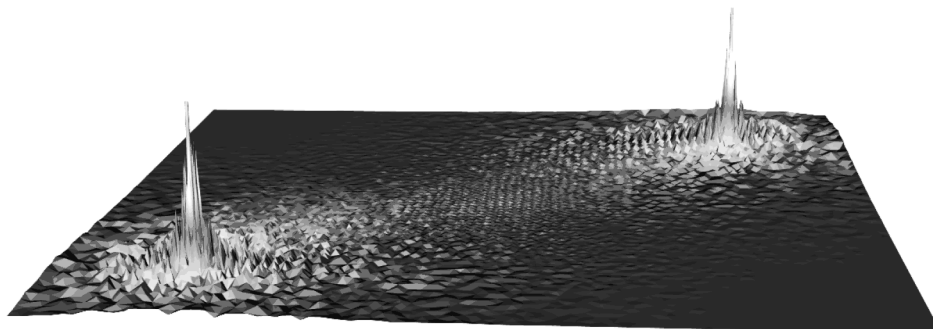


Рис. 3. Поле модуля погрешности

5. Заключение

В работе численно исследован новый метод решения задачи фильтрации однофазной несжимаемой жидкости при наличии скважин с заданными дебитами. Показана работоспособность алгоритма, численно проанализирована его точность. Расчеты продемонстрировали более высокий порядок погрешности по шагу сетки, чем ранее установленный теоретически. Метод не требует сгущения расчетной сетки для описания скважин и, следовательно, может работать с регулярной прямоугольной сеткой. Непосредственное использование метода конечных элементов для исходной формулировки требует решения набора подзадач, количество которых равно числу скважин, что существенно увеличивает время моделирования. Рассмотренный в работе метод лишен этого недостатка и имеет дело только с одной задачей.

Дальнейшие исследования могут развиваться в направлении обобщения метода на трехмерный случай и применения данного подхода для решения задач многофазной фильтрации. Основная трудность при решении трехмерной задачи состоит в “пронизывании” скважиной расчетной ячейки, что не допускается в рассмотренном методе. Однако

возможна комбинация рассматриваемого подхода со стандартной методикой: предложенная постановка задачи используется в сечении, ортогональном скважине, а вдоль скважины применяется стандартная формулировка. Что же касается обобщения метода на случай многофазной жидкости, то для двумерной (плановой) задачи принципиальных препятствий для повторения исследований, аналогичных данной работе, нет.

Литература

1. **Laevsky Yu.M.** A problem with wells for the steady diffusion equation // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, iss. 2. — P. 101–117.
2. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
3. **Чекалин А.Н.** Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах. — Казань: Изд-во Казанского университета, 1982.
4. **Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б.** Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа. — М., 2005. — (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша; 79).
5. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
6. **Raviart P.-A., Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // Proc. Sympos. Mathematical Aspects of the Finite Element Method (Rome, 1975). — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — № 606. — P. 292–315. — (Lect. Notes in Math.).
7. **Geuzaine Ch., Remacle J.-F.** A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. — <http://geuz.org/gmsh/>.
8. **Logg A., Mardal K.-A., and Wells G.N.** Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Book. — Springer, 2011.
9. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd ed.). — Philadelphia: Soc. for Industrial and Applied Math., 2003.

*Поступила в редакцию 6 сентября 2016 г.,
в окончательном варианте 10 октября 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Laevsky Yu.M.** A problem with wells for the steady diffusion equation // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, iss. 2. — P. 101–117.
2. **Tihonov A.N., Samarskiy A.A.** Uravneniya matematicheskoy fiziki. — М.: Nauka, 1966.
3. **Chekalin A.N.** Chislennye resheniya zadach fil'tracii v vodoneftyanyh plastah. — Kazan': Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1982.
4. **Galanin M.P., Lazareva S.A., Savenkov E.B.** Chislennoe issledovanie metoda konechnykh superelementov na primere resheniya zadachi o skvazhine dlya uravneniya Laplasa. — М., 2005. — (Preprint / IPM im. M.V. Keldysha; 79).
5. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
6. **Raviart P.-A., Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // Proc. Sympos. Mathematical Aspects of the Finite Element Method (Rome, 1975). — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — № 606. — P. 292–315. — (Lect. Notes in Math.).

7. **Geuzaine Ch., Remacle J.-F.** A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. — <http://geuz.org/gmsh/>.
8. **Logg A., Mardal K.-A., and Wells G.N.** Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Book. — Springer, 2011.
9. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd ed.). — Philadelphia: Soc. for Industrial and Applied Math., 2003.

