

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеопиздат, 1967.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. — Киев: Наук. думка, 1980.
3. Селезов И. Т., Сорокина В. В. Распространение волн вдоль упругого слоя в жидкости. — В кн.: Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 32.
4. Золотарев А. А., Золотарева Л. И. Возбуждение волн в океане, частично покрытом льдом. — Ростов-на-Дону, 1983. Рук. деп. в ВИНТИ 30.08.1983 № 4820—83 деп.
5. Воронич И. И., Бабенко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979.
6. Бабенко В. А., Ткачев Г. В. Вибрация круглой трещины при трехкомпонентной нагрузке. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 5.

Поступила 6/XII 1984 г.

УДК 539.1

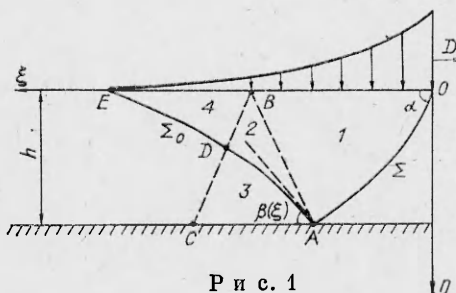
О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМУЮ ПОЛОСУ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

А. Айдозов, Н. Мамадалиев, У. Хакимов

(Алма-Ата)

Рассматривается плоская стационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую полосу с жестким основанием. Случай линейного нагружения и разгрузки среды разобран в [1, 2]. В данной работе в отличие от [1, 2] волновой процесс исследуется с учетом нелинейного нагружения материала полосы, изучаются влияния неупругих свойств среды на распределение в ней кинематических параметров, напряжений и определена форма поверхности фронта отраженной от жесткого основания волны.

Пусть по верхней границе полосы толщиной h движется монотонно убывающая нормальная нагрузка с постоянной скоростью D , превышающей скорость распространения нагрузо-разгрузочных деформаций среды. Среда, заполняющая полосы, моделируется обобщенным «пластическим газом» [3], и при нагрузке связь между давлением p и объемной деформацией ε принимается как полином второй степени $p = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 (dp/d\varepsilon > 0, d^2p/d\varepsilon^2 > 0)$. Угол наклона ветви разгрузки E диаграммы $p \sim \varepsilon$ превышает угол наклона ветви нагружения, а профиль нагрузки по мере распространения волн не меняется. В этом случае распространяющаяся в среде волна сжатия с криволинейной поверхностью Σ (рис. 1) при $\xi = x + Dt \geq \xi_a$, $\eta = y = h$ отражается от жесткой границы в виде ударной волны с поверхностью Σ_0 , впереди которой с большой скоростью $c_p = \sqrt{E/\rho_0}$ излучается упругая волна слабого разрыва как характеристика отрицательного направления. Вследствие распространения и взаимодействия волн с границами полосы возникают соответственно возмущенные области 1—4 (рис. 1). Решим задачу для областей 1—3. Если построить решение задачи в области 1 обратным способом при заданной скорости распространения фронта Σ $d\eta/d\xi = \tan \alpha(\xi) = R_1 - R_2 \xi$, где R_1, R_2 — заданные постоянные величины, то на основе [3] для скоростей $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$ и давления $p_1(\xi, \eta)$ имеем



Р и с. 1

$$(1.1) \quad u_1(\xi, \eta) = -\frac{D}{2\mu} \sum_{i=1}^2 \frac{(-i)^{i+1} \operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]}{\{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]\}^2} \times \\ \times \{1 \mp \mu \operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]\} \Phi_i(\xi \mp \mu\eta),$$

$$v_1(\xi, \eta) = \frac{D}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]]^2} \times \\ \times \{1 \mp \mu \operatorname{tg} \alpha [F_i(\xi \mp \mu\eta)]\} \Phi_i(\xi \mp \mu\eta); \\ (1.2) \quad p_1(\xi, \eta) = -\rho_0 D u(\xi, \eta), \Phi_i(z_i) = \left(\frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_i}{\alpha_2} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha [F_i(z_i)] - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Здесь $F_i(z_i)$ — корень уравнения $\xi + \mu\eta(\xi) = z_i$ относительно ξ . причем в случае $i = 1$ принимается верхний знак.

Для получения решения задачи в области 2, как в [2], считаем, что давление перед отраженной волной такое же, как в соответствующих точках падающей волны. Это означает, что на различных горизонтальных уровнях ($\eta = \text{const}$) $p_2(\xi, \eta)$ на линии AD со стороны области 2 равно $p_1(\xi)$ на фронте падающей волны OA (см. рис. 1). При этом предполагается, что фронт Σ_0 — слабоискривленная поверхность. Для полуплоскости это подтверждается результатами расчетов [3, 4]. Поэтому все условия задачи на поверхности Σ_0 удовлетворяются приближенно относительно ее первоначальной формы, т. е. при $\eta \approx h - \operatorname{tg} \beta_0 (\xi - \xi_a)$. Таким образом,

$$(1.3) \quad p_2(\xi, \eta) = p_1(\xi) \text{ при } \eta \approx h - \operatorname{tg} \beta_0 (\xi - \xi_a).$$

Кроме того, на характеристике $\xi + \mu\eta = \xi_a + \mu h$ выполняются условия

$$(1.4) \quad u_2(\xi, \eta) = u_1(\xi), v_2(\xi, \eta) = v_1(\xi).$$

Так как движение среды относительно потенциала скорости φ_2 описывается волновым уравнением [3], то в области 2

$$(1.5) \quad \varphi_2(\xi, \eta) = f_1(\xi - \mu\eta) + f_2(\xi + \mu\eta).$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и (1.4), имеем

$$(1.6) \quad f_1'(z) = -f_2'(\xi_a + \mu h) - \frac{D}{2\mu} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha (F_1(z))}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (F_1(z))]^2} \times \right. \\ \times [1 + \mu \operatorname{tg} \alpha (F_1(z))] \Phi_1(z) - \frac{\operatorname{tg} \alpha (F_2(\xi_a + \mu h))}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (F_2(\xi_a + \mu h))]^2} \times \\ \times [1 - \mu \operatorname{tg} \alpha (F_2(\xi_a + \mu h))] \Phi_2(\xi_a + \mu h) \Big\}, \\ f_2'(z) = -f_1'(x) - D \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha (\xi_1(v))}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (\xi_1(v))]^2} \left\{ \frac{\rho_0 D^2}{\alpha_2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha (\xi_1(v))}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (\xi_1(v))]^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right\},$$

где

$$(1.7) \quad x = \frac{z - \mu(1 + \lambda_0)(h + \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a)}{\lambda_0}, \quad v = \frac{z - \mu(h + \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a)}{(1 - \mu \operatorname{tg} \beta_0)}, \\ \lambda_0 = \frac{(1 - \mu \operatorname{tg} \beta_0)}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0)}, \quad \xi_a = \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - 2hR_2}}{R_2}, \quad \mu^2 = \frac{D^2}{c_p^2} - 1, \\ \xi_1(\xi) = \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - 2R_2[h - \operatorname{tg} \beta_0 (\xi - \xi_a)]}}{R_2}$$

(штрих означает производную по аргументу). В области 3 решение задачи, как в области 2, выражается формулой Даламбера

$$(1.8) \quad \varphi_3(\xi, \eta) = f_3(\xi - \mu\eta) + f_4(\xi + \mu\eta).$$

При этом задача в области 3 имеет следующие граничные условия: на фронте отраженной волны Σ_0

$$(1.9) \quad \rho_2^*(a_0 - v_{2n}^*) = \rho_3^*(a_0 - v_{3n}^*), \\ \rho_2^*(a_0 - v_{2n}^*)(v_{2n}^* - v_{3n}^*) = p_2^* - p_3^*, \\ v_{2\tau}^* = v_{3\tau}^*, \quad a_0 = D \sin \beta(\xi),$$

$$p_j^* = \alpha_1 \varepsilon_j^* + \alpha_2 \varepsilon_j^{*2}, \quad \varepsilon_j^* = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_j^*}, \quad j = 2, 3;$$

на жестком основании полосы при $\eta = h$, $\xi_a \leq \xi \leq \xi_c$

$$(1.10) \quad \partial \varphi_3 / \partial \eta = 0,$$

где $v_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \sin \beta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cos \beta$, $v_\tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \sin \beta$

— нормальная и касательная составляющие массовой скорости среды по отношению к фронту Σ_0 ; $\beta(\xi)$ — угол наклона фронта отраженной волны с осью $O\xi$ ($\beta_0 = \beta(0)$); параметры среды, относящиеся к фронту Σ_0 , обозначены звездочкой; a_0 — скорость распространения фронта отраженной волны.

Полагая в первом приближении $\beta(\xi) \approx \beta_0$, третье уравнение (1.9) при $\eta \approx h - \operatorname{tg} \beta_0 (\xi - \xi_a)$ запишем как

$$(1.11) \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \right) = \operatorname{tg} \beta_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \right).$$

Если учесть, что $a_0 \gg v_n^*$ и $\rho_2^* \approx \rho_0$, то первое и второе уравнения (1.9) имеют вид

$$(1.12) \quad -\rho_0 D (\partial \varphi_2 / \partial \xi - \partial \varphi_3 / \partial \xi) = p_2^* - p_3^*;$$

$$(1.13) \quad \operatorname{tg} \beta(\xi) = \frac{\left[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \right) + \varepsilon_2^* \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} - \varepsilon_3^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right]}{\left[D (\varepsilon_3^* - \varepsilon_2^*) - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \right) - \varepsilon_2^* \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} + \varepsilon_3^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \right]}.$$

Отметим, что $\operatorname{tg} \beta_0$ определяется из условий (1.9) и (1.10) при $\xi = \xi_a$ (см. рис. 1). Используя (1.10) и (1.11), из (1.8) получим

$$(1.14) \quad f_3'(z) = f_4'(z + 2\mu\eta);$$

$$(1.15) \quad f_4'(z) + \lambda_0 f_4'(\lambda_0 z + k_0) = \frac{F\left(\frac{z - \mu h_a}{1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0}\right)}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0)},$$

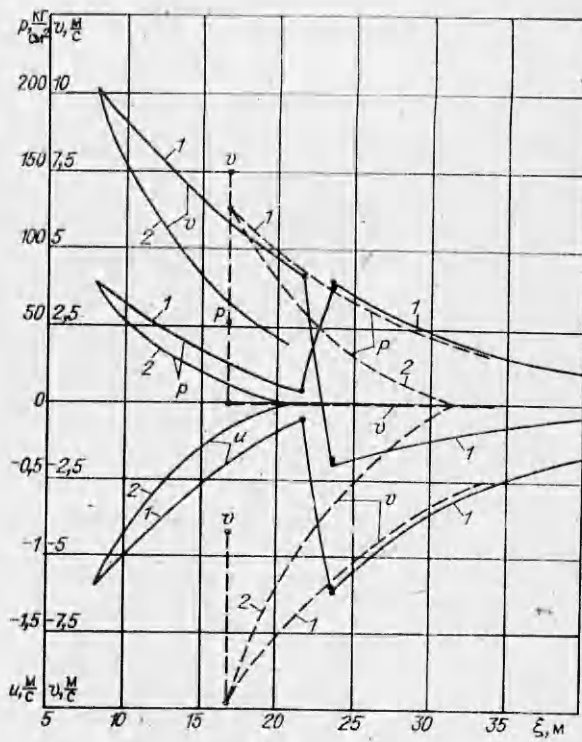
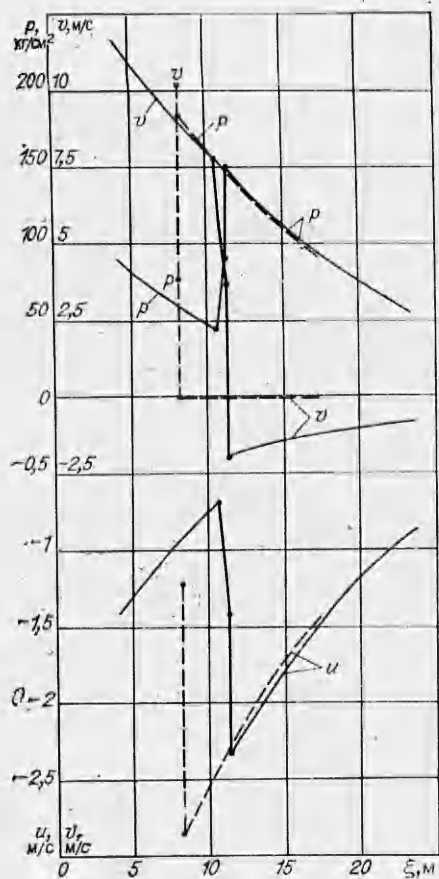
где $k_0 = \mu[(1 - \lambda_0)h + (1 + \lambda_0) \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a]$; $h_a = h - \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a$;

$$F(z) = (1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0) f_1'[(1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0) \xi - \mu(h + \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a)] + \\ + (1 - \mu \operatorname{tg} \beta_0) f_2'[(1 - \mu \operatorname{tg} \beta_0) \xi + \mu(h + \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a)].$$

Решая функциональное уравнение (1.15) методом последовательных приближений, можно найти рекуррентную формулу

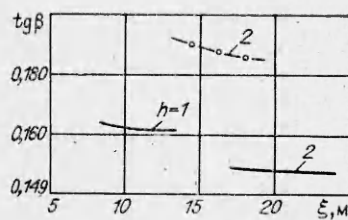
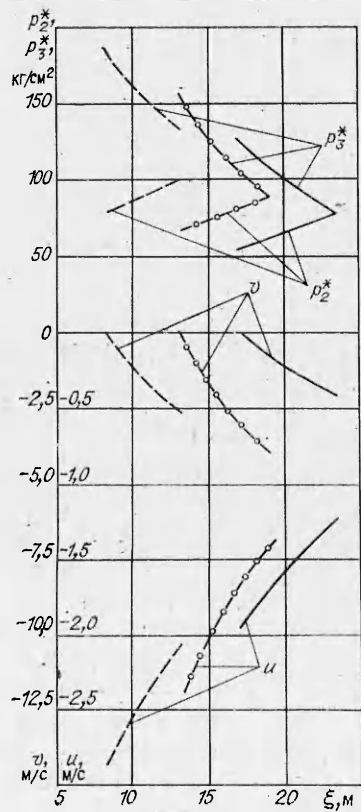
$$(1.16) \quad f_4'(z) = \frac{1}{(1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0)} \left\{ F\left[\frac{z - \mu(h - \operatorname{tg} \beta_0 \xi_a)}{1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_0)^n F\left[\frac{\lambda_0^n z - \mu h_a + k_0(\lambda_0^n - 1)/(\lambda_0 - 1)}{1 + \mu \operatorname{tg} \beta_0}\right] \right\}.$$

Исследование показало, что ряд (1.16) при $\lambda_0 < 1$ сходится (при проведении расчетов легко устанавливается радиус его сходимости). Таким образом, из (1.8) с учетом (1.14) и (1.16) определяется поле скоростей $u_3 = \partial \varphi_3 / \partial \xi$, $v_3 = \partial \varphi_3 / \partial \eta$ среды в области $\mathcal{Z}$. Далее формулы (1.12) и (1.13) позволяют определить p_3^* и $\operatorname{tg} \beta(\xi)$. Затем, используя формулу $p_3(\xi, \eta) = p_3^* + E(\varepsilon_3 - \varepsilon_3^*)$ (в области разгрузки среды таковой является область $\mathcal{Z}$), находим поле давления в ней, в частности, на жестком основании полосы. Следовательно, задача в области $\mathcal{Z}$ решена полностью.



Р и с. 3

Р и с. 2



Р и с. 5

Р и с. 4

Для конкретной структуры среды [3] проведены расчеты на ЭВМ для

$$(1.17) \quad \alpha_1 = 12,127 \cdot 10^2, \alpha_2 = 58,73 \cdot 10^3, E = 90,16 \cdot 10^3,$$

$$\rho_0 = 200 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4, p_0 = 105 \text{ кг/см}^2,$$

$$D = 340 \sqrt{1 + 0,83 p_0}, R_1 = \text{tg } \alpha_0 = 0,1255, R_2 = 0,86 \cdot 10^{-3}, h = 1,2 \text{ м.}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2—5 для давления, массовой скорости и $\text{tg } \beta$ (ξ) в зависимости от ξ в сечениях $\eta = h/2$ (сплошные), h (штриховые линии) и вдоль фронта отраженной волны Σ_0 . На рис. 2 видно, что параметры p , u , v в областях 1 и 3 в зависимости от ξ по абсолютной величине уменьшаются нелинейным образом. В области 2 p , u линейно возрастают, а v линейно уменьшается и меняет знак. Эти параметры достигают своего максимального значения на соответствующих точках фронта отраженной волны со стороны области 3, их значения с увеличением толщины полосы уменьшаются (рис. 2, 3, $h = 1$ и 2 м). На рис. 3 кривые 1 отвечают случаю (1.17) при $h = 2$ м. При сопоставлении числовых результатов обнаружено, что с увеличением коэффициентов α_1 и α_2 происходит рост значений параметров p , u , v . При уменьшении модуля Юнга E соответственно уменьшаются все параметры среды и время их действия на полосу (рис. 3, кривые 2). Анализ кривых рис. 4 показывает, что давление p_3 (p_2^*) со стороны области 3 (2) вдоль фронта отраженной волны в зависимости от ξ постепенно падает (растет), а вертикальная (горизонтальная) составляющая скорости среды увеличивается (уменьшается). При этом в момент $\xi = 23,6$ м отраженная волна угасает. Кроме того, на рис. 4 для сравнения приведены также результаты расчетов для $\alpha_1 = 12,127 \cdot 10^2$, $\alpha_2 = 58,73 \cdot 10^3$ при $h = 2$ м (сплошные линии) и $h = 1$ м (штриховые), для $\alpha_1 = 24,254 \cdot 10^2$, $\alpha_2 = 117,46 \cdot 10^3$ при $h = 2$ м (линии с кружочками). Изучая кривую $\text{tg } \beta(\xi)$ (рис. 5), заметим, что она с увеличением ξ медленно уменьшается, и, следовательно, фронт отраженной волны получается слабоискривленным и вогнутым к оси $O\xi$ (см. рис. 1) поверхностью. Однако изменение $\text{tg } \beta(\xi)$ в рассматриваемом интервале ξ по сравнению с его первоначальным значением в точке $\xi = \xi_a$, $\eta = h$ составляет приблизительно 2—4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скобеев А. М., Флитман Л. М. Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
3. Атабаев К. О воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость. — ДАН УзССР, 1979, № 9.
4. Мамадалиев Н., Молев В. П. О распространении двумерной пластической волны в нелинейно-сжимаемой полуплоскости. — ПМТФ, 1977, № 4.

Поступила 4/IV 1985 г.

УДК 532.135

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ УИРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. М. Волчков, А. А. Козлов, П. В. Кузин

(Волгоград)

Существенная особенность высокоскоростного деформирования твердых тел — локализация деформации, одной из причин которой может быть неизотермическая неустойчивость пластического течения [1—6]. В связи с интенсивным развитием высокоскоростной технологии обработки материалов исследование критериев неизотермической неустойчивости процессов пластической деформации представляет принципиальный интерес, так как в некоторых случаях они определяют оптимальные технологические режимы [5]. Критические величины скоростей деформации, выше которых эффекты тепловой неустойчивости становятся определяющими в процессе деформирования твердых тел, полуэмпирическими методами оценены в [1].