

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА ПРИ ИЗГИБЕ СВАРНЫХ ОБРАЗЦОВ С МЯГКИМ СВАРНЫМ ШВОМ

С. Е. Александров

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: sergei_alexandrov@yahoo.com

При оценке работоспособности различных конструкций, в частности сварных конструкций с мягким сварным швом, предельная нагрузка является одной из основных характеристик. В некоторых случаях различие пределов текучести основного материала и материала сварного шва настолько велико, что пластическая деформация локализуется в тонком сварном шве. С учетом некоторых особенностей такого распределения деформаций получена верхняя оценка предельной нагрузки изгибаемого сварного образца в условиях плоской деформации. Проводится сравнение с известным решением.

Ключевые слова: предельная нагрузка, сингулярные поля скорости, сварные конструкции, пластичность.

Предельная нагрузка является одной из характеристик, определяющих работоспособность различных конструкций [1]. В ряде современных сварных конструкций материал сварного шва значительно мягче основного материала [2, 3]. В этом случае пластическая деформация локализуется внутри тонкого сварного шва, а основной материал остается упругим. Отметим, что предельная нагрузка не зависит от упругих свойств материала [4], поэтому в расчетной схеме основной материал можно считать жестким. Из-за малой толщины сварного шва на границе основного материала и сварного шва возникает разрыв скорости. Асимптотика действительного поля скоростей вблизи поверхности разрыва известна [5] и может быть учтена при построении кинематически возможных полей скоростей, на основе которых в этом случае при использовании ассоциированного закона течения можно построить поля напряжений, удовлетворяющие краевому условию на поверхности разрыва скорости. Достаточно общий метод построения таких кинематически возможных полей скорости для растягиваемых образцов предложен в [6] и применен в [7–9]. В данной работе этот метод распространяется на случай изгиба образцов.

Геометрическая схема образца и оси декартовой системы координат показаны на рис. 1. Оси координат совпадают с осями симметрии образца. Предполагается, что главная скорость деформации $\xi_{zz} = 0$. Образец нагружен двумя изгибающими моментами M .

В силу симметрии достаточно рассмотреть четверть образца при $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Основной материал вращается как жесткое целое по ходу часовой стрелки относительно начала координат с угловой скоростью ω . Схема кинематически возможного поля скоростей в сварном шве показана на рис. 2. Вектор скорости в жестких зонах может быть представлен в виде

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = \omega y \mathbf{i} - \omega x \mathbf{j}. \quad (1)$$

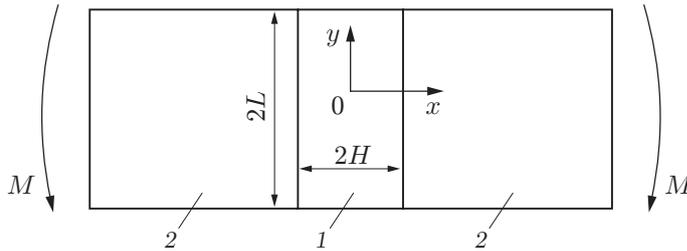


Рис. 1

Рис. 1. Геометрическая схема образца:

1 — сварной шов; 2 — основной материал; $2L$ — ширина образца; $2H$ — толщина сварного шва

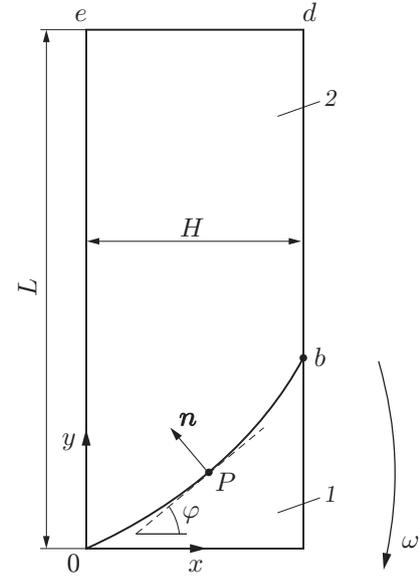


Рис. 2

Рис. 2. Схема кинематически возможного поля скоростей в сварном шве:

1 — жесткая зона, вращающаяся вместе с основным материалом; 2 — пластическая зона; $0b, bd$ — линии разрыва скорости

Здесь \mathbf{i}, \mathbf{j} — орты декартовой системы координат; $v_x = \omega y, v_y = -\omega x$ — компоненты вектора скорости в этой системе координат. Вектор скорости в пластической зоне обозначим \mathbf{u} , а его компоненты — u_x, u_y . Из (1) следует, что v_x не зависит от x , в частности, при $x = H$ $v_x = \omega y$. Поэтому одно из кинематических краевых условий в пластической зоне имеет вид

$$x = H: \quad u_x = \omega y. \tag{2}$$

Другое условие следует из симметрии задачи:

$$x = 0: \quad u_x = 0. \tag{3}$$

Для того чтобы удовлетворить краевым условиям (2) и (3), компоненту скорости u_x представим в виде

$$u_x = \omega y x / H. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение несжимаемости $\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0$ и интегрируя его, получим

$$u_y = -\omega y^2 / (2H) + \omega H f(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ — произвольная функция x . Вблизи поверхности разрыва скорости bd (рис. 2) распределение действительного поля скоростей описывается законом [5]

$$u_y = U_0 + U_1(H - x)^{1/2} + o[(H - x)^{1/2}], \quad x \rightarrow H. \tag{6}$$

Здесь U_0 и U_1 не зависят от x . Кроме того, из симметрии задачи следует, что компонента u_y является четной функцией x . Простейшая четная функция $f(x)$, удовлетворяющая (6), имеет вид

$$f(x) = c_0 + c_1[1 - (x/H)^2]^{1/2}, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_1 = \text{const}. \tag{7}$$

Вводя безразмерные величины

$$\chi = y/L, \quad \sin \gamma = x/H, \quad h = H/L, \quad (8)$$

с учетом (7) кинематически возможное поле скоростей (4), (5) можно представить в виде

$$u_x/(\omega L) = \chi \sin \gamma, \quad u_y/(\omega L) = h(c_0 + c_1 \cos \gamma) - \chi^2/(2h). \quad (9)$$

Компоненты вектора скорости (1) преобразуются к виду

$$v_x/(\omega L) = \chi, \quad v_y/(\omega L) = -h \sin \gamma. \quad (10)$$

На линии разрыва скорости $0b$ (рис. 2) нормальная компонента должна быть непрерывна. Пусть φ — угол между касательной к линии разрыва скорости в произвольной точке P и осью x , отсчитываемый от оси x против хода часовой стрелки (рис. 2). Тогда единичная нормаль к линии разрыва скорости в точке P представляется в виде

$$\mathbf{n} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (11)$$

Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h \cos \gamma} \frac{d\chi}{d\gamma}. \quad (12)$$

Условие непрерывности нормальной скорости на линии $0b$ может быть записано в виде скалярного произведения векторов: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Подставляя в это уравнение (9)–(12), получаем

$$\frac{2z(1 - \sin \gamma)}{\cos \gamma} \frac{d\chi}{d\gamma} = \chi^2 - 2(c_0 + c_1 \cos \gamma + \sin \gamma)h^2. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) определяет форму линии $0b$. Для того чтобы поле скоростей было кинематически возможным, эта линия должна проходить через начало координат, поэтому краевое условие для уравнения (13) имеет вид

$$\gamma = 0: \quad \chi = 0. \quad (14)$$

Уравнение (13) сводится к линейному дифференциальному уравнению относительно неизвестной $\zeta = \chi^2$, поэтому его общее решение может быть найдено известными методами. Частное решение, удовлетворяющее краевому условию (14), имеет вид

$$\zeta_{0b}(\gamma) = -h^2(\sin^2 \gamma + c_1(\gamma + \sin \gamma \cos \gamma) + 2c_0 \sin \gamma)/(1 - \sin \gamma). \quad (15)$$

Здесь $\zeta_{0b}(\gamma)$ — значение ζ в точках, принадлежащих линии $0b$. В общем случае из этого уравнения следует, что $\zeta_{0b} \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow \pi/2$ (или $x \rightarrow H$). Для того чтобы получить конечное значение ζ при $\gamma \rightarrow \pi/2$, необходимо положить

$$2c_0 = -(1 + \pi c_1/2). \quad (16)$$

В этом случае уравнение (15) преобразуется к виду

$$\zeta_{0b}(\gamma) = h^2[2 \sin \gamma(1 - \sin \gamma) - c_1(2\gamma + \sin 2\gamma - \pi \sin \gamma)]/[2(1 - \sin \gamma)]. \quad (17)$$

При $\gamma = \pi/2$ значение ζ и соответствующее значение χ определяются из (17) предельным переходом:

$$\zeta_b = h^2(1 - c_1\pi/2), \quad \chi_b = h(1 - c_1\pi/2)^{1/2}. \quad (18)$$

Используя (9), можно найти ненулевые компоненты тензора скорости деформации в виде

$$\xi_{xx} = \frac{\omega \chi}{h}, \quad \xi_{yy} = -\frac{\omega \chi}{h}, \quad \xi_{xy} = \frac{\omega \sin \gamma}{2} \left(1 - \frac{c_1}{\cos \gamma}\right).$$

Тогда эквивалентная скорость деформации равна

$$\xi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2 + 2\xi_{xy}^2)^{1/2} = \frac{\omega}{\sqrt{3} h \cos \gamma} [4\chi^2 \cos^2 \gamma + h^2 \sin^2 \gamma (\cos \gamma - c_1)^2]^{1/2}. \quad (19)$$

При использовании условия текучести Мизеса мощность в пластической зоне определяется выражением

$$\Omega_{pl} = \sqrt{3} kB \iint \xi_{eq} dx dy. \quad (20)$$

Здесь k — предел текучести при чистом сдвиге; интегрирование выполняется по области $0bde$ (см. рис. 2). Подставляя (19) в (20) и интегрируя по безразмерным переменным χ и γ (см. (8)), получим

$$\frac{\Omega_{pl}}{\omega k BL^2} = \int_0^{\pi/2} \int_{\zeta_{0b}^{1/2}(\gamma)}^1 [4\chi^2 \cos^2 \gamma + h^2 \sin^2 \gamma (\cos \gamma - c_1)^2]^{1/2} d\chi d\gamma. \quad (21)$$

Скачок скорости на линии $0b$ определяется формулой

$$[u]_{0b} = [(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2]^{1/2}. \quad (22)$$

Здесь компоненты скорости должны быть вычислены при $\zeta = \zeta_{0b}(\gamma)$. Подставляя (9) и (10) в (22), получим

$$[u]_{0b} = \omega L \{ (1 - \sin \gamma)^2 \zeta_{0b}(\gamma) + [(c_0 + c_1 \cos \gamma + \sin \gamma)h - \zeta_{0b}(\gamma)/(2h)]^2 \}^{1/2}. \quad (23)$$

Так как производная $d\chi/d\gamma$ вдоль линии $0b$ может быть найдена из (13), бесконечно малый элемент длины линии $0b$ определяется в виде

$$\begin{aligned} dl_{0b} &= [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = H \cos \gamma \left[1 + \frac{1}{h^2 \cos^2 \gamma} \left(\frac{d\chi}{d\gamma} \right)^2 \right]^{1/2} d\gamma = \\ &= \frac{H \cos \gamma \{ (1 - \sin \gamma)^2 \zeta_{0b}(\gamma) + [\zeta_{0b}(\gamma)/(2h) - (c_0 + c_1 \cos \gamma + \sin \gamma)h]^2 \}^{1/2}}{\zeta_{0b}^{1/2}(\gamma)(1 - \sin \gamma)} d\gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

На этой линии разрыва скорости мощность внутренних сил определяется по соотношению

$$\Omega_{0b} = Bk \int_l [u]_{0b} dl_{0b}. \quad (25)$$

Подставляя (23) и (24) в (25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{0b}}{\omega k BL^2} &= h \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \gamma}{\zeta_{0b}^{1/2}(\gamma)(1 - \sin \gamma)} \left[(1 - \sin \gamma)^2 \zeta_{0b}(\gamma) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\zeta_{0b}(\gamma)}{2h} - (c_0 + c_1 \cos \gamma + \sin \gamma)h \right)^2 \right] d\gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом (17) подынтегральное выражение является известной функцией γ . Величина c_0 определена в (16).

Еще один скачок скорости возникает при $x = H$ в области $\chi_b \leq \chi \leq 1$, где χ_b определяется из (18). Величина скачка равна $[u]_{bd} = |u_y - v_y|$. С учетом (9), (10) при $\gamma = \pi/2$ и соотношения (16) получаем

$$[u]_{bd} = \frac{\omega H}{2} \left(\frac{\chi^2}{h^2} + \frac{\pi c_1}{2} - 1 \right). \quad (27)$$

При выводе этого выражения предполагалось, что в области $\chi_b \leq \chi \leq 1$ имеет место неравенство

$$\chi^2/h^2 + \pi c_1/2 - 1 \geq 0. \quad (28)$$

Справедливость этого неравенства проверяется в ходе численного решения. Бесконечно малый элемент длины линии bd равен $dl_{bd} = dy$ (см. рис. 2). С использованием (8) и (27) выражение для мощности на линии разрыва скорости bd записывается в виде

$$\Omega_{bd} = Bk \int_l [u]_{bd} dl_{bd} = \frac{\omega B H k L}{2} \int_{\chi_b}^1 \left(\frac{\chi^2}{h^2} + \frac{\pi c_1}{2} - 1 \right) d\chi,$$

т. е.

$$\frac{\Omega_{bd}}{\omega k B L^2} = -\frac{h}{2} \left(1 - \frac{c_1 \pi}{2} \right) (1 - \chi_b) + \frac{1 - \chi_b^3}{6h}. \quad (29)$$

Здесь величина χ_b должна быть исключена с использованием (18).

Из теоремы о верхней оценке следует [10]

$$M\omega \leq 2(\Omega_{pl} + \Omega_{0b} + \Omega_{bd}), \quad (30)$$

где учтено, что величины Ω_{pl} , Ω_{0b} , Ω_{bd} в (21), (26) и (29) вычислены для четверти образца. Неравенство (30) можно представить в виде

$$m_u = \frac{M_u}{k B L^2} = 2 \left(\frac{\Omega_{pl}}{\omega k B L^2} + \frac{\Omega_{0b}}{\omega k B L^2} + \frac{\Omega_{bd}}{\omega k B L^2} \right). \quad (31)$$

Здесь M_u — верхняя оценка изгибающего момента. С помощью (21), (26) и (29) правая часть в (31) может быть представлена в виде функции c_1 . Затем для получения верхней оценки нужно найти минимум этой функции.

При численной минимизации возникает ряд трудностей, характерных для данного класса задач. Прежде всего, из (17) следует, что при $\gamma = \pi/2$ функция $\zeta_{0b}(\gamma)$, входящая в (21) и (26), имеет неопределенность типа $0/0$. Поэтому в численных расчетах в интервале $\pi/2 - \delta \leq \gamma \leq \pi/2$ использовались два первых члена разложения функции $\zeta_{0b}(\gamma)$ в ряд в окрестности точки $\gamma = \pi/2$, которое имеет вид

$$\zeta_{0b}(\gamma) = h^2 \left(1 - \frac{c_1 \pi}{2} \right) + \frac{4}{3} c_1 h^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + o \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right), \quad \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

Подынтегральное выражение в (26) стремится к бесконечности при $\gamma \rightarrow 0$, так как $\zeta_{0b}(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Однако можно показать, что интеграл в (26) является сходящимся. Кроме того, при $\gamma = \pi/2$ подынтегральное выражение в (26) включает неопределенности типа $0/0$. Раскладывая подынтегральное выражение в (26) в ряд в окрестности точек $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ и интегрируя в пределах от $\gamma = 0$ до $\gamma = \delta$ и от $\gamma = \pi/2 - \delta$ до $\gamma = \pi/2$ соответственно, получаем

$$\frac{1}{\omega k B L^2} \Omega_{0b} \Big|_0^\delta = \frac{2h^2 [c_1 - (1 + c_1 \pi/2)/2]^2 \sqrt{\delta}}{\sqrt{1 - 2c_1(1 - \pi/4)}}, \quad \frac{1}{\omega k B L^2} \Omega_{0b} \Big|_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} = \frac{c_1^2 h^2 \delta^2}{9\sqrt{1 - c_1 \pi/2}}. \quad (33)$$

Интеграл в (26) в пределах от $\gamma = \delta$ до $\gamma = \pi/2 - \delta$ ($\Omega_{0b} \Big|_\delta^{\pi/2-\delta}$) может быть найден численно. В результате получим

$$\Omega_{0b} = \Omega_{0b} \Big|_0^\delta + \Omega_{0b} \Big|_\delta^{\pi/2-\delta} + \Omega_{0b} \Big|_{\pi/2-\delta}^{\pi/2}. \quad (34)$$

С использованием (26), (29), (32)–(34) правая часть в (31) может быть минимизирована численно. При вычислениях принималось $\delta = 10^{-4}$. Зависимость $m_u(h)$ показана на

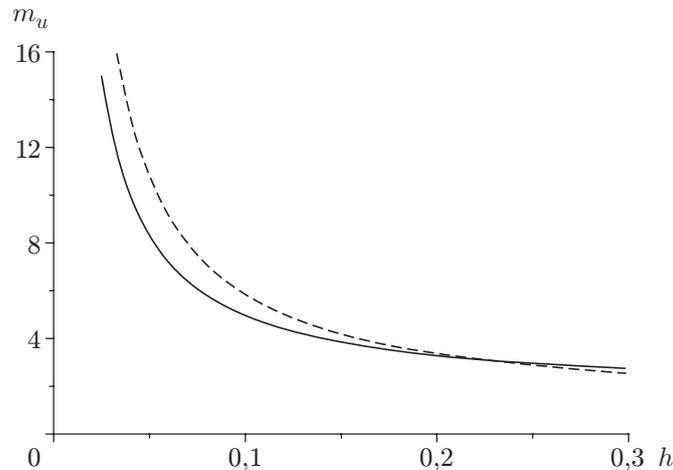


Рис. 3. Зависимость верхней оценки безразмерного предельного изгибающего момента от относительной толщины сварного шва: сплошная линия — результаты расчетов в настоящей работе; штриховая — результаты расчетов в [3]

рис. 3 (сплошная линия). Отметим, что предложенное решение имеет силу, только если $\chi_d \leq 1$ (см. рис. 2). Значение c_1 и с учетом (18) значение χ_d определяются одновременно с минимальным значением m_u . Расчеты показали, что в рассмотренном диапазоне значений h выполняются неравенства (28) и $\chi_d < 1$.

Верхняя оценка изгибающего момента, полученная с использованием кинематически возможного поля скоростей, приводящего (при применении ассоциированного закона течения) к полю напряжений, удовлетворяющему статическим уравнениям в пластической зоне, предложена в [3]. С использованием обозначений, принятых в настоящей работе, это решение в интервале $0,03 \leq h \leq 0,40$ может быть аппроксимировано выражением

$$m_u = 0,89 + 0,5/h \quad (35)$$

(штриховая линия на рис. 3). Приравнявая значения m_u , определяемые соотношениями (31) и (35), обнаружим, что оба решения дают одну и ту же оценку предельного момента при $h = h_* \approx 0,22$. Таким образом, выражение (31) следует использовать при $h \leq h_*$, а выражение (35) — при $h \geq h_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Zerbst U., Ainsworth R. A., Schwalbe K.-H.** Basic principles of analytical flaw assessment methods // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2000. V. 77. P. 855–867.
2. **Hao S., Cornec A., Schwalbe K.-H.** Plastic stress-strain fields of a plane strain cracked tensile panel with a mismatched welded joint // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34, N 3. P. 297–326.
3. **Alexandrov S., Kocak M.** Limit load analysis of strength undermatched welded T-joint under bending // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 2007. V. 30, N 4. P. 351–355.
4. **Drucker D. C., Prager W., Greenberg H. J.** Extended limit design theorems for continuous media // Quart. Appl. Math. 1952. V. 9. P. 381–389.
5. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
6. **Alexandrov S., Richmond O.** On estimating the tensile strength of an adhesive plastic layer of arbitrary simply connected contour // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 4. P. 669–686.

7. **Alexandrov S.** A note on the limit load of welded joints of a rectangular cross-section // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 1999. V. 22, N 5. P. 449–452.
8. **Alexandrov S. E., Goldstein R. V., Tchikanova N. N.** Upper bound limit load solutions for a round welded bar with an internal axisymmetric crack // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 1999. V. 22, N 9. P. 775–780.
9. **Александров С. Е., Кончакова Н. А.** Верхняя оценка усилия при растяжении сварных и паяных пластин с наклонным швом, содержащим трещину // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2007. № 1. С. 63–69.
10. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

Поступила в редакцию 15/V 2007 г.
